TIDIAN

T D

JIETITIDIAN
CONGSHU



全国著名特高级教师编写

初中数学解题题典

主编／郭奕津　史　亮

东北师范大学出版社

D T



T  D

全国著名特高级教师编写

初中数学解题题典

主编／郭奕津　史　亮

图书在版编目（CIP）数据

初中数学解题题典/郭奕津主编．—长春：东北师范大学出版社，2001.5

（解题题典丛书）

ISBN 7-5602-1833-4

Ⅰ.初…　Ⅱ.郭…　Ⅲ.数学课-初中-解题　Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第21302号

□出 版 人：贾国祥

□责任编辑：刘　杨　□封面设计：魏国强

□责任校对：吴　人　□责任印制：张文霞

东北师范大学出版社出版发行

长春市人民大街138号（130024）

销售热线：0431—5695744　5688470

传真：0431—5695734

网址：http：//www.nnup.com

电子函件：sdcbs@mail.jl.cn

东北师范大学出版社激光照排中心制版

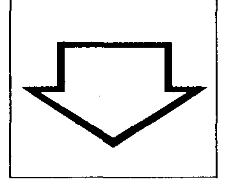
黑龙江新华印刷二厂印刷

2001年6月第3版　2002年2月第5次印刷

开本：880mm×1230mm　1/32　印张：19.75　字数：800千

印数：505 401—515 400册

定价：22.00元



题典

目　　录

初中数学

第一部分　代数篇

第一部分　代数篇

第一章　有　理　数

一、有理数的意义

题1　有理数的分类有哪几种方法？

解　(1) 有理数
- 整数
  - 正整数
  - 零
  - 负整数
- 分数
  - 正分数
  - 负分数

(2) 有理数
- 正有理数
  - 正整数
  - 正分数
- 零
- 负有理数
  - 负整数
  - 负分数

题2　有理数的意义及性质如何？

解　(1) 有理数都可以表示成既约分数的形式.

(2) 相反数是一对具有符号不同的两个数，互为相反数的和是零.

(3) 一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零.

题3　下面说法中，正确的是（　　）.

A. 在有理数中，零的意义仅表示没有

B. 正有理数和负有理数组成全体有理数

C. 0.3既不是整数，也不是分数，因此它不是有理数

D. 零既不是正数，也不是负数

解 0是一个很重要又很特殊的数，它不是正数，也不是负数．它既是整数，也是偶数，还是自然数．所以选择D.

题4 下列结论中，正确的是（　　）.

A. 一个数的相反数一定是负数

B. 一个数的绝对值一定不是负数

C. 一个数的绝对值的相反数一定不是负数

D. 一个数的绝对值一定是正数

解 根据绝对值的意义，一个数a的绝对值$|a|$是一个非负数，即一定不是负数．该题正确的为B.

题5 下列结论中，正确的是（　　）.

A. 若一个数是整数，则这个数一定是有理数

B. 若一个数是有理数，则这个数一定是整数

C. 若一个数是有理数，则这个数一定是负数

D. 若一个数是有理数，则这个数一定是正数

解 根据有理数的意义，整数、分数和零统称为有理数．故B、C、D三个选项都不全面．应选择A.

题6 正整数集合和负整数集合合在一起，构成数的集合是（　　）.

A. 整数集合　　　　B. 有理数集合

C. 自然数集合　　　　D. 非零整数集合

解 根据整数的意义，整数包括正整数、负整数和零，而有理数是正数、负数和零的总称，自然数是正整数与零的总称．所以A、B、C三个选项都不正确．应选择D.

题7 当$|x|=3$时，$x-(+7)$一定等于-4吗？a为整数，a的倒数是$\frac{1}{a}$吗？上述问题如果不对，请说明理由.

解 上述说法都不正确.

1. 因为$|x|=3$时，$x=\pm3$，如果$x=3$时，上式$x-(+7)=-4$正确，但当$x=-3$时，$x-(+7)=-10$，则上述说法错误.

2. a为整数，a的倒数是$\frac{1}{a}$也不正确．因为当$a=0$时，$\frac{1}{a}$不存在.

题8 数a在数轴上的位置如图1-1，试把a，a的相反数，a的倒数和a的倒数的绝对值从小到大用“<”连接起来.

图1-1

解 因为a的相反数是$-a$，a的倒数的$\frac{1}{a}$，a的倒数的绝对值是$|\frac{1}{a}|$.

如图1-1，因为$-1<a<0$，所以$0<-a<1$，$\frac{1}{a}<-1$，$|\frac{1}{a}|>1$

所以$\frac{1}{a}<a<-a<|\frac{1}{a}|$.

题9 试比较有理数a与$\frac{1}{a}$（$a\neq 0$）的大小.

解 因为$a\neq 0$，所以

(1) 当$0<a<1$时，$\frac{1}{a}>1$，所以$a<\frac{1}{a}$.

(2) 当$a>1$时，$0<\frac{1}{a}<1$，所以$a>\frac{1}{a}$.

(3) 当$a<-1$时，$-1<\frac{1}{a}<0$，所以$a<\frac{1}{a}$.

(4) 当$-1<a<0$时，$\frac{1}{a}<-1$，所以$a>\frac{1}{a}$.

(5) 当$a=\pm 1$时，$\frac{1}{a}=\pm 1$，所以$a=\frac{1}{a}$.

综上所述，当$0<a<1$时或$a<-1$时，$a<\frac{1}{a}$，当$a>1$或$-1<a<0$时，$a>\frac{1}{a}$；当$a=\pm 1$时，$a=\frac{1}{a}$.

题10 a是什么数时，$a^2>a$？a是什么数时，$a^3<a$？

解 $a>1$或$a<0$时，$a^2>a$；

$0<a<1$或$a<-1$时，$a^3<a$.

二、有理数的加法和减法

题11 下列说法正确的是（　　）.

A. 两个负数相加，绝对值相减

B. 正数加负数，和为正数；负数加正数，和为负数

C. 两个正数相加，和为正数；两个负数相加，和为负数

D. 两个有理数相加，等于它们的绝对值相加

解 根据有理数加法法则，A、B、D都是错误的. 应选择C.

题12 下列说法正确的是（　　）.

A. 两个有理数的和为正数时，这两个数都是正数

B. 两个有理数的和为负数时，这两个数都是负数

C. 两个有理数的和，一定大于其中一个加数

D. 两个有理数的和，可能等于零

解 因为 $(-2)+(+3)=+1$，所以A不正确；又 $(-3)+(+2)=-1$，所以B也不正确；又因 $(-4)+2=-2$，而 $-2<2$，所以C也不正确，故应选择D.

题13 $-\left[0.5-\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{6}+2.5-0.3\right)\right]$ 等于（　　）.

A. 2.2　　B. -3.2　　C. -2.2　　D. 3.2

解 原式 $=-\left[0.5-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-2.5+0.3\right]$

$=-\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-2.2\right]=2.2$. 故应选择A.

题14 $-3\frac{1}{3}-\left\{\frac{1}{2}-\left[-4\frac{3}{4}-\left(-1\frac{2}{3}\right)\right]\right\}$ 等于（　　）.

A. $-7\frac{11}{12}$　　B. $-6\frac{11}{12}$　　C. $-8\frac{1}{12}$　　D. $-7\frac{11}{12}$

解 原式 $=-3\frac{1}{3}-\left\{\frac{1}{2}-\left[-4\frac{3}{4}+1\frac{2}{3}\right]\right\}$

$=-3\frac{1}{3}-\left\{\frac{1}{2}+3\frac{1}{12}\right\}$

$=-3\frac{1}{3}-3\frac{7}{12}=-6\frac{11}{12}$. 故应选择B.

题15 欲使两个数和的绝对值等于这两个数差的绝对值，这两个数必须是怎样的数？

解 这两数同正、同负及一正一负都不满足题意，只有这两数中至少有一个为零，才能使 $|a+b|=|a-b|$ 成立.

题16 欲使两个数和的绝对值不小于这两个数的差的绝对值，这两个数必须是怎样的数？

解 根据题意可知，设两个数分别为 a、b.

若 $|a+b|\geqslant|a-b|$ 成立，必须且只需 a、b 为同正、同负或其中至少有一个为零；等号成立时，a、b 中至少有一个为零.

三、有理数的乘法、除法和乘方

题17 简述有理数乘除法和乘方的运算法则.

解 两个非零有理数相乘或相除时，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘（或相

除）. n 个相同有理数相乘叫做乘方. 即 $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n个}=a^n$ $(a\neq 0)$.

在有理数的运算中，要先乘方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里的.

题 18 下面说法正确的是（　　）.

A. 几个有理数相乘，当因数有奇数个时，积为负

B. 几个有理数相乘，当正因数有奇数个时，积为负

C. 几个有理数相乘，当积为负数时，负因数有奇数个

D. 几个有理数相乘，当负因数有奇数个时，积为负

解 若这奇数个因数都为正，则积为正，若其中有一个因数为零，则积为零，若其中有一个因数为零，则积也为零，所以 A、B、D 都错. 若几个有理数的积为负，则其中任意一个因数都不能为零，所以负因数有奇数个. 应选择 C.

题 19 $-0.3^2\div 0.5\times 2\div(-2)^2$ 的值是（　　）.

A. $-\frac{9}{100}$　　B. $\frac{9}{100}$　　C. $\frac{9}{400}$　　D. $-\frac{9}{400}$

解 原式 $=-0.09\div 0.5\times 2\div 4$

$=-0.09\times 2\times 2\times\frac{1}{4}=-\frac{9}{100}$. 应选择 A.

题 20 $(-0.3)^3\div(-0.1)^2\times(-0.01^2)\div(-3^4)$ 的值是（　　）.

A. $-\frac{3}{40000}$　　B. $-\frac{1}{300000}$　　C. $\frac{1}{300000}$　　D. $-\frac{1}{3000}$

解 原式 $=-0.027\div 0.01\times(-0.0001)\div(-81)$

$=-0.027\times 100\times(-0.0001)\times(-\frac{1}{81})$

$=-\frac{1}{300000}$. 应选择 B.

题 21 若 $a\cdot b<|a\cdot b|$，则一定有（　　）.

A. $a<0$，$b<0$　　B. $a>0$，$b<0$

C. $a<0$，$b>0$　　D. $a\cdot b<0$

解 因为 $a\cdot b<|a\cdot b|$，则 a、b 中任一个都不为零，所以 a、b 同正或同负或一正一负，而当 a、b 同正或同负时，$a\cdot b=|a\cdot b|$，所以只有一正一负. 即 $a\cdot b<0$. 应选择 D.

题 22 下列数中与 $(-7-2)^5$ 相等的数是（　　）.

A. $(-7)^5+(-2)^5$　　B. -14^5　　C. 3^{10}　　D. -3^{10}

解 $(-7-2)^5=(-9)^5=(-3^2)^5=-3^{10}$. 应选择 D.

说明：当 a、b 都不为零时，$(a+b)^n\neq a^n+b^n$.

题 23 如果等式 $a=a^2$ 成立，则 a 可能的取值有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 不确定

解 $\because a=a^2$，所以 $a^2-a=0$，所以 $a(a-1)=0$，$\therefore a=0$ 或 $a=1$. 应选 B.

说明：对于 $a=a^2$，在不知道 a 是否等于零的情况下，要防止两边都除以 a，得 $a=1$，而选 A 的错误结论.

题24 a 为任意整数，则下列四组数中的数字都不可能是 a^2 的末位数字的应是（　　）.

A. 3，4，9，0　B. 2，3，7，8　C. 4，5，6，7　D. 1，5，6，9

解　因为 a 是整数，所以 a^2 也是整数，而 a^2 代表两个相同的整数相乘，所以 a^2 的末位数字是 0～9 这十个数字中相同两个数字乘积的末位数，而这十个数字中任一个数的平方的末位数字只能是 0，1，4，5，6，9 中的一个，所以 A、C、D 三个选项都有数字可能出现. 应选择 B.

题25 四个各不相等的整数 a、b、c、d，它们的积 $a \cdot b \cdot c \cdot d=9$，那么 $a+b+c+d$ 的值是（　　）.

A. 0　　B. 4　　C. 8　　D. 不确定

解　根据题意，$a \cdot b \cdot c \cdot d=9$，所以这四个整数不能同正或同负或有一个为零. 且负因数的个数只能是 2 个，又 $9=3\times(-3)\times1\times(-1)$，除此之外，9 再不能分解成另外四个不相等的整数相乘的形式，所以 $a+b+c+d=3+(-3)+1+(-1)=0$. 应选择 A.

题26 如果有理数 a、b、c 满足 $a \cdot b \cdot c\neq0$，求 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$ 的所有可能值的立方和.

解　因为 $a \cdot b \cdot c\neq0$，所以 a、b、c 中任一个不为零，所以 a、b、c 取值情况如下：

$$a>0\begin{cases}b>0\begin{cases}c>0 & ①\\ c<0 & ②\end{cases}\\ b<0\begin{cases}c>0 & ③\\ c<0 & ④\end{cases}\end{cases}\quad 或\quad a<0\begin{cases}b>0\begin{cases}c>0 & ⑤\\ c<0 & ⑥\end{cases}\\ b<0\begin{cases}c>0 & ⑦\\ c<0 & ⑧\end{cases}\end{cases}$$

设 $\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}=m$，所以在上述 8 种情况中，$m$ 的值分别为 3，1，1，-1，1，-1，-1，-3. 而 $3^3+1^3+1^3+(-1)^3+1^3+(-1)^3+(-1)^3+(-3)^3=0$.

$\therefore \frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}$ 的所有可能值的立方和为 0.

题27 如果 $\frac{|b|}{b}+\frac{a}{|a|}=0$，试比较 $-\frac{b}{a}$ 与 $a \cdot b$ 的大小.

解　因为 $\frac{|b|}{b}+\frac{a}{|a|}=0$，所以 $\frac{|b|}{b}=-\frac{a}{|a|}$，所以 $|a \cdot b|=-ab>0$，所以 $ab<0$，而 $-\frac{b}{a}$ 与 $-ab$ 符号相同，所以 $-\frac{b}{a}>0$，所以 $-\frac{b}{a}>ab$.

题28 如果 $|a-1|+(b+2)^2=0$，求 $(a+b)^{2001}$ 的值.

解　$\because |a-1|\geqslant0$，$(b+2)^2\geqslant0$，且 $|a-1|+(b+2)^2=0$，

$\therefore \begin{cases} a-1=0, \\ b+2=0. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=1, \\ b=-2. \end{cases}$

$\therefore a+b=1+(-2)=-1,$

$\therefore (a+b)^{2001}=(-1)^{2001}=-1.$

题29 已知有理数 a、b、c 满足 $|a-1|+|b+3|+|3c-1|=0$，求 $(a\times b\times c)^{125}\div(a^9\times b^3\times c^2)$ 的值.

解 $\because |a-1|\geqslant 0$，$|b+3|\geqslant 0$，$|3c-1|\geqslant 0$，

且 $|a-1|+|b+3|+|3c-1|=0$.

$\therefore \begin{cases} a-1=0, \\ b+3=0, \\ 3c-1=0; \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=1, \\ b=-3, \\ c=\frac{1}{3}; \end{cases}$

$\therefore a\times b\times c=-1$，$a^9\times b^3\times c^2=1\times(-27)\times\frac{1}{9}=-3$，

$\therefore (a\times b\times c)^{125}=(-1)^{125}=-1$，

$\therefore (a\times b\times c)^{125}\div(a^9\times b^3\times c^2)=(-1)\div(-3)=\frac{1}{3}.$

题30 已知 $\frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}=1$，

求 $(\frac{|abc|}{abc})^{2002}\div(\frac{bc}{|ab|}\cdot\frac{ac}{|bc|}\cdot\frac{ab}{|ca|})$ 的值.

解 $\because \frac{a}{|a|}+\frac{|b|}{b}+\frac{c}{|c|}=1$，

$\therefore$ a、b、c 不能三个同正或同负或两负一正，只能是两正一负.

不妨设 $a>0$，$b>0$，$c<0$，则 $abc<0$，$ab>0$，$bc<0$，$ac<0$，

$\therefore (\frac{|abc|}{abc})^{2002}\div(\frac{bc}{|ab|}\cdot\frac{ac}{|bc|}\cdot\frac{ab}{|ca|})$

$=(-1)^{2002}\div(\frac{bc}{ab}\cdot\frac{ac}{-bc}\cdot\frac{ab}{-ac})$

$=1\div 1=1.$

题31 计算：

(1) $(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{99}+(-1)^{100}$；

(2) $\frac{2}{5}\div(-2\frac{2}{5})+\frac{8}{21}\times(-1\frac{3}{4})^2-(0.5-1)^3$.

解 (1) 原式 $=(-1)+1+\cdots+(-1)+1=0$.

(2) 原式 $=\frac{2}{5}\times(-\frac{5}{12})+\frac{8}{21}\times(\frac{49}{16})-(-\frac{1}{8})$

$=-\frac{1}{6}+\frac{7}{6}+\frac{1}{8}=1\frac{1}{8}.$

题32 计算：$\frac{1}{10\times 11}+\frac{1}{11\times 12}+\frac{1}{12\times 13}+\cdots+\frac{1}{19\times 20}$.

解 原式$=\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)$

$=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}$.

题 33 已知$|x|=3$，$y^2=16$，求$x+y$的值.

解 $\because |x|=3$，$\therefore x=\pm 3$，

$\because y^2=16$，$\therefore y=\pm 4$，

$\therefore$应分以下四种情况加以计算：

当$x=3$，$y=4$时，$x+y=7$；

当$x=3$，$y=-4$时，$x+y=-1$；

当$x=-3$，$y=4$时，$x+y=1$；

当$x=-3$，$y=-4$时，$x+y=-7$.

第二章　整　　式

一、整　式

题 1　简述有关整式的基本概念.

解　(1) 单项式是数和字母的积，以及单独的一个数或字母，它既不含有加、减运算，也不能在分母中含有字母.

(2) 多项式是几个单项式的和.

(3) 单项式和多项式统称为整式.

(4) 一个代数式不包含关系符号（大于号，小于号或等号）.

题 2　两台抽水机抽水，甲单独抽完用 a 小时，乙单独抽完用 b 小时，两台合抽 1 小时抽水量为（　　）.

A. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a+b}$　　C. $\frac{1}{ab}$　　D. $1\div\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

解　因为甲单独完成用 a 小时完成，所以甲 1 小时抽水量为$\frac{1}{a}$，又乙单独完成用 b 小时，所以乙 1 小时抽水量为$\frac{1}{b}$，所以甲、乙合抽 1 小时抽水量应为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. 应选择 A.

题 3　下列多项式中是二次三项式的是（　　）.

A. $a+b$　　B. $3a+4ab^2+5b$

C. a^2+2a+1　　D. a^3+b^3

解　根据二次三项式定义可知，如果一个多项式含有三项，且其中最高次项的次数是二次的多项式是二次三项式. 应选择 C.

题 4　下列各式中，值一定为负的（　　）.

A. $|a|-|b|$　　B. $-a^2-b^2$　　C. $-a^2-1$　　D. $-a$

解　在 A、B、D 三个选项中，当 $a=b=0$ 时，它们的值是零. 而在 C 中不论 a 是什么值，$-a^2-1<0$ 永远成立. 应选择 C.

题5 下列式子能正确表示“a与b的平方的和”的是（　　）.

A. a^2+b^2　　B. $(a+b)^2$　　C. $a+b^2$　　D. a^2+b

解 选择C.

说明：一般用代数式表示数量关系时，要“先读后写”，如果文字叙述的数量关系的运算顺序与无括号的有理数混合运算顺序不一致时，要加括号.

题6 用语言叙述代数式a^2-b^2正确的是（　　）.

A. a与b的平方的差　　B. a与b差的平方

C. a，b两数的平方差　　D. b与a两数的平方差

解 选择C.

题7 浓度为80%的酒精x克和浓度为55%的酒精y克混合，则混合后的浓度是（　　）.

A. 80%＋55%　　B. $\frac{1}{2}$（80%＋55%）

C. （80%·x＋55%·y）÷（$x+y$）　　D. （80%＋55%）÷（$x+y$）

解 浓度80%的酒精x克，含纯酒精$\frac{80}{100}x$克；浓度55%的酒精y克，含纯酒精$\frac{55}{100}y$克，混合后浓度$=\frac{80\%\cdot x+55\%\cdot y}{x+y}$. 应选择C.

题8 甲、乙两人从同地出发同向而行，甲每小时走m千米，乙每小时走n千米（$m>n$），乙比甲先行a小时，几个小时后甲可以追上乙（　　）.

A. $\frac{an}{m-n}$　　B. $\frac{am}{m+n}$　　C. $\frac{an}{m+n}$　　D. $\frac{am}{m-n}$

解 乙先行a小时，共走路程为an千米，甲、乙两人速度差为$(m-n)$千米/时，甲追上乙所用时间为$\frac{an}{m-n}$小时. 应选择A.

题9 下列结论中正确的是（　　）.

A. 没有加减运算的代数式叫做单项式

B. 单项式$\frac{3xy^2}{7}$的系数是3，次数是2

C. 单项式m既没有系数，也没有次数

D. 单项式$-xy^2z$的系数是-1，次数是4

解 根据单项式定义及单项式中有关概念，选项A、B、C都不正确. 选择D.

说明：(1) 每个单项式都有系数，它的数字因数就是这个单项式的系数，如3×10^5t，$-\frac{4}{3}xy^2$的数字因数分别是3×10^5和$-\frac{4}{3}$，所以它的系数分别是3×10^5和$-\frac{4}{3}$.

(2) 单项式的次数是它所有字母指数的和，当字母的指数是1时，常省略不写. 如3×10^5t，$-mnp^3$的次数分别是一次和五次.

题10 下列哪个多项式是按x的升幂排列（　　）.

A. $-x^2y+2xy^2+y^3+x^3$　　B. $2x^3y-y^4+3xy^3-x^4$

C. $4x^4-3x^3y-5x^2y^2+xy^3-y^4$　　D. $-y^3-5x+3x^2y^2+x^3y$

解　由升幂排列的定义知，选项A、B、C都不是按 x 的升幂排列，选择D.

说明：对一个多项式作升幂（或降幂）排列，一定要先确定是对哪个字母作排列，每一个排列只能按所确定的这个字母的指数的大小作为标准.

题11　如果 $a\leqslant -a$，那么 a 一定是（　　）.

A. 正数　　B. 负数　　C. 正数或零　　D. 负数或零

解　由 $a\leqslant -a$，可知 $2a\leqslant 0$，所以 $a\leqslant 0$，即 a 是负数或零. 选择D.

题12　求代数式 $-x^2+2x-1$ 的值.

(1) $x=\frac{1}{2}$；　(2) $x=-\frac{1}{2}$.

解　(1) 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，

$$-x^2+2x-1=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}+1-1=-\frac{1}{4}.$$

(2) 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，

$$-x^2+2x-1=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{1}{4}-1-1=-2\frac{1}{4}.$$

说明：在以后学完乘法公式之后，也可如下求值.

$$-x^2+2x-1=-(x^2-2x+1)=-(x-1)^2.$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，原式 $=-\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=-\frac{1}{4}$；

当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，原式 $=-\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2=-\frac{9}{4}=-2\frac{1}{4}$.

题13　求当 $x=\frac{1}{2}$，$y=-1$ 时，求下列两个式子的值.

(1) $|x-y|-|x-y|$；　(2) $\frac{|x-y|}{|x|-|y|}$.

解　当 $x=\frac{1}{2}$，$y=-1$ 时，

$$(1)\ |x+y|-|x-y|=\left|\frac{1}{2}+(-1)\right|-\left|\frac{1}{2}-(-1)\right|$$

$$=\left|-\frac{1}{2}\right|-\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1.$$

$$(2)\ \frac{|x-y|}{|x|-|y|}=\frac{\left|\frac{1}{2}-(-1)\right|}{\left|\frac{1}{2}\right|-|-1|}=\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=-3.$$

题14　当 n 为整数时，$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，计算 $1+2+3+\cdots+100$ 时的

值.

解 因为$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，所以当$n=100$时，$1+2+3+\cdots+100=\frac{100(100+1)}{2}=5050$.

题15 利用公式$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$可以计算从a_1到a_n这n个连续自然数的和，试计算$10+11+12+\cdots+1000$的和.

解 根据题意$a_1=10$，$a_n=1000$，$n=991$，

所以$S_n=\frac{991(10+1000)}{2}=500455$.

题16 长方体的长、宽、高分别是a、b、c，那么长方体的表面积$S=2(ab+bc+ca)$，长方体体积$V=abc$，求当$a=3.5$，$b=2\frac{1}{4}$，$c=1\frac{3}{5}$时，S和V的值.

解 当$a=3.5$，$b=2\frac{1}{4}$，$c=1\frac{3}{5}$时，

$S=2(ab+bc+ca)$

$=2(3.5\times2\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}\times1\frac{3}{5}+1\frac{3}{5}\times3.5)=\frac{683}{20}$（平方单位）.

$V=abc=3.5\times2\frac{1}{4}\times1\frac{3}{5}=\frac{63}{5}$（立方单位）.

答：长方体的表面积$S=\frac{683}{20}$平方单位，体积$V=\frac{63}{5}$立方单位.

二、整式的加减

题17 简述有关整式加减的知识.

解 (1) 整式加减的基础是合并同类项.

(2) 同类项的定义：所含字母相同，相同字母的指数分别相等的项叫同类项.

(3)同类项与它们的系数大小无关，也与字母排列顺序无关；所有常数项都是同类项.

(4) 合并同类项的定义：把同类项系数相加，而字母和字母的指数都不变，合并同类项的依据是分配律.

题18 下列合并同类项正确的是（　　）.

A. $5ab-ab=5$　　　　B. $x+x=x^2$

C. $-x-x=0$　　　　D. $-2ab+2ab=0$

解 选择D.

说明：当两个同类项的系数互为相反数时，合并同类项的结果为零.

题19 化简 $(a^2-ab+2b^2)-2(-a^2+b^2)$ 的结果是（ ）.

A. $3a^2-ab$　B. a^2-3ab　C. $3a^2+ab$　D. a^2+3ab

解 原式$=a^2-ab+2b^2+2a^2-2b^2=3a^2-ab$. 故应选择 A.

题20 已知 $A=2x^2-3xy+2y^2$，$B=2x^2+xy-3y^2$，则 $B-A$ 等于（ ）.

A. $2xy-5y^2$　B. $4xy+5y^2$

C. $-2xy-5y^2$　D. $4xy-5y^2$

解 $B-A=(2x^2+xy-3y^2)-(2x^2-3xy+2y^2)$

$=2x^2+xy-3y^2-2x^2+3xy-2y^2$

$=4xy-5y^2$. 故应选择 D.

题21 在 $2-[2(x+3y)-3(\quad)]=x+2$ 中，括号内填上的代数式是（ ）.

A. $x+2y$　B. $-x+2y$　C. $x-2y$　D. $-x-2y$

解 设括号内应填的代数式为 M，则 $2-2(x+3y)+3M=x+2$ 即 $2-2x-6y+3M=x+2$，所以 $3M=x+2-2+2x+6y=3x+6y$ 所以 $M=x+2y$. 应选择 A.

题22 计算 $\frac{2}{3}a^2+\left(-\frac{2}{3}ab\right)-\frac{3}{4}b^2+\left(-\frac{3}{4}a^2\right)-\left(-\frac{1}{2}b^2\right)$ 的结果是（ ）.

A. $\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{2}{3}ab$　B. $-\frac{1}{12}a^2-\frac{1}{4}b^2-\frac{2}{3}ab$

C. $-\frac{1}{12}a^2+\frac{2}{3}ab-\frac{1}{4}b^2$　D. $-\frac{1}{12}a^2-\frac{2}{3}ab+\frac{1}{4}b^2$

解 原式$=\frac{2}{3}a^2-\frac{2}{3}ab-\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}b^2$

$=-\frac{1}{12}a^2-\frac{1}{4}b^2-\frac{2}{3}ab$. 应选择 B.

题23 已知 $x=-\frac{2}{5}$，则 $(5x^2-5x+1)-(5-20x^2)$ 的值为（ ）.

A. 2　B. -2　C. -10　D. -6

解 原式$=5x^2-5x+1-5+20x^2=25x^2-5x-4$.

当 $x=-\frac{2}{5}$ 时，上式$=25\times\left(-\frac{2}{5}\right)^2-5\left(-\frac{2}{5}\right)-4$

$=4+2-4=2$.

故应选择 A.

题24 减去 $-3m$ 等于 $5m^2-3m-5$ 的代数式是（ ）.

A. $5(m^2-1)$　B. $5m^2-6m-5$

C. $5(m^2+1)$　D. $-(5m^2+6m-5)$

解 设 $M-(-3m)=5m^2-3m-5$，则有

$M=5m^2-3m-5-3m=5m^2-6m-5$. 故应选择 B.

题25 若 A 和 B 均为五次多项式，则 $A-B$ 一定是（　　）.

A. 十次多项式　　B. 零次多项式

C. 次数不高于五次的多项式　　D. 次数低于 5 次的多项式

解 根据合并同类项法则可知，只对系数相加减，而字母和字母的指数都不变，且同类项系数为相反数，这一同类项合并的结果为 0，所以选项 A、B、D 都不对. 应选择 C.

题26 当 $m=2$，$n=1$ 时，$-m-〔-(2m-3n)〕+〔-(-3m)-4n〕$ 等于（　　）.

A. 1　　B. 9　　C. 3　　D. 5

解 原式 $=-m-〔-2m+3n〕+(3m-4n)$

$=-m+2m-3n+3m-4n=4m-7n$.

当 $m=2$，$n=1$ 时，上式 $=4\times2-7\times1=1$. 故选择 A.

题27 若 $0.5a^2b^y$ 和 $-\frac{4}{3}a^xb$ 是同类项，则正确的是（　　）.

A. $x=2$，$y=0$　　B. $x=-2$，$y=0$

C. $x=2$，$y=1$　　D. $x=-2$，$y=1$

解 根据同类项定义，相同字母的指数相同，所以 $x=2$，$y=1$.

选择 C.

注意：b 的指数为 1，而不是 0.

题28 $5a^{2(m+2)}-4ab^{2(m-2)}+a^{2(m+2)}-3ab^{2(m-2)}$ 的结果是（　　）.

A. $5a^{2(m+2)}-7ab^{2(m-2)}$　　B. $6a^{2(m+2)}-7ab^{2(m-2)}$

C. $5a^{2(m+2)}+7ab^{2(m-2)}$　　D. $6a^{2(m+2)}+7ab^{2(m-2)}$

解 原式 $=6a^{2(m+2)}-7ab^{2(m-2)}$. 故选择 B.

题29 若 $A=3m^2-5m+2$，$B=3m^2-4m+2$' 则 A 与 B 的关系是（　　）.

A. $A<B$　　B. $A>B$

C. $A=B$　　D. 以上关系都有可能成立

解 $A-B=3m^2-5m+2-(3m^2-4m+2)$

$=3m^2-5m+2-3m^2+4m-2$

$=-m$.

(1) 当 $m>0$ 时，$-m<0$，$\therefore A-B<0$，$\therefore A<B$.

(2) 当 $m=0$ 时，$-m=0$，$\therefore A-B=0$，$\therefore A=B$.

(3) 当 $m<0$ 时，$-m>0$，$\therefore A-B>0$，$\therefore A>B$.

故应选择 D.

说明：$-m$ 值随 m 值的不同而不同，它只是 m 的相反数，可正、可负也可以为零，不要误将 $-m$ 看作是小于零的负数.

题30 化简：$3x^3-2x^2-\{3x-2-〔5-x-(-x^2+x^3)〕\}$.

解 原式$=3x^3-2x^2-\{3x-2-5+x+(-x^2+x^3)\}$

$=3x^3-2x^2-3x+2+5-x-(-x^2+x^3)$

$=3x^3-2x^2-4x+7+x^2-x^3=2x^3-x^2-4x+7.$

注意：每去掉一层括号，如果有同类项就合并同类项，这样做可使算式简单，减少差错.

题31 计算：

(1) $(-a^3+3a^2-5a+7)+(5a^2-7a)-(a^3-a+3)$；

(2) $(0.3x^3-x^2y+xy^2-\frac{1}{2}y^3)-(-\frac{1}{5}x^3-x^2y+0.3y^3)+(0.5x^3-0.2y^3)$.

解 (1)原式$=-a^3+3a^2-5a+7+5a^2-7a-a^3+a-3$

$=-2a^3+8a^2-11a+4.$

(2)原式$=0.3x^3-x^2y+xy^2-\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{5}x^3+x^2y-0.3y^3+0.5x^3-0.2y^3$

$=x^3+xy^2-y^3.$

题32 计算：$(2^3a^n-2b^m+c)-[2^2a^n-3^3b^m-(\frac{1}{2})^3c]$.

解 原式$=2^3a^n-2b^m+c-2^2a^n+3^3b^m+(\frac{1}{2})^3c$

$=8a^n-2b^m+c-4a^n+27b^m+\frac{1}{8}c$

$=4a^n+25b^m+\frac{9}{8}c.$

题33 已知：$A=x^3-2^3x^2y+2xy^2-2^2y^3$，

$B=x^3+3x^2y-5xy^2-y^3$，$C=-2x^3+2^2x^2y-5xy^2+3y^3$.

求：(1)$A+(B-C)$；(2)$A-(B-C)$.

解 (1)$A+(B-C)$

$=(x^3-8x^2y+2xy^2-4y^3)+[(x^3+3x^2y-5xy^2-y^3)-(-2x^3+4x^2y-5xy^2+3y^3)]$

$=x^3-8x^2y+2xy^2-4y^3+x^3+3x^2y-5xy^2-y^3+2x^3-4x^2y+5xy^2-3y^3$

$=4x^3-9x^2y+2xy^2-8y^3.$

(2)$A-(B-C)$

$=(x^3-8x^2y+2xy^2-4y^3)-[(x^3+3x^2y-5xy^2-y^3)-(-2x^3+4x^2y-5xy^2+3y^3)]$

$=x^3-8x^2y+2xy^2-4y^3-x^3-3x^2y+5xy^2+y^3-2x^3+4x^2y-5xy^2+3y^3$

$=-2x^3-7x^2y+2xy^2.$

题34 若 $\frac{x-y}{x+y}=2$，求 $\frac{x-y}{x+y}-\frac{2(x+y)}{3(x-y)}$的值.

解 因为 $\frac{x-y}{x+y}=2$，所以 $\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2}$.

所以原式$=2-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{3}$.

题35 若$(x-3)^2+|y+1|+z^2=0$,求(1)$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$的值;(2)$\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$的值.

解 $\because (x-3)^2+|y+1|+z^2=0$且$(x-3)^2\geqslant0,|y+1|\geqslant0,z^2\geqslant0$,

$\therefore x=3,y=-1,z=0$.

$\therefore$(1)$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=9+1+0+3=13$.

(2)原式$=\frac{1}{2}[(3+1)^2+(-1-0)^2+(0-3)^2]=13$.

题36 一轮船在A、B两地间航行,已知A、B两地相距S千米,从A到B是顺水,从B到A是逆水,船在静水的速度是a千米/时,水速是b千米/时$(a>b)$,求船在A、B两地间往返一趟的平均速度.

解 船在顺水中航行速度是$(a+b)$千米/时,所以在顺水中从A到B的航行时间是$\frac{S}{a+b}$时.

船在逆水中航行速度是$(a-b)$千米/时,所以在逆水中从B到A的航行时间是$\frac{S}{a-b}$小时,因此船在A、B两地间往返一趟所需时间为$(\frac{S}{a+b}+\frac{S}{a-b})$小时,所以船在$A$、$B$两地间往返一趟的平均速度为$\frac{2S}{(\frac{S}{a+b}+\frac{S}{a-b})}=\frac{(a+b)(a-b)}{a}$千米/时.

注意:(1)船在顺水中的速度为:水流速度+船在静水中速度.

船在逆水中的速度为=船在静水中速度-水流速度.

(2)往返一趟的平均速度为=往返一趟所走的路程÷(在顺水中航行时间+在逆水中航行时间).

(3)平均速度$\neq\frac{1}{2}$(在顺水中速度+在逆水中的速度).

题37 x的范围如图2-1所示阴影部分所示:

图2-1

求:$|x-|2-x|-2|1-x||$的值.

解 如图可知:$1\leqslant x<2$,$\therefore 2-x>0,1-x\leqslant0$,

$\therefore |x-|2-x|-2|1-x||=|x-(2-x)+2(1-x)|$

$=|x-2+x+2-2x|=0$.

题38 一个四位数,它的千位数字、百位数字、十位数字和个位数字分别为a、b、c、

d，把这个四位数的排列顺序逆过来（如 7643 变为 3467），求所得的四位数与原来四位数的差.

解 根据题可知：原四位数为 $1000a+100b+10c+d$，新四位数是 $1000d+100c+10b+a$，所以新四位数与原四位数的差是：

$$1000(d-a)+100(c-b)+10(b-c)+(a-d)$$
$$=999(d-a)+90(c-b).$$

题 39 (1)一个偶数和一个奇数的和是奇数吗？为什么？

(2)三个连续自然数之和是 3 的倍数吗？为什么？

解 (1)设偶数为 $2n$，奇数为 $2m+1$，则 $2n+(2m+1)=2(n+m)+1$ 为奇数.

(2)设三个连续自然数为 $n,n+1,n+2$，则

$n+n+1+n+2=3(n+1)$ 是 3 的倍数.

题 40 一个两位数，当它的个位数字是十位数字的 2 倍时，它能被 12 整除吗？为什么？

解 设这个两位数的十位数字是 a，则个位数字是 $2a$，这个两位数是 $10a+2a=12a$，能被 12 整除.

注意：上述各题都可先用字母（代数式）来表示，再按运算要求进行计算，由结果所含数字因数来判别.

题 41 已知 $y=\frac{18}{x-1}$，$|x|$ 为小于 8 的正整数，求 y 是整数时的 x 的值.

解 $\because |x|$ 是小于 8 的自然数，$\therefore x=+7,+6,+5,+4,+3,+2,+1$.

而要使 $y=\frac{18}{x-1}$ 为整数，则 $x=2,3,4,7$.

题 42 化简：

$$(x+y)+(2x+\frac{1}{1\times2}y)+(3x+\frac{1}{2\times3}y)+\cdots+(9x+\frac{1}{8\times9}y)$$

并求当 $x=2,y=9$ 时的值.

解
$$原式=(x+2x+3x+\cdots+9x)+(y+\frac{1}{1\times2}y+\frac{1}{2\times3}y+\cdots+\frac{1}{8\times9}y)$$
$$=(1+2+3\cdots+9)x+[y+(y-\frac{1}{2}y)+(\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}y)+\cdots+(\frac{1}{8}y-\frac{1}{9}y)]$$
$$=\frac{9(1+9)}{2}x+(2y-\frac{1}{9}y)=45x+\frac{17}{9}y.$$

当 $x=2,y=9$ 时，原式的值 $=45\times2+\frac{17}{9}\times9=107$.

题 43 若 $f(x)=2x-1$，（如 $f(-2)=2\times(-2)-1=-5$）.

求：$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(2001)}{2001}$ 的值.

解 $\because f(1)=2\times1-1, f(2)=2\times2-1, f(3)=2\times3-1,\cdots\cdots,$

$f(2001)=2\times2001-1,$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(2001)$

$=2\times1-1+2\times2-1+2\times3-1+\cdots+2\times2001-1$

$=2\times(1+2+3+\cdots+2001)-2001\times1$

$=2\times\frac{(1+2001)\times2001}{2}-2001=2001\times2001$,

$\therefore \frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(2001)}{2001}=2001$.

说明:上述两个题目利用了第15题的公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

第三章　一元一次方程

一、方　程

题1　简述一元一次方程有关的基本概念．

答　(1)表示相等关系的式子叫等式.

(2)含有未知数的等式叫方程.

(3)使方程左右两边相等的未知数的值,叫做方程的解.

(4)求方程的解的过程叫做解方程,如果两个方程的解相同,那么这两个方程叫做同解方程.

题2　试述方程同解原理．

答　(1)方程的两边都加上(或都减去)同一个数或同一个整式,所得方程与原方程是同解方程.

(2)方程的两边都乘以(或都除以)不等于零的同一个数,所得方程与原方程是同解方程.

题3　下列方程中是一元一次方程的是(　　).

A. $x-2y+1=0$　　　　B. $\sqrt{2}+\frac{y}{2}=1$

C. $x^2+2x-1=0$　　　　D. $y^2=4$

解　由一元一次方程的定义可知:选项A、C、D都不正确．应选择B.

题4　方程 $x-1=4$ 与方程 $2x=10$ 是同解方程是指(　　).

A. 这两个方程的解法相同

B. 这两个方程相等,可用等号连接起来

C. 每一个方程的解都是另一个方程的解

D. 第一个方程的解都是第二个方程的解

解　由同解方程的定义可知:选择C.

题5　已知方程 $-x-2=0$,则下列方程中和它同解的是(　　).

A. $x+2=0$　　B. $x=2$

C. $x-2=0$　　D. $0\cdot(x+2)=0\cdot 0$

解　方程$-x-2=0$,移项:$x=-2$,即$x+2=0$. 故选择A.

题6　下面各方程后面括号里的数,均是该方程的解的是(　　).

A. $3x-1=5$　(2)　　B. $\frac{5}{2x}+1=0$　$(-5,-7)$

C. $x^2-3x=4$　(4,1)　　D. $x(x-2)(x+4)=0$　(2,4)

解　A. 把$x=2$代入$3x-1=5$的左边,得$3\times2-1=5$,∴左=右.

B. 把$x=-5$代入$\frac{5}{2x}+1=0$的左边,得$-\frac{1}{2}+1\neq0$,∴左≠右.

C. 把$x=1$代入x^2-3x中,得$x^2-3x=-2$,∴左≠右.

D. 把$x=4$,代入$x(x-2)(x+4)$得$x(x-2)(x+4)\neq0$,∴左≠右.

所以应选择A.

题7　方程$|2x-1|=2$解是(　　).

A. $x=\frac{3}{2}$　　B. $x=-\frac{3}{2}$　　C. $x=\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$　D. $x=\frac{1}{2}$

解　由$|2x-1|=2$可得$2x-1=2$或$2x-1=-2$.

当$2x-1=2$时,得$x=\frac{3}{2}$.

当$2x-1=-2$时,得$x=-\frac{1}{2}$. 故应选择C.

题8　如果方程$2x+a=x-1$的解是-4,那么a的值是(　　).

A. 3　　B. -5　　C. -13　　D. 5

解　由方程$2x+a=x-1$得$x=-a-1$,又-4是方程的解,

所以$-4=-a-1$,得$a=3$. 故应选择A.

题9　下面几种说法中,正确的是(　　).

A. 若$ac=bc$,则$a=b$　　B. 若$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$,则$a=b$

C. 若$a^2=b^2$,则$a=b$　　D. 若$-\frac{1}{3}x=6$,则$x=-2$

解　在选项A中,若$c=0$,则a不一定等于b.

在选项C中,$a^2=b^2$可得$a=b$或$a=-b$,所以选项C也不对.

在选项D中,由$-\frac{1}{3}x=6$,则$x=-18$,所以D也不对.

说明:因为$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$,所以c一定不等于零,否则不能有$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$成立. 所以选择B.

题10　若$(a+3)^2$与$|b-1|$互为相反数,则(　　).

A. $a=-3,b=-1$　　B. $a=-3,b=1$

C. $a=+3,b=1$　　D. $a=3,b=-1$

解 $\because (a+3)^2$ 与 $|b-1|$ 互为相反数，$\therefore (a+3)^2+|b-1|=0$.

$\therefore \begin{cases} a+3=0, \\ b-1=0; \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} a=-3, \\ b=1. \end{cases}$ 故应选择 B.

题 11 已知 $|2y-1|=0$，则下列关系式正确的是(　　).

A. $y^2-|y|=2$　　B. $y^2-|y|=-\frac{1}{4}$

C. $y^2-|y|=0$　　D. $y^2-|y|=\frac{1}{4}$

解 $\because |2y-1|=0$，$\therefore 2y-1=0$，$\therefore y=\frac{1}{2}$.

把 $y=\frac{1}{2}$ 分别代入 A、B、C、D 四个选项中，只有 B 正确.

题 12 已知方程 $4x=-8$ 与 $x=1+k$ 是同解方程，则代数式 $\frac{3k^2-1}{|k|}$ 的值为(　　).

A. $-\frac{8}{3}$　　B. $\frac{8}{3}$　　C. $\frac{26}{3}$　　D. $-\frac{26}{3}$

解 由 $4x=-8$，得 $x=-2$，$\therefore 1+k=-2$，$\therefore k=-3$.

把 $k=-3$ 代入 $\frac{3k^2-1}{|k|}$ 中，得 $\frac{3k^2-1}{|k|}=\frac{3\times(-3)^2-1}{|-3|}=\frac{26}{3}$.

选择 C.

二、一元一次方程及解法

题 13 方程 $\frac{2x+a}{2}=4(x-1)$ 的解为 $x=3$，则 a 的值为(　　).

A. 2　　B. 22　　C. 10　　D. -2

解 解方程 $\frac{2x+a}{2}=4(x-1)$ 得：$x=\frac{8+a}{6}$.

$\because x=3$ 是方程的解，$\therefore \frac{8+a}{6}=3$，$\therefore a=10$. 故应选择 C.

题 14 若代数式 $5m+\frac{1}{4}$ 与 $5(m-\frac{1}{4})$ 的值互为相反数，则 m 的值是(　　).

A. 0　　B. $\frac{3}{20}$　　C. $\frac{1}{20}$　　D. $\frac{1}{10}$

解 $\because 5m+\frac{1}{4}$ 与 $5(m-\frac{1}{4})$ 互为相反数，

$\therefore 5m+\frac{1}{4}+5(m-\frac{1}{4})=0$,

$\therefore 5m+\frac{1}{4}+5m-\frac{5}{4}=0$，$\therefore 10m-1=0$，$\therefore m=\frac{1}{10}$.

选择 D.

题15 方程$\frac{x}{4}+\frac{x+1}{3}=\frac{7x+4}{12}$的解为(　　).

A. 0　　B. 无数多个解　　C. 无解　　D. 上述答案都不对

解 $\because \frac{x}{4}+\frac{x+1}{3}=\frac{3x+4x+4}{12}=\frac{7x+4}{12}$,

$\therefore \frac{7x+4}{12}=\frac{7x+4}{12}$是一个恒等式,

∴此方程有无数多个解. 故应选择 B.

题16 已知 $y=1$ 是方程 $2-\frac{1}{3}(m-y)=2y$ 的解,那么关于 x 的方程 $m(x-3)-2=m(2x-5)$的解是(　　).

A. $x=-10$　　B. $x=0$　　C. $x=\frac{4}{3}$　　D. 以上答案都不对

解 $y=1$ 是方程 $2-\frac{1}{3}(m-y)=2y$ 的解,$\therefore 2-\frac{1}{3}(m-1)=2\times1$,解关于 m 的方程,得 $m=1$,把 $m=1$ 代入 $m(x-3)-2=m(2x-5)$中,得 $x-5=2x-5$,解得 $x=0$. 故应选择 B.

题17 下列 x 的值是方程 $5x-1=\frac{x-1}{2}+13$ 的解是(　　).

A. $x=3$　　B. $x=-3$　　C. $x=\frac{1}{3}$　　D. $x=-\frac{1}{3}$

解 把 A、B、C、D 四个值分别代入方程 $5x-1=\frac{x-1}{2}+13$ 的左、右两边只有选项 A 使左=右,而其余 B、C、D 均不满足左=右. 故选择 A.

说明:判断一个值是否是某个方程的解,可有如下两种方法:(一)把这个未知数的值代入方程的两边,若使左=右,则是,否则不是;(二)可通过解方程求出未知数的值.

题18 如果单项式 $5a^2b^{3n-5}$和 $3b^{\frac{1}{2}(n-3)}a^{2m}$是同类项,则正确的是(　　).

A. $m=1$, $n=\frac{7}{5}$　　B. $m=-1$, $n=\frac{7}{5}$

C. $m=0$, $n=1$　　D. $m=0$, $n=\frac{7}{5}$

解 $\because 5a^2b^{3n-5}$和 $3b^{\frac{1}{2}(n-3)}a^{2m}$是同类项,则

$\begin{cases}2m=2,\\3n-5=\frac{1}{2}(n-3).\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\n=\frac{7}{5}.\end{cases}$故选择 A.

题19 解下列方程:

(1) $x-7+8x=9x-3-4x$,

(2) $10y+2(7y-2)=5(4y+3)+3y$.

解 (1)移项,得　$x+8x-9x+4x=7-3$,

合并同类项,得　$4x=4$,

方程两边同除以 4,得　$x=1$.

(2)去括号,得　$10y+14y-4=20y+15+3y$,

移项,得　$10y+14y-20y-3y=15+4$,

合并同类项,得　$y=19$.

题 20　解方程 $\frac{x+1}{2}-\frac{5+x}{6}=3-\frac{x-1}{3}$

解　去分母,得　$3(x+1)-(5+x)=18-2(x-1)$,

去括号,得　$3x+3-5-x=18-2x+2$,

移项,得　$3x-x+2x=18+2-3+5$,

合并同类项,得　$4x=22$,

方程两边同除以 4,得　$x=\frac{11}{2}$.

注意:(1)去分母时常数 3 也要乘以公分母 6;

(2)$-\frac{5+x}{6}$项去分母时,分子 $5+x$ 不要漏加小括号;

(3)去括号时,括号内各项都要与括号外面的数相乘,同时要注意括号内各项符号的变化;

(4)把方程中的某一项,从一边移到另一边一定要改变符号.

题 21　解方程:$\frac{0.2-x}{0.3}-1.5=\frac{1-3x}{2.5}$.

解　原方程可化为　$\frac{2-10x}{3}-\frac{3}{2}=\frac{2-6x}{5}$.

去分母,得　$10(2-10x)-45=6(2-6x)$,

去括号,得　$20-100x-45=12-36x$,

移项,得　$100x-36x=20-45-12$,

合并同类项,得　$64x=-37$,

$\therefore x=-\frac{37}{64}$.

注意:在本例这类方程的求解中,特别要分清是利用分数基本性质,化分母为整数,还是利用方程的同解原理去分母,二者不要混为一谈.

题 22　解方程:$2|x|-1=0$.

解　移项,得　$2|x|=1$,

方程两边都除以 2,得　$|x|=\frac{1}{2}$,

$\therefore x=\frac{1}{2}$或 $x=-\frac{1}{2}$.

说明:解含绝对值符号的方程,可先把绝对值内的式子连绝对值符号看作一个未知数解方程,然后,再解出未知数的值.

三、一元一次方程的应用

题23 甲、乙、丙三人，甲每分钟走 60 米，乙每分钟走 67.5 米，丙每分钟走 75 米，如果甲、乙两人在东村，丙在西村，三人同时相向而行，丙遇到乙后 10 分钟才遇到甲，求东、西两村的距离.

解法一 设东、西两村的距离为 x 米，根据题意，得

$$\frac{x}{60+75}=\frac{x}{67.5+75}+10,$$

解得 $x=25650$.

答：东、西两村距离为 25650 米.

解法二 设乙、丙相遇所用时间为 x 分钟，则甲、丙相遇所用的时间为 $(x+10)$ 分钟，根据题意，得

$(67.5+75)x=(60+75)(x+10)$. 解得 $x=180$.

所以东、西两村距离为 $(67.5+75)\times180=25650$（米）.

答：东、西两村距离为 25650 米.

题24 甲、乙两轮航行于 A、B 两地之间，由 A 到 B 航速每小时 35 千米，由 B 到 A 航速 25 千米，今甲轮由 A 地开往 B 地，乙轮由 B 地开往 A 地，甲轮先行 2 小时，两轮在距 B 地 120 千米处相遇，求两地的距离和相遇时甲轮航行的时间.

解 设 A、B 两地距离为 x 千米，由题意，得

$x-120=(\frac{120}{25}+2)\times35$，解得 $x=358$.

$\therefore$ 甲轮相遇时航行时间为 $\frac{358-120}{35}=6.8$（小时）.

答：两地相距 358 米，相遇时甲轮航行时间为 6.8 小时.

题25 一架飞机飞行于两城之间，顺风需要 5 小时 30 分钟，逆风时需 6 小时，已知风速是每小时 24 千米，求两城之间的距离.

解 设飞机的速度每小时 x 千米，由题意可得

$(x+24)\times5.5=(x-24)\times6$，解得 $x=552$.

$\therefore (x-24)\times6=(552-24)\times6=3168$.

答：两城之间的距离为 3168 千米.

题26 甲步行上午 6 时从 A 地出发于下午 5 时到达 B 地，乙骑自行车上午 10 时从 A 地出发，于下午 3 时到达 B 地，问乙在什么时间追上甲？

解 设乙出发后 x 小时追上甲，根据题意，得

$\frac{1}{5}x=\frac{1}{11}x+\frac{1}{11}\times 4$，解得 $x=3\frac{1}{3}$.

$\therefore 10+3\frac{1}{3}-12=1\frac{1}{3}$.

答：乙在下午1点20分追上甲.

题27 有两块合金，第一块含金90%，第二块含金80%，要得到含金82.5%的合金240克，每块应各取多少克？

解 设从第一块合金取 x 克，由题意得

$x\times 90\%+(240-x)\times 80\%=240\times 82.5\%$，

解得 $x=60$，$\therefore 240-x=180$.

答：第一块合金取60克，第二块合金取180克.

题28 硫酸1.2千克和水1.8千克合成稀溶液，硫酸0.9千克和水0.3千克混合成浓溶液，现在要合成硫酸和水各半的溶液1.4千克，问两种溶液各用多少千克？

解 设第二种溶液 x 千克，由题意得

$\frac{0.9}{0.9+0.3}\cdot x+(1.4-x)\times\frac{1.2}{1.2+1.8}=1.4\times 50\%$，

解得 $x=0.4$，$\therefore 1.4-x=1$.

答：第二种溶液0.4千克，第一种溶液1千克.

题29 某种酒精溶液里纯酒精与水的比是1∶2，现加进纯酒精120克后，配成浓度为75%的酒精溶液，问原有酒精溶液多少克？

解 设原溶液中含纯酒精 x 克，由题意得

$(x+2x+120)\times 75\%=x+120$，

解得 $x=24$.

原有酒精溶液 $x+2x=3x=3\times 24=72$ 克.

答：原有酒精溶液72克.

题30 用化肥给稻田施肥，如果每公顷用60千克，那么还差70千克；如果每公顷用50千克还多230千克，这块稻田有几公顷？共有化肥多少千克？

解 设稻田共 x 公顷，由题得

$60x-70=50x+230$，

解得 $x=30$. $50x+230=1500+230=1730$.

答：有稻田30公顷，共有化肥1730千克.

题31 一条环形跑道长400米，甲练习自行车，平均每分钟骑550米，乙练习赛跑，平均每分钟跑250米，两人同时从同地同向出发，经过多少分钟甲第一次追上乙？

解 设过 x 分钟甲第一次追上乙，由题意得

$550x-250x=400$，

解得 $x=\frac{4}{3}$.

答：经过$\frac{4}{3}$分钟甲第一次追上乙.

题32 今有甲、乙两桶，甲桶中贮酒精12千克，水18千克，乙桶中贮酒精9千克，水3千克，现从两桶中各取出多少千克，才能配制成酒精7千克与水7千克的混合物？

解 设取甲种溶液含酒精量为 x 千克，由题意得

$$\frac{30}{12}x+\frac{12}{9}(7-x)=14,$$

解得 $x=4$，$7-x=3$，$\therefore \frac{30}{12}x=10$，$\frac{12}{9}(7-x)=4$.

答：甲桶中取酒精溶液10千克，乙桶中取酒精溶液4千克.

题33 甲骑自行车从 A 地出发，以每小时12千米的速度驶向 B 地，经过15分钟后，乙骑自行车从 B 地出发，以每小时14千米的速度驶向 A 地，两人相遇时，乙已超过中点1.5千米，求 A、B 两地距离.

解 设两地相距 x 千米，由题意得

$$\frac{\frac{x}{2}-1.5}{12}-\frac{15}{60}=\frac{\frac{x}{2}+1.5}{14},$$

解得 $x=81$.

答：两地相距81千米.

题34 某同学沿着电车线路行走，见到每隔6分钟有一辆电车从他身后过来，而每隔2分钟，有一辆电车由对面开来. 如果该同学和电车的速度始终是均匀的，问每隔几分钟电车在起点站开出一辆电车？

解 设每隔 x 分钟有一辆电车在起点站开出，由题意得

$$\frac{6-x}{6}=\frac{x-2}{2},$$

解得 $x=3$.

答：每隔3分钟有一辆电车开出.

题35 甲、乙两列车，甲车长276米，乙车长300米，在平行的轨道上相向而行，已知两车自车头相遇到车尾相离，共需18秒，甲、乙两车速度之比是5∶3，求两车速度.

解 设甲车速度为 $5x$ 米/秒，则乙车速度为 $3x$ 米/秒，，由题意得

$$5x\cdot 18+3x\cdot 18=276+300,$$

解得 $x=4$，则 $5x=20$，$3x=12$.

答：甲车的速度为20米/秒，乙车的速度为12米/秒.

题36 某试卷由26道题组成，答对一题得8分，答错一题扣去5分，今有一考生虽然回答了全部26道题，但所得总分为零，问他正确解答了多少道题？

解 设该学生正确解答 x 道题，由题意得

$8x-5(26-x)=0$，

解得 $x=10$.

答:正确解答了 10 道题.

题37 一个六位数,如果它的前三位数与后三位数的数字完全相同,顺序也完全相同. 求证:7、11、13 必为此六位数的约数.

解 设该六位数为 $100000x+10000y+1000z+100x+10y+z$

即为:$1001(100x+10y+z)$.

∵1001 分别能被 7、11、13 整除,故该六位数也分别能被 7、11、13 整除.

题38 一项工程,甲队独做 10 小时完成,乙队独做 15 小时完成,丙队独做 20 小时完成,开始时三队合做,中途甲队另有任务,由乙、丙两队完成,从开始到工程完成共用了 6 小时,问甲队实际做了几小时?

解 设甲队实际工作了 x 小时,则三队合作的工作量是$(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20})x$,乙、丙合做的工作量是$(\frac{1}{15}+\frac{1}{20})(6-x)$,由题意得

$(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20})x+(\frac{1}{15}+\frac{1}{20})(6-x)=1$,

解得 $x=3$.

答:甲队实际工作了 3 小时.

题39 现有含盐 15%的盐水 400 克,张老师要求将盐水浓度变为 12%. 某同学由于计算错误,加进了 110 克的水,请你通过列方程计算说明这位同学加水加多了,并指出多加了多少克的水.

解 设需要加水 x 克,可将浓度变为 12%,根据题意,得

$(400+x)\times 12\%=400\times 15\%$,

解得 $x=100$, $110-100=10$.

答:通过计算可知这位同学多加了 10 克水.

题40 解答下列各问:

(1)据《北京日报》2000 年 5 月 16 日报道:北京市人均水资源占有量只有 300 立方米,仅是全国人均占有量的$\frac{1}{8}$,世界人均占有量的$\frac{1}{32}$. 问全国人均水资源占有量是多少立方米? 世界人均水资源占有量是多少立方米?

(2)北京市一年漏掉的水相当于新建一个自来水厂,据不完全统计,全市至少有 6×10^5 个水龙头、2×10^5 个抽水马桶漏水. 如果一个关不紧的水龙头,一个月能漏掉 a 立方米水;一个漏水马桶,一个月漏掉 b 立方米水,那么一个月造成的水流失量至少是多少立方米(用含 a、b 的代数式表示)?

(3)水源透支令人担忧,节约用水迫在眉睫. 针对居民用水浪费现象,北京市将制定居民用水标准,规定三口之家楼房每月标准用水量,超标部分加价收费,假设不超标部分每立方米水费 1.3 元,超标部分每立方米水费 2.9 元,某住楼房的三口之家某月用水 12 立

方米，交水费 22 元，请你通过列方程求出北京市规定三口之家楼房每月标准用水量为多少立方米？

解 (1)$300\div\frac{1}{8}=2400$(立方米)，$300\div\frac{1}{32}=9600$(立方米).

答：全国人均水资源占有量是 2400 立方米，世界人均水资源占有量是 9600 立方米.

(2)一个月造成的水流失量至少为$(6\times10^5a+2\times10^5b)$立方米.

(3)设北京市规定三口之家住楼房用户每月标准用水量为 x 立方米，依题意，得 $1.3x+2.9(12-x)=22$，解得 $x=8$.

答：北京市规定三口之家住楼房每月标准用水量为 8 立方米.

第四章　一元一次不等式

题1　试述不等式及一元一次不等式的概念．

答　(1)表示不相等关系的式子叫做不等式．

(2)只含有一个未知数，且未知数的次数是一次的不等式叫做一元一次不等式．

题2　试述不等式的同解原理．

答　(1)不等式的两边都加上(或都减去)同一个数或整式，不等号方向不变；

(2)不等式的两边都乘以(或都除以)同一个正数或表示正数的字母时，不等号的方向不变；

(3)不等式的两边都乘以(或都除以)同一个负数或表示负数的字母时，不等号的方向改变．

题3　简述什么是不等式的解和解集．

答　(1)使不等式成立的每一个未知数的值叫做不等式的解；

(2)不等式解的全体叫做不等式的解集．

(3)解不等式就是求出不等式解集的过程．

题4　下列不等式中一定成立的是(　　)．

A. $4a>3a$　　　　B. $3-x<4-x$

C. $-a>-2a$　　　　D. $\frac{3}{a}>\frac{2}{a}$

解　根据不等式的性质，若 $a<0$，A、C、D 三个选项都不正确．故选择 B．

题5　若 $x<-4$，则下列不等式成立的是(　　)．

A. $x^2>-4x$　　　　B. $x^2\geqslant-4x$

C. $x^2<-4x$　　　　D. $x^2\leqslant-4x$

解　根据不等式的基本性质，∵ $x<-4<0$，∴B、C、D 三个选项都不正确．故选择 A．

题6　如果 $b>a>0$，那么(　　)．

A. $-\frac{1}{a}>-\frac{1}{b}$　　　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

C. $-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$　　　　D. $-b>-a$

解　$\because 0<a<b$，$\therefore \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$，$\therefore -\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}$. 应选择C.

题7　解不等式：

(1)$2[x-(x-1)+2]<1-x$；　　(2)$\frac{5x+7}{5}+\frac{2x}{7}>\frac{3x+2}{3}+\frac{x+7}{5}$

解　(1)去括号，得 $2[x-x+1+2]<1-x$，

即：$6<1-x$，$\therefore x<-5$.

(2)去分母，得 $21(5x+7)+15\times 2x>35(3x+2)+21(x+7)$，

去括号，得 $105x+147+30x>105x+70+21x+147$，

移项、合并同类项，得 $9x>70$，

$\therefore x>\frac{70}{9}$.

题8　解不等式，并把它的解集在数轴上表示出来：

(1)$2(x+1)-3(x+2)<0$；　　(2)$2[x-3(x-1)]\geqslant 5x$；

(3)$\frac{2x-1}{3}-\frac{2x+3}{10}>\frac{3x-2}{5}$；　　(4)$x-5+\frac{x-11}{3}\leqslant\frac{2x+3}{2}-\frac{x}{3}-\frac{8}{3}$.

解　(1)去括号，得 $2x+2-3x-6<0$，

合并同类项，得 $-x-4<0$，

$\therefore x>-4$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下：

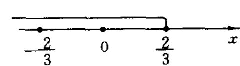
(2)去括号，得 $2(x-3x+3)\geqslant 5x$，

合并，得 $2(3-2x)\geqslant 5x$，

整理，得 $9x\leqslant 6$，

$\therefore x\leqslant\frac{2}{3}$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下：



(3)去分母，得 $10(2x-1)-3(2x+3)>6(3x-2)$，

去括号，得 $20x-10-6x-9>18x-12$，

移项，合并同类项，得 $-4x>7$，

$\therefore x<-\frac{7}{4}$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下：

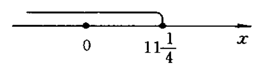
(4)去分母,得 $6x-30+2(x-11)\leqslant 3(2x+3)-2x-16$,

去括号,得 $6x-30+2x-22\leqslant 6x+9-2x-16$,

移项,合并同类项,得 $4x\leqslant 45$,

$\therefore x\leqslant \frac{45}{4}$.

这个不等式的解集在数轴上表示如下:



题 9 已知关于 x 的方程 $3x-(2a-3)=5x+(3a+6)$ 的解是负数,求 a 的取值范围.

解 由原方程得 $3x-2a+3=5x+3a+6$,

整理,得 $2x=-(5a+3)$,

$\therefore x=-\frac{5a+3}{2}$.

$\therefore$ 要使解是负数,$\therefore -\frac{5a+3}{2}<0$,即 $5a+3>0$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $a>-\frac{3}{5}$.

题 10 已知 $2|x-12|+(3x-y-m)^2=0$,

(1)当 m 为何值时,$y\geqslant 0$?

(2)当 m 为何值时,$y<10$?

解 $\because 2|x-12|+(3x-y-m)^2=0$ 而 $|x-12|\geqslant 0,(3x-y-m)^2\geqslant 0$,

$\therefore \begin{cases}x-12=0,\\3x-y-m=0;\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=12,\\y=36-m.\end{cases}$

(1)若 $y\geqslant 0$,即 $36-m\geqslant 0$,$\therefore m\leqslant 36$.

(2)若 $y<10$,则需 $36-m<10$,$\therefore m>26$.

题 11 已知 $0\leqslant a\leqslant 15$,且 $a\leqslant x\leqslant 15$,那么,当 x 取什么数时,式子 $|x-a|+|x-15|+|x-a-15|$ 的值最小?

解 $\because 0\leqslant a\leqslant 15$,且 $a\leqslant x\leqslant 15$,$\therefore a+15\geqslant 15$,$\therefore x-(a+15)\leqslant 0$,

又 $a\leqslant x\leqslant 15$,$\therefore x-a\geqslant 0,x-15\leqslant 0$,

$\therefore |x-a|+|x-15|+|x-a+15|$

$=(x-a)+(15-x)+(a+15-x)$

$=x-a+15-x+a+15-x$

$=30-x$.

∴要使上式值最小，只需 x 最大，而 $a\leqslant x\leqslant 15$.

∴当 $x=15$ 时，上式最小值为 15.

题12 求方程 $19x+9y=100$ 的正整数解.

解 由 $19x+9y=100$，得 $y=\frac{100}{9}-\frac{19}{9}x$，

∴$y=11-2x+\frac{1-x}{9}$. ①

∵$y,11,-2x$，均为正整数，

∴$\frac{1-x}{9}$一定是整数，可设$\frac{1-x}{9}=k$（k 为整数），即 $x=1-9k$，代入①得：

$y=11+k-2(1-9k)=9+19k$.

∵$x>0$，∴$1-9k>0$，∴$k<\frac{1}{9}$.

∵$y>0$，∴$9+19k>0$，即 $k>-\frac{9}{19}$.

故得$-\frac{9}{19}<k<\frac{1}{9}$，而 k 是整数，$k=0$.

∴$x=1$，$y=9$，即为所求方程 $19x+9y=100$ 的正整数解.

题13 有一个两位数，其个位数字比十位数字大 2，已知这个两位数大于 20 而小于 40，求这个两位数.

解 设十位数字为 x，由题意可得 $20<10x+(x+2)<40$

得 $20<11x+2<40$，即 $18<11x<38$，

∴$\frac{18}{11}<x<\frac{38}{11}$.

∵x 为整数，∴$x=2$ 或 $x=3$，∴所求的两位数为 24，35.

题14 一种农药 40 千克，含药率 15%，现在要用含药率较高的同样的农药 50 千克和它混合，使混合后的含药率在 25%与 30%之间（不含 25%和 30%），求所用的农药的含药率的范围.

解 设所用农药含药率为 $x\%$，由题意得

$90\times\frac{25}{100}<40\times\frac{15}{100}+50\times\frac{x}{100}<90\times\frac{30}{100}$，

解得 $33<x<42$.

答：含药率的范围在 33%和 42%之间.

题15 某宾馆一楼客房比二楼少 5 间，某旅游团有 48 人，若全安排在一楼，每间 4 人，房间不够，每间 5 人，有房间没有住满，又若安排住二楼，每间 3 人房间不够，每间 4 人，又有房间没有住满，问宾馆一楼有客房几间？

解 设一楼有 x 间客房，则二楼有$(x+5)$间客房.

根据题意，有 $5x>48$ 且 $4x<48$，得 $9\frac{3}{5}<x<12$

又有 $3(x+5)<48$，且 $4(x+5)>48$，得 $7<x<11$，

$\therefore x=10$.

答：一楼有10间客房.

题16 某企业为了适应市场经济的需要，决定进行人员结构调整，该企业现有生产性行业人员100人，平均每人全年可创造产值 a 元，现要从中分流出 x 人去从事服务性行业工作，若分流后，继续从事生产性行业人员平均每人全年创造产值可增加20%，而分流从事服务性行业的人员平均每人全年可创造产值 $3.5a$ 元. 如果要保证分流后该厂生产性行业的全年总产值不少于分流前生产性行业的全年总产值，而服务性行业的全年总产值不少于分流前生产性行业的全年总产值的一半，试确定分流后从事服务性行业的人数.

解 由题意，得 $\begin{cases}(100-x)(1+20\%)a\geqslant 100a,\\ 3.5ax\geqslant \dfrac{1}{2}\times 100a.\end{cases}$

即 $\begin{cases}1.2(100-x)\geqslant 100,\\ 3.5x\geqslant 50.\end{cases}$

解得 $\dfrac{100}{7}\leqslant x\leqslant \dfrac{50}{3}$，

$\because x$ 为正整数，

$\therefore x$ 取值为15或16.

答：从事服务性行业的人员为15人或16人.

第五章　二元一次方程组

一、二元一次方程和方程组

题 1　简述有关二元一次方程及其方程组的概念．

答　(1)含有两个未知数，且含未知数的项的次数是一次的方程，叫二元一次方程.

(2)由含有两个相同未知数的两个二元一次方程组成的方程组叫二元一次方程组.

题 2　与已知二元一次方程 $5x-y=2$ 组成的方程组有无数个解的方程是(　　).

A. $10x+2y=4$　　B. $4x-y=7$

C. $20x-4y=3$　　D. $15x-3y=6$

解　$\because 5x-y=2$，$\therefore$ 在这个方程的两边都乘以 3 得 $15x-3y=6$.

选择 D.

说明：二元一次方程组有无数个解的条件是组成方程组的两个方程的对应项的系数成比例.

题 3　在二元一次方程组 $\begin{cases} mx+3y=9, \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 中，若这个方程组没有解，则(　　).

A. $m=9$　　B. $m=6$

C. $m=-6$　　D. $m=-9$

解　若 $\begin{cases} mx+3y=9, \\ 2x-y=1 \end{cases}$ 没有解，需满足 $\frac{m}{2}=\frac{3}{-1}\neq\frac{9}{1}$，$\therefore m=-6$.

选择 C.

说明：若一个二元一次方程组无解，需满足两个方程中 x 和 y 项的对应系数成比例，且该比不等于两个常数项比.

如对于二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 若无解，需满足 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$.

题 4　若 $5x^2y^m$ 与 $4x^{n+m-1}y$ 是同类项，则 m^2-n 的值为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. -3　　D. 以上答案都不对

解 根据同类项定义可知：$\begin{cases}n+m-1=2,\\m=1;\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\n=2.\end{cases}$

$\therefore m^2-n=1-2=-1$，选择 B.

题5 方程 $2x+y=9$ 在正整数范围内的解有（　　）.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解 由 $2x+y=9$，得 $y=9-2x$，要使 y 为正整数，需满足 $9-2x\geqslant1$，

$\therefore 2x\leqslant8$，$\therefore x\leqslant4$，$\therefore$在正整数范围内，方程 $2x+y=9$ 的解有 4 个，

即$\begin{cases}x=1,\\y=7;\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=5;\end{cases}\begin{cases}x=3,\\y=3;\end{cases}\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$故选择 D.

题6 在方程组$\begin{cases}ax-3y=5,\\2x+by=1\end{cases}$里，如果$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-1\end{cases}$是它的一个解，那么 $3(a-b)-a^2$ 的值为（　　）.

A. 4　　B. 2　　C. -4　　D. -2

解 $\because\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-1\end{cases}$是$\begin{cases}ax-3y=5,\\2x+by=1\end{cases}$的解，$\therefore\begin{cases}\frac{1}{2}a+3=5,\\2\times\frac{1}{2}-b=1;\end{cases}\therefore\begin{cases}a=4,\\b=0.\end{cases}$

$\therefore 3(a-b)-a^2=3(4-0)-16=-4$. 故应选择 C.

题7 在下列方程组中，只有一个解的是（　　）.

A. $\begin{cases}x+y=1\\3x+3y=0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x+y=0\\3x+3y=-2\end{cases}$

C. $\begin{cases}x+y=1\\3x-3y=4\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x+y=1\\3x+3y=3\end{cases}$

解 由 A 得$\begin{cases}x+y=1,\\x+y=0\end{cases}$无解. 而同样 B 也无解.

由 D 得$\begin{cases}x+y=1,\\3(x+y)=3\end{cases}$有无数多个解. $\therefore$选择 C.

二、二元一次方程组的解法

题8 若满足方程组$\begin{cases}3x+5y=a+2,\\2x+3y=a\end{cases}$的 x 与 y 之和是 2，则 a 的值是（　　）.

A. -4　　B. 4　　C. 0　　D. 不确定

解 由$\begin{cases}3x+5y=a+2,\\2x+3y=a.\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2a-6,\\y=4-a.\end{cases}$

$\because x+y=2$，$\therefore(2a-6)+(4-a)=2$，即$a-2=2$.

$\therefore a=4$. 所以应选择B.

题9 若关于x、y的方程$3x-2ny=m-n$有一个解是$\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$此时，$m$比$n$的一半大1，则$m,n$的值分别是(　　).

A. $\frac{2}{7},-\frac{10}{7}$　　B. $-\frac{2}{7},-\frac{10}{7}$

C. $0,-2$　　D. $0,-\frac{1}{2}$

解 由题意得$\begin{cases}6+2n=m-n,\\m=\frac{1}{2}n+1;\end{cases}$ 即$\begin{cases}m-3n=6,\\2m-n=2.\end{cases}$

解关于m、n的二元一次方程组得$\begin{cases}m=0,\\n=-2.\end{cases}$故选择C.

题10 若$|(3a-b-4)x|+|(4a+b-3)y|=0$成立，且$xy\neq0$，则$|2a|-3|b|$的值是(　　).

A. 5　　B. 0　　C. -1　　D. 1

解 $\because|(3a-b-4)x|+|(4a+b-3)y|=0$且$xy\neq0$

$\therefore\begin{cases}3a-b-4=0,\\4a+b-3=0.\end{cases}$解关于$a$、$b$的方程组得$\begin{cases}a=1,\\b=-1.\end{cases}$

$\therefore|2a|-3|b|=2-3=-1$. 所以应选择C.

题11 要使关于x的方程$(2b-4)x=1$有惟一解，并且关于x,y的方程组$\begin{cases}ax-y=-1,\\3x=b-2y\end{cases}$有惟一解的条件是(　　).

A. $a\neq\frac{3}{2},b\neq2$　　B. $a\neq-\frac{2}{3},b\neq2$

C. $a=\frac{2}{3},b\neq2$　　D. $a\neq-\frac{3}{2},b\neq2$

解 要使$(2b-4)x=1$有惟一解，则需满足$2b-4\neq0$，即$b\neq2$.

要使$\begin{cases}ax-y=-1,\\3x+2y=b\end{cases}$有惟一解，需满足$\frac{a}{3}\neq-\frac{1}{2}$，$\therefore a\neq-\frac{3}{2}$

选择D.

题12 使得$3x-2y=|a|$成立的x,y的值，也满足方程$(2x+y-1)^2+(x-3y)^2=0$，其中$|a|+a=0$，则a的值是(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 1或-1　　D. 0

解 由$(2x+y-1)^2+(x-3y)^2=0$,得$\begin{cases}2x+y-1=0,\\x-3y=0.\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x=\dfrac{3}{7},\\y=\dfrac{1}{7}.\end{cases}$

由题意得$3\times\dfrac{3}{7}-2\times\dfrac{1}{7}=|a|$,$\therefore |a|=1$,又$|a|+a=0$,$\therefore a=-1$.

选择A.

题13 用代入法解方程组:

(1)$\begin{cases}x-2y=-1,\\x:2=y:3;\end{cases}$ (2)$\begin{cases}\dfrac{m-1}{3}=\dfrac{2n+3}{4},\\4m-3n=7.\end{cases}$

解 (1)原方程组变为$\begin{cases}x=2y-1, & ①\\3x=2y. & ②\end{cases}$

把①代入②,得$3(2y-1)=2y$. ③

由③解得$y=\dfrac{3}{4}$,把$y=\dfrac{3}{4}$代入①得$x=2\times\dfrac{3}{4}-1=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

(2)原方程组可变为$\begin{cases}4m-6n=13, & ①\\4m-3n=7. & ②\end{cases}$

由①得$m=\dfrac{13+6n}{4}$代入②得

$6n+13-3n=7$,解得$n=-2$代入①得$m=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore\begin{cases}m=\dfrac{1}{4},\\n=-2.\end{cases}$

题14 用加减法解方程组:

(1)$\begin{cases}a=|b|+2,\\a=6-3|b|;\end{cases}$ (2)$\begin{cases}(a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2),\\(a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2),(ab\neq0).\end{cases}$

解 (1)$\begin{cases}a=|b|+2 & ①\\a=6-3|b| & ②\end{cases}$

①-②得$4|b|-4=0$,

$\therefore |b|=1$,$\therefore b=\pm1$,代入①得$a=3$.

$\therefore\begin{cases}a=3,\\b=1;\end{cases}$或$\begin{cases}a=3,\\b=-1.\end{cases}$

(2)原方程组可变为$\begin{cases}a(x+y)-b(x-y)=2(a^2-b^2), & ①\\a(x+y)+b(x-y)=2(a^2+b^2). & ②\end{cases}$

①+②,得:$2a(x+y)=4a^2$,

$\because ab\neq 0$, $\therefore x+y=2a$. ③

把③代入①,得 $2a^2-b(x-y)=2a^2-2b^2$,

$\therefore x-y=2b$. ④

$\therefore$ 由③,④可得 $\begin{cases} x+y=2a, & ⑤ \\ x-y=2b. & ⑥ \end{cases}$

⑤+⑥,得 $2x=2(a+b)$.

$\therefore x=a+b$, 代入⑤,得 $y=a-b$.

$\therefore \begin{cases} x=a+b, \\ y=a-b. \end{cases}$

题 15 k 为哪些负整数值时,方程组 $\begin{cases} 3x+2y=k+1, \\ 4x+3y=k-1 \end{cases}$ 的解适合于 $x>y$.

解 $\begin{cases} 3x+2y=k+1, & ① \\ 4x+3y=k-1. & ② \end{cases}$

①×3,得 $9x+6y=3k+3$, ③

②×2,得 $8x+6y=2k-2$. ④

③-④,得 $x=k+5$ 代入①,得

$3(k+5)+2y=k+1$,解得:$y=-k-7$.

$\therefore \begin{cases} x=k+5, \\ y=-k-7. \end{cases}$

要使 $x>y$,需满足 $k+5>-k-7$,解这个不等式得 $k>-6$.

$\therefore$ 当 k 取负整数是 $-5,-4,-3,-2,-1$ 时,方程组的解适合于 $x>y$.

题 16 在方程组 $\begin{cases} x+y=m, \\ 2x-y=6 \end{cases}$ 中,已知 $x>0$, $y<0$,求 m 的取值范围.

解 解方程组 $\begin{cases} x+y=m, \\ 2x-y=6, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{6+m}{3}, \\ y=\dfrac{2}{3}m-2. \end{cases}$ $\because x>0$, $y<0$,

$\therefore \begin{cases} \dfrac{6+m}{3}>0, \\ \dfrac{2}{3}m-2<0. \end{cases}$ 解这个不等式组,得 $\begin{cases} m>-6, \\ m<3, \end{cases}$ $\therefore -6<m<3$.

题 17 满足方程组 $\begin{cases} 3x+5y=m+2, \\ 2x+3y=m \end{cases}$ 的 x、y 的值的和等于 2,

求 m^2-2m+1 的值.

解 $\begin{cases} 3x+5y=m+2, & ① \\ 2x+3y=m. & ② \end{cases}$

①×2-②×3,得 $y=4-m$ 代入②,得

$2x+3(4-m)=m$,解得 $x=2m-6$.

又∵$x+y=2$,∴$(4-m)+(2m-6)=2$,∴$m=4$.

把 $m=4$ 代入 m^2-2m+1 中,得 $m^2-2m+1=16-8+1=9$.

三、三元一次方程组的解法

题 18 三元一次方程组$\begin{cases}x+y=3,\\y+z=5,\\z+x=4\end{cases}$的解是(　　).

A. $\begin{cases}x=0\\y=2\\z=3\end{cases}$　B. $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$　C. $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=3\end{cases}$　D. $\begin{cases}x=3\\y=1\\z=1\end{cases}$

解 $\begin{cases}x+y=3, & ①\\y+z=5, & ②\\z+x=4. & ③\end{cases}$

①+②+③,得 $x+y+z=6$.　④

④-①,得 $z=3$,

④-②,得 $x=1$,

④-③,得 $y=2$,∴$\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3.\end{cases}$

选择 B.

题 19 解方程组

(1)$\begin{cases}x+y+z=6,\\y:z=2:3,\\3x-z=0;\end{cases}$　(2)$\begin{cases}2y_1+3y_2-4y_3=-7,\\\dfrac{y_1-4y_2}{3}=\dfrac{2y_2+3y_3}{2}=2.\end{cases}$

解 (1)原方程即为$\begin{cases}x+y+z=6, & ①\\y=\dfrac{2z}{3}, & ②\\x=\dfrac{1}{3}z. & ③\end{cases}$

把②,③代入①得,$\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}z+z=6$,

∴$z=3$,分别代入②,③得 $y=2$,$x=1$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=2,\\z=3.\end{cases}$

(2)原方程组可变为$\begin{cases}2y_1+3y_2-4y_3=-7, & ①\\y_1=6+4y_2, & ②\\y_3=\dfrac{4-2y_2}{3}. & ③\end{cases}$

把②,③都代入①,得:$12+8y_2+3y_2-\frac{4}{3}(4-2y_2)=-7$.

解关于y_2的方程,得$y_2=-1$,代入②和③得,$y_1=2$,$y_3=2$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}y_1=2,\\y_2=-1,\\y_3=2.\end{cases}$

题20 要使下列三个方程同时成立,求常数a的值.

$5x+3y=4a$, ①

$6x-2y=9a$, ②

$4x-5y=8a-3$. ③

解 由①,②得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{4}a,\\y=-\dfrac{3}{4}a;\end{cases}$把$x$、$y$值同时代入③得

$5a+\frac{15}{4}a=8a-3$,∴$a=-4$.

说明:此题可把三个方程变成含有三个未知数x、y、a的方程组去解.

四、一次方程组的应用

题21 某水利工地派48人去挖土和运土,如果每人平均挖土4立方米或运土2立方米,那么应该怎样分配挖土和运土的人数,正好能够使挖出的土及时运走?

解 设x人挖土,y人运土,由题意得

$\begin{cases}x+y=48,\\4x=2y.\end{cases}$

解这个二元一次方程组,得$\begin{cases}x=16,\\y=32.\end{cases}$

答:应分配16人挖土,32人运土.

题22 A、B两人分别从相距20千米的甲、乙两地相向而行，两小时后两人在途中相遇，相遇后A就返回甲地，B仍向甲地前进，A回到甲地时，B离甲地还有2千米，求A、B两人的速度.

解 设A、B两人分别以每小时x千米和y千米前进，

由题意，得$\begin{cases}2x+2y=20,\\2x-2y=2.\end{cases}$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=5.5,\\y=4.5.\end{cases}$

答：A、B两人的速度分别是每小时5.5千米和4.5千米.

题23 第一个容器有49升水，第二个容器有56升水，如果将第二个容器的水倒满第一个容器，那么第二个容器剩下的水是这个容器容量的$\frac{1}{2}$；如果将第一个容器的水倒满第二个容器，那么第一容器剩下的水是这个容器容量的$\frac{1}{3}$，求这两个容器的容量.

解 设第一容器的容量为x升，第二容器的容量为y升，

由题意，得$\begin{cases}56-(x-49)=\frac{1}{2}y,\\49-(y-56)=\frac{1}{3}x.\end{cases}$

解之得$\begin{cases}x=63,\\y=84.\end{cases}$

答：两个容器的容量分别为63升和84升.

题24 现有同一农药配制的甲、乙两种不同浓度的溶液，若从甲种中取2100克，乙种中取700克，则混合而成的农药溶液的浓度为3%. 若从甲种中取900克，乙种中取2700克，则混合而成的农药溶液的浓度为5%. 求甲、乙两种农药溶液的浓度.

解 设甲种溶液的浓度为$x\%$，乙种溶液的浓度为$y\%$，由题意得：

$$\begin{cases}2100\times x\%+700\times y\%=(2100+700)\times 3\%,\\900\times x\%+2700\times y\%=(900+2700)\times 5\%.\end{cases}$$

上述方程组变形得：

$$\begin{cases}3x+y=12,\\x+3y=20.\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=2,\\y=6.\end{cases}$

答：甲种溶液的浓度为2%，乙种溶液的浓度为6%.

题25 一个两位数的十位数字与个位数字的和是7，如果这个两位数加上45，那么恰好成为个位数字与十位数字对调后组成的两位数，求这个两位数.

解 设这个两位数的十位数字x，个位数字为y，由题意得

$$\begin{cases}x+y=7,\\10x+y+45=10y+x.\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases}x=1,\\y=6.\end{cases}$

∴这个两位数为 $10x+y=16$.

答：这个两位数为 16.

题 26 从甲地到乙地，水路比公路近 40 千米，上午 10 时，一只轮船从甲地驶往乙地，下午 1 时，一辆汽车从甲地驶往乙地，它们同时到达乙地，轮船的速度是每小时 24 千米，汽车的速度每小时 40 千米，求从甲地到乙地的水路和公路各多长？

解 设水路长 x 千米，公路长 y 千米，由题意得

$$\begin{cases}y-x=40,\\\dfrac{x}{24}-\dfrac{y}{40}=3.\end{cases}$$

解这个方程组得$\begin{cases}x=240,\\y=280.\end{cases}$

答：水路长 240 千米，公路长 280 千米.

题 27 某地的 A、B 两个学校共录取考生 150 名，而报考两校的人数比两个学校规定录取人数之和的 20 倍还多 80 人，与上一年相比，报考两校人数增加 12%，报考 A 校的增加 6%，报考 B 校的增加 17%，问今年报考 A、B 两校的各是多少人？

解 设今年报考 A、B 两校人数各是 x 人和 y 人，由题意得

$$\begin{cases}x+y=150\times20+80,\\\dfrac{100}{106}x+\dfrac{100}{117}y=\dfrac{100}{112}(x+y).\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x=1325,\\y=1755.\end{cases}$

答：今年报考 A 校 1325 人，报考 B 校 1755 人.

题 28 某一铁路桥长 1000 米，现有一列火车从桥上通过，测得火车从开始上桥到完全过桥共用 1 分钟，整列火车完全在桥上时间共 40 秒，求火车的速度和长度.

解 设速度每分钟 x 米，车长为 y 米.

由题意得$\begin{cases}x=1000+y,\\\dfrac{40}{60}x=1000-y.\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1200,\\y=200.\end{cases}$

答：火车速度每分钟 1200 米，车长为 200 米.

题 29 甲骑自行车从某城出发 2 小时后，乙步行从同路赶来，3 小时后两人相距 16

千米，此时乙继续前进追赶，甲在原地休息 $2\frac{2}{3}$ 小时后从原地返回，又经过 1 小时甲、乙两人相遇 C 点. 问 C 地离某城距离是多少？

解 设甲每小时走 x 千米，乙每小时 y 千米，由题意得

$$\begin{cases}5x-3y=16,\\3y+\frac{8}{3}y+y+x=5x.\end{cases}$$

解得 $y=3, x=5$.

所以 C 点离某城距离为 $3y+\frac{8}{3}y+y=20$（千米）.

答：C 地离某城 20 千米.

题 30 父子两人，已知 10 年前父亲年龄是儿子年龄的 3 倍，现在父亲年龄是儿子年龄的 2 倍，问父子现在年龄各是多少岁？

解 设父亲现在年龄 x 岁，儿子现在年龄是 y 岁，根据题意得：

$$\begin{cases}x=2y,\\x-10=3(y-10).\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=40,\\y=20.\end{cases}$

答：父子现在年龄分别是 40 岁和 20 岁.

题 31 甲、乙、丙三个容器盛有浓度未知的食盐水，若从甲、乙、丙中各取出重量相等的食盐水，将它们混合后就成为浓度为 10% 的食盐水，若从甲和乙中按重量之比为 2∶3 取，混合后就成为浓度为 7% 的食盐水，从乙和丙中按重量之比为 3∶2 取，混合后就成为 9% 的食盐水，求甲、乙、丙食盐水的浓度？

解 设甲溶液的浓度为 $x\%$，乙溶液的浓度为 $y\%$，丙溶液的浓度为 $z\%$. 根据题意，得

$$\begin{cases}x\%+y\%+z\%=3\times10\%,\\2\times x\%+3\times y\%=(2+3)\times7\%,\\3\times y\%+2\times z\%=(2+3)\times9\%.\end{cases}$$

方程组变形为 $\begin{cases}x+y+z=30,\\2x+3y=35,\\3y+2z=45.\end{cases}$

解之得 $\begin{cases}x=10,\\y=5,\\z=15.\end{cases}$

答：甲、乙、丙三种溶液浓度分别为 10%，5%，15%.

题 32 某人有 A、B、C 三个大桶，它们大小是这样的，如果用满的 A 桶灌满 C 桶，A

桶还剩$\frac{1}{5}$，用满的B桶灌满C桶，B桶还剩$\frac{1}{2}$；若用满的C桶灌入A、B桶时，就需要两个满的C桶，还差9个小桶才能灌满，问三个大桶的容积各是多少？

解 设三个大桶A、B、C的容积分别为a、b、c个小桶的容积，由题得

$$\begin{cases} c=\frac{4}{5}a, \\ c=\frac{1}{2}b, \\ a+b=2c+9. \end{cases}$$ 解这个方程组得 $$\begin{cases} a=9, \\ b=14.4, \\ c=7.2. \end{cases}$$

答：三个大桶的容积分别是9，14.4，7.2.

题33 某工程由甲、乙两队合做6天完成，厂家需付甲、乙两队共8700元；乙、丙两队合做10天完成，厂家需付乙、丙两队共9500元；甲、丙两队合做5天完成全部工作的$\frac{2}{3}$，厂家需付甲、丙两队共5500元.

(1)求甲、乙、丙各队单独完成全部工程各需多少天？

(2)若工期要求不超过15天完成全部工程，问可用哪队单独完成此项工程花钱最少？请说明理由.

解 (1)设甲队单独做x天完成，乙队单独做y天完成，丙队单独做z天完成，则

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}. \end{cases}$$

解方程组，得$\begin{cases} x=10, \\ y=15, \\ z=30. \end{cases}$

(2)设甲队做一天应付给a元，乙队做一天应付给b元，丙队做一天应付给c元，则有

$$\begin{cases} 6(a+b)=8700, \\ 10(b+c)=9500, \\ 5(a+c)=5500. \end{cases}$$

解方程组，得$\begin{cases} a=800, \\ b=650, \\ c=300. \end{cases}$

$\because 10a=8000$(元)，$15b=9750$(元)，

$\therefore$由甲队单独完成此工程花钱最少.

答：(1)甲队单独做10天完成，乙队单独做15天完成，丙队单独做30天完成. (2)由甲队单独完成此工程花钱最少.

第六章　整式的乘除

一、同底数幂的运算

题1　试述同底数幂的运算法则．

答　(1)同底数的幂相乘，底数不变，指数相加．

(2)同底数的幂相除，底数不变，指数相减．

(3)幂的乘方，底数不变，指数相乘．

(4)积的乘方，等于每个因数分别乘方．

题2　x^{3m+1}写成(　　)．

A. $(x^3)^{m+1}$　　B. $(x^m)^{3+1}$　　C. $x\cdot x^{3m}$　　D. $(x^m)^{2m+1}$

解　$\because x^{3m+1}=x^{3m}\cdot x=x\cdot x^{3m}$．故选择C．

题3　已知有理数x、y、z满足

$|x-z-2|+(3x-6y-7)^2+|3y+3z-4|=0$，求$x^{3n}y^{3n-1}z^{4n}-x$的值．

解　由题可知$\begin{cases}x-z-2=0,\\3x-6y-7=0,\\3y+3z-4=0.\end{cases}$解这个方程组得$\begin{cases}x=3,\\y=\dfrac{1}{3},\\z=1.\end{cases}$

$\therefore x^{3n}y^{3n-1}z^{4n}-x=(xy)^{3n}\div y\cdot z^{4n}-x=1\div\dfrac{1}{3}\times1-3=0$．

二、整式的乘法

题4 如果$(x+q)$与$(x+\frac{1}{5})$的积不含x项，那么q是(　　).

A. $\frac{1}{5}$　　B. 5　　C. -5　　D. $-\frac{1}{5}$

解 $\because (x+q)\cdot(x+\frac{1}{5})=x^2+(\frac{1}{5}+q)x+\frac{1}{5}q$

$\therefore$要使积不含x项，则需$\frac{1}{5}+q=0\therefore q=-\frac{1}{5}$. 故选择D.

题5 计算$(\frac{2}{3})^{2002}\times(1.5)^{2001}\times(-1)^{2003}$的结果是(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{3}{2}$

解 上式$=(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2})^{2001}\cdot(\frac{2}{3})\times(-1)=-\frac{2}{3}$. 故选择B.

题6 设$xy<0$，要使$x^ny^m\cdot x^ny^m>0$，那么(　　).

A. m、n都应是偶数

B. m、n都应是奇数

C. 不论m、n为奇数或偶数都可以

D. 不论m、n为奇数或偶数都不行

解 $\because x^ny^m\cdot x^ny^m=(x^ny^m)^2$，$\because xy<0$，$x^ny^m\neq 0$.

$\therefore (x^ny^m)^2>0$，$\therefore$不论m、n的值如何都成立. 故选择C.

题7 若n为正整数，且$x^{2n}=7$，则$(3x^{3n})^2-4(x^2)^{2n}$的值为(　　).

A. 833　　B. 2891　　C. 3283　　D. 1225

解 $\because (3x^{3n})^2-4(x^2)^{2n}=9\cdot x^{6n}-4\cdot x^{4n}=9(x^{2n})^3-4\cdot(x^{2n})^2$

$=9\times7^3-4\times7^2=2891$. 故选择B.

题8 比较2^{100}与3^{75}的大小

解 $\because 2^{100}=(2^4)^{25}$，$3^{75}=(3^3)^{25}$，而$2^4<3^3$，$\therefore 2^{100}<3^{75}$.

题9 求证：对于任意自然数n，$n(n+5)-(n-3)(n+2)$的值都能被6整除.

证明 $\because n(n+5)-(n-3)(n+2)$

$=n^2+5n-n^2+n+6=6(n+1)$.

$\because n$为自然数，$\therefore n+1$为自然数，

$\therefore$上式能被6整除.

三、整式乘法公式

题10 简述有关的乘法公式.

答 乘法公式有:

(1)平方差公式:$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

(2)完全平方公式:$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

(3)立方和公式:$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

(4)立方差公式:$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

题11 $(2a-1)^2(4a^2+2a+1)^2$ 的结果是( ).

A. $64a^6-16a^3+1$　　B. $64a^6+16a^3+1$

C. $64a^6-1$　　D. $64a^6+1$

解 $(2a-1)^2(4a^2+2a+1)^2=[(2a-1)(4a^2+2a+1)]^2$

$=(8a^3-1)^2=64a^6-16a^3+1$. 故选择 A.

题12 已知 $m+\frac{1}{m}=3$,则 $m^2+\frac{1}{m^2}$的值是( ).

A. 9　　B. 11　　C. 7　　D. 1

解 $\because m^2+\frac{1}{m^2}=(m+\frac{1}{m})^2-2=9-2=7$. 故选择 C.

题13 若 $a-b=2,a-c=1$,则$(2a-b-c)^2+(c-a)^2=($).

A. 9　　B. 10　　C. 2　　D. 1

解 $\because a-b=2,a-c=1,\therefore (a-b)+(a-c)=3$,即 $2a-b-c=3$.

$\therefore (2a-b-c)^2+(c-a)^2=9+1=10$. 故选择 B.

题14 $[(a^2-b^2)\div(a+b)](a^2+ab+b^2)$的运算结果是( ).

A. $(a+b)^3$　　B. $(a-b)^3$　　C. a^3+b^3　　D. a^3-b^3

解 原式$=(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. 故选择 D.

题15 $(-x-1)(x^2-x+1)$的结果是( ).

A. $-x^3+1$　　B. $-x^3-1$　　C. x^3+1　　D. x^3-1

解 原式$=-(x+1)(x^2-x+1)=-(x^3+1)=-x^3-1$. 故选择 B.

题16 计算:

(1)$(a+2b)[(a+2b)^2-6ab]$;(2)$(x^n+y^n)(x^n-y^n)-(x^n+y^n)^2$.

解 (1)原式$=(a+2b)(a^2+4ab+4b^2-6ab)$

$=(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

$=a^3+8b^3$.

(2)原式$=x^{2n}-y^{2n}-(x^{2n}+2x^ny^n+y^{2n})$

$=x^{2n}-y^{2n}-x^{2n}-2x^ny^n-y^{2n}=-2y^{2n}-2x^ny^n$.

题17 计算:$(x^5-x^2)(x^{10}+x^7+x^4)$.

解 原式$=(x^5-x^2)[(x^5)^2+x^5x^2+(x^2)^2]$

$=(x^5)^3-(x^2)^3=x^{15}-x^6$.

本题也可以按如下方法计算:

上式$=x^2(x^3-1)\cdot x^4(x^6+x^3+1)$

$=x^6(x^3-1)(x^6+x^3+1)$

$=x^6(x^9-1)=x^{15}-x^6$.

题18 若$(a+b)=1$,求a^3+b^3+3ab的值.

解 $\because a+b=1, \therefore a^2+b^2+2ab=1, \therefore a^2+b^2-ab=1-3ab$,

$\therefore a^3+b^3+3ab=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab$

$=(a^2-ab+b^2)+3ab$

$=1-3ab+3ab=1$.

题19 利用乘法公式计算:

$100^2-99^2+98^2-97^2+96^2-95^2+\cdots+2^2-1^2$.

解

上式$=(100-99)(100+99)+(98-97)(98+97)+\cdots+(2-1)(2+1)$

$=100+99+98+97+\cdots+2+1$

$=50\times(100+1)=5050$.

题20 若$x^2+2x+y^2-6y+10=0$,求x、y的值.

解 $\because x^2+2x+y^2-6y+10=0$,

$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2=0$,

$\therefore x+1=0, y-3=0$,

$\therefore x=-1, y=3$.

题21 若$\triangle ABC$的三边为a、b、c,并适合$a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$,试问三角形$ABC$为何种三角形?

解 由$a^4+b^4+c^4=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$可知

$a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2=0$,

$\therefore 2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=0$,

$\therefore (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2=0$,

$\therefore a^2=b^2=c^2$,

$\because a>0, b>0, c>0$,

$\therefore a=b=c$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

四、整式的除法

题22　$(2x^3-5x^2+3x-2)\div(-x+1+2x^2)=($　　$)$.

A. $x+1$　　B. $x-1$　　C. $x+2$　　D. $x-2$

解　$\because (2x^2-x+1)(x-2)=2x^3-5x^2+3x-2$.

$\therefore (2x^3-5x^2+3x-2)\div(2x^2-x+1)$

$=(2x^2-x+1)(x-2)\div(2x^2-x+1)$

$=x-2$. 故选择 D.

题23　$(x^3-2x^2+ax+2)\div(x^2-4x+1)=x+2$，则 $a=($　　$)$.

A. $a=-7$　　B. $a=7$　　C. $a=7x$　　D. $a=-7x$

解　$\because (x^3-2x^2+ax+2)\div(x^2-4x+1)=x+2$

$\therefore x^3-2x^2+ax+2=(x+2)(x^2-4x+1)$

$=x^3-2x^2-7x+2$.

$\therefore a=-7$. 故选择 A.

题24　多项式 x^2+x+m 能被 $x+5$ 整除，则此多项式也能被下列多项式整除的是(　　).

A. $x-6$　　B. $x+6$　　C. $x-4$　　D. $x+4$

解　$\because x^2+x+m$ 能被 $x+5$ 整除，

$\therefore x^2+x+m=(x+5)(x+n)$，

即 $x^2+x+m=x^2+(5+n)x+5n$，

$\therefore 5+n=1, n=-4$. 故选择 C.

第七章　因式分解

一、提公因式法

题1　简述因式分解的概念．

答　把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解，也可以叫做分解因式．

题2　简述把多项式分解因式的一般步骤．

答　(1)如果多项式的各项有公因式，那么先提出公因式；

(2)在各项提出公因式以后或各项没有公因式的情况下，应考虑运用公式法或十字相乘法，对于四项式或四项以上的多项式，应考虑运用分组分解法，分组后可以综合运用公式法和十字相乘法；

(3)如果第一次分解因式后，其中的因式还能分解，则必须将其继续分解，最终达到各因式都不能再分解为止．

题3　把下列各式分解因式：

(1)$-15xy-20x$；　　　　(2)$56a^3bc+14a^2b^2c-21ab^2c^2$；

(3)$x(2a+b)+3y(2a+b)$；

(4)$(a-b)^3-(a-b)^2(a-c)+2(a-b)^2(b-c)$．

解　(1)原式$=-5x(3y+4)$；

(2)原式$=7abc(8a^2+2ab-3bc)$；

(3)原式$=(2a+b)(x+3y)$．

(4)原式$=(a-b)^2[(a-b)-(a-c)+2(b-c)]$

$=(a-b)^2(a-b-a+c+2b-2c)=(a-b)^2(b-c)$．

题4　利用提公因式法计算下列各题：

(1)$123\times\frac{987}{1368}+264\times\frac{987}{1368}+456\times\frac{987}{1368}+525\times\frac{987}{1368}$；

(2)$0.582\times8.69+1.236\times8.69+2.478\times8.69+5.704\times8.69$．

解 (1)原式$=(123+264+456+525)\times\frac{987}{1368}=1368\times\frac{987}{1368}=987$；

(2)原式$=(0.582+1.236+2.478+5.704)\times 8.69$

$=10\times 8.69=86.9$.

题5 证明：$81^7-27^9-9^{13}$能被45整除.

证明 $\because 81^7-27^9-9^{13}=3^{28}-3^{27}-3^{26}$

$=3^{26}(3^2-3-1)=3^{26}\times 5=3^{24}\times 3^2\times 5=3^{24}\times 45$.

$\therefore 81^7-27^9-9^{13}$能被45整除.

题6 证明：对于任意自然数n，$3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$一定是10的倍数.

证明 $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n=3^{n+2}+3^n-2^{n+2}-2^n$

$=3^n(3^2+1)-2^n(2^2+1)=10\times 3^n-5\times 2^n$.

$\because$对任意自然数n，10×3^n和5×2^n都是10的倍数.

$\therefore 3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n$一定是10的倍数.

二、运用公式法

题7 试述五个重要的因式分解公式.

答 (1)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

(2)$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$；

(3)$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$；

(4)$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

(5)$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

题8 若$x^2+2(m-3)x+16$是完全平方式，则m的值为(　　).

A. -5　　B. 7　　C. -1　　D. 7或-1

解 若$x^2+2(m-3)x+16$是完全平方式，则它的一次项应为$8x$或为$-8x$，即$2(m-3)=\pm 8$，所以，$m=7$或-1，故选择D.

题9 下列各式的因式分解中，有错误的是(　　).

A. $9(a+2b)^2-16x^4=(3a+6b+4x^2)(3a+6b-4x^2)$

B. $(a-b)^3-(b-a)$

$=(b-a)[(b-a)^2-1]=(b-a)(b-a+1)(b-a-1)$

C. $x^3-14x^2y+49xy^2=x(x-7y)^2$

D. $-a^2b^4+6ab^3-9b^2=-b^2(a^2b^2-6ab+9)=-b^2(ab-3)^2$

解 B中若要提公因式$b-a$,应先把$(a-b)^3$化为$-(b-a)^3$,因此分解的第一步中就出现了错误. 故选择B.

题10 无论x、y取何值,$x^2+y^2-2x+12y+40$的值都是(　　).

A. 正数　　B. 负数　　C. 零　　D. 非负数

解 原式$=x^2-2x+1+y^2+12y+36+3=(x-1)^2+(y+6)^2+3$.

无论x、y取何值,都有$(x-1)^2+(y+6)^2+3>0$,故选择A.

题11 把a^2+2a-b^2-2b分解因式的结果是(　　).

A. $(a-b)(a+2)(b+2)$　　B. $(a-b)(a+b+2)$

C. $(a-b)(a+b)+2$　　D. $(a^2-2b)(b^2-2a)$

解 原式$=a^2+2a+1-b^2-2b-1=(a+1)^2-(b+1)^2$. 再利用平方差公式进行分解,最后得到$(a+b+2)(a-b)$,故选择B.

题12 把下列各式分解因式:

(1)$0.04x^4-0.81y^2$;　　(2)$x^{2n+1}-xy^{2n}$.

解 (1)原式$=(0.2x^2+0.9y)(0.2x^2-0.9y)$.

(2)原式$=x(x^{2n}-y^{2n})=x(x^n+y^n)(x^n-y^n)$.

题13 把下列各式分解因式:

(1)$(a+2b)^2-(a-3b)^2$;　　(2)$a^2(16x-y)+b^2(y-16x)$.

解 (1)原式$=[(a+2b)+(a-3b)][(a+2b)-(a-3b)]$

$=5b(2a-b)$.

(2)原式$=a^2(16x-y)-b^2(16x-y)$

$=(16x-y)(a^2-b^2)$

$=(16x-y)(a+b)(a-b)$.

题14 运用公式法计算下列各题:

(1)202^2+198^2;　　(2)$2002^2-2001\times2003$.

解 (1)原式$=(202+198)^2-2\times202\times198$

$=400^2-2\times(200+2)\times(200-2)$

$=400^2-2\times(40000-4)$

$=160000-80000+8=80008$.

(2)原式$=2002^2-(2002-1)\times(2002+1)$

$=2002^2-(2002^2-1)=1$.

题15 把下列各式分解因式:

(1)$a^2(x-y)^2+2a(x-y)^3+(x-y)^4$

(2)$(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$;

解 (1)原式$=(x-y)^2[a^2+2a(x-y)+(x-y)^2]$

$=(x-y)^2(a+x-y)^2.$

(2)原式$=(x^2+y^2+2xy)(x^2+y^2-2xy)$

$=(x+y)^2(x-y)^2.$

题16 把下列各式分解因式：

(1)$\frac{8}{27}a^6+\frac{27}{64}b^3$；　　(2)$64a-a^4b^3$；

(3)$-3m^3-24n^3$.

解 (1)原式$=(\frac{2}{3}a^2+\frac{3}{4}b)(\frac{4}{9}a^4-\frac{1}{2}a^2b+\frac{9}{16}b^2)$.

(2)原式$=a(64-a^3b^3)=a(4-ab)(16+4ab+a^2b^2)$.

(3)原式$=-3(m^3+8n^3)=-3(m+2n)(m^2-2mn+4n^2)$.

题17 把下列各式分解因式：

(1)$x^5(x-2y)+x^2(2y-x)$；　　(2)$(7a+8b)^3-c^3$；

(3)$(2a-3)^3+a^3$；　　(4)$(3a-b)^3-(a-3b)^3$.

解 (1)原式$=x^5(x-2y)-x^2(x-2y)$

$=x^2(x-2y)(x^3-1)$

$=x^2(x-2y)(x-1)(x^2+x+1)$.

(2)原式$=(7a+8b-c)[(7a+8b)^2+(7a+8b)c+c^2]$

$=(7a+8b-c)(49a^2+112ab+64b^2+7ac+8bc+c^2)$.

(3)原式$=(2a-3+a)[(2a-3)^2-(2a-3)a+a^2]$

$=(3a-3)(4a^2-12a+9-2a^2+3a+a^2)$

$=3(a-1)(3a^2-9a+9)=9(a-1)(a^2-3a+3)$.

(4)原式$=[(3a-b)-(a-3b)][(3a-b)^2+(3a-b)(a-3b)+(a-3b)^2]$

$=(3a-b-a+3b)(9a^2-6ab+b^2+3a^2-10ab+3b^2+a^2-6ab+9b^2)$

$=(2a+2b)(13a^2-22ab+13b^2)$

$=2(a+b)(13a^2-22ab+13b^2)$.

题18 某一正方形的周长比另一个正方形的周长多 96 cm，它们的面积相差 960 cm^2，求这两个正方形的边长.

解 设这两个正方形的边长分别为 x cm，y cm. 根据题意，得

$$\begin{cases}4x-4y=96, & ①\\ x^2-y^2=960. & ②\end{cases}$$

由①，得　$x-y=24$.　　③

由②，得　$(x+y)(x-y)=960$.　　④

把③代入④，得　$x+y=40$.　　⑤

由③和⑤解得，$x=32$，$y=8$.

答：这两个正方形的边长分别为 32 cm，8 cm.

题 19 已知 $x+\frac{1}{x}=-3$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$ 的值.

解 $\because (x+\frac{1}{x})^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$，

$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=(-3)^2-2=7$，

$\therefore (x^2+\frac{1}{x^2})^2=49$，$\therefore x^4+2+\frac{1}{x^4}=49$，$\therefore x^4+\frac{1}{x^4}=47$.

题 20 求证：四个连续自然数的积再加上 1，一定是一个完全平方数.

证明 设这四个连续自然数分别为 n、$n+1$、$n+2$、$n+3$，则

$$\begin{aligned}&n(n+1)(n+2)(n+3)+1\\=&n(n+3)(n+1)(n+2)+1\\=&(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1\\=&(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1\\=&(n^2+3n+1)^2.\end{aligned}$$

由此可见，$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ 一定是一个完全平方数.

题 21 已知多项式 $2x^3-x^2+m$ 有一个因式是 $2x+1$，求 m 的值.

解 根据已知条件，设 $2x^3-x^2+m=(2x+1)(x^2+ax+b)$. 则

$2x^3-x^2+m=2x^3+(2a+1)x^2+(a+2b)x+b$.

由此可得 $\begin{cases}2a+1=-1, & ①\\ a+2b=0, & ②\\ m=b, & ③\end{cases}$

由①得 $a=-1$.

把 $a=-1$ 代入②，得 $b=\frac{1}{2}$.

把 $b=\frac{1}{2}$ 代入③，得 $m=\frac{1}{2}$.

题 22 证明：两个连续偶数的平方差能够被 4 整除.

证明 设这两个连续偶数分别为 $2n$、$2n+2$（n 为整数），则

$(2n+2)^2-(2n)^2=(2n+2+2n)(2n+2-2n)$

$=2(4n+2)=4(2n+1)$，

$\therefore (2n+2)^2-(2n)^2$ 能够被 4 整除.

三、分组分解法

题 23 若 $a^2+a=-1$，则 $a^4+2a^3-3a^2-4a+3$ 的值为（　　）.

A. 7　　B. 8　　C. 10　　D. 12

解 $a^4+2a^3-3a^2-4a+3=a^4+2a^3+a^2-4a^2-4a+3$

$=(a^2+a)^2-4(a^2+a)+3=(-1)^2-4\times(-1)+3=8.$

因此，选择 B.

题 24 把多项式 $2a(a^2+a+1)+a^4+a^2+1$ 分解因式，所得的结果为（　　）.

A. $(a^2+a-1)^2$　　B. $(a^2-a+1)^2$

C. $(a^2+a+1)^2$　　D. $(a^2-a-1)^2$

解 原式$=a^4+2a^3+3a^2+2a+1=a^4+2a^3+a^2+2a^2+2a+1$

$=(a^2+a)^2+2(a^2+a)+1=(a^2+a+1)^2.$

故选择 C.

题 25 把下列各式分解因式：

(1)$a^3-b^3+2a-2b$；　　(2)$25a^4-x^2-2x-1$；

(3)$a^2+6ab+9b^2-16x^2y^2$；　　(4)$3m^4-3+7m^2y+7y$.

解 (1)原式$=(a-b)(a^2+ab+b^2)+2(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2+2).$

(2)原式$=25a^4-(x+1)^2$

$=[5a^2+(x+1)][5a^2-(x+1)]$

$=(5a^2+x+1)(5a^2-x-1).$

(3)原式$=(a+3b)^2-(4xy)^2=(a+3b+4xy)(a+3b-4xy).$

(4)原式$=3(m^4-1)+7y(m^2+1)$

$=3(m^2+1)(m^2-1)+7y(m^2+1)$

$=(m^2+1)(3m^2-3+7y).$

题 26 把下列各式分解因式：

(1)$27x^3-y^3+9x^2-6xy+y^2$；

(2)$(1-a^2)(1-b^2)-4ab$；

(3)$a^2-8ab+16b^2+6a-24b+9$；

(4)$(x+2y)(3x-7y)^2-4(x+2y)(x+y)^2$.

解 (1)原式$=(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)+(3x-y)^2$

$=(3x-y)(9x^2+3xy+y^2+3x-y)$.

(2)原式$=1-a^2-b^2+a^2b^2-4ab$

$=1-2ab+a^2b^2-a^2-2ab-b^2$

$=(1-ab)^2-(a+b)^2$

$=(1-ab+a+b)(1-ab-a-b)$.

(3)原式$=(a-4b)^2+6(a-4b)+9$

$=[(a-4b)+3]^2=(a-4b+3)^2$.

(4)原式$=(x+2y)[(3x-7y)^2-4(x+y)^2]$

$=(x+2y))[(3x-7y)+2(x+y)][(3x-7y)-2(x+y)]$

$=(x+2y)(3x-7y+2x+2y)(3x-7y-2x-2y)$

$=5(x+2y)(x-y)(x-9y)$.

题27 把下列各式分解因式：

(1)$(ax+by)^2+(ay-bx)^2$；

(2)$a^4+a^2b^2+b^4$.

解 (1)原式$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2y^2+b^2x^2=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$

$=(x^2+y^2)(a^2+b^2)$.

(2)原式$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$

$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$.

题28 把下列各式分解因式：

(1)x^4-27x^2+1；

(2)$(a+2b)^3+(a-2b)^3$；

(3)$a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad+bc)$；

(4)$a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ac$.

解 (1)原式$=x^4-2x^2+1-25x^2=(x^2-1)^2-(5x)^2$

$=(x^2-1+5x)(x^2-1-5x)$.

(2)原式$=[(a+2b)+(a-2b)][(a+2b)^2-(a+2b)(a-2b)+(a-2b)^2]$

$=2a(a^2+4ab+4b^2-a^2+4b^2+a^2-4ab+4b^2)$

$=2a(a^2+12b^2)$.

(3)原式$=a^2-b^2-c^2+d^2-2ad-2bc$

$=a^2-2ad+d^2-b^2-2bc-c^2=(a-d)^2-(b+c)^2$

$=(a-d+b+c)(a-d-b-c)$.

(4)原式$=a^2+6ac+9c^2-4ab-12bc+4b^2$

$=(a+3c)^2-4b(a+3c)+4b^2=(a+3c-2b)^2$.

题29 证明：$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$.

证明 原式左边$=a^2+2ab+b^2+2bc+2ca+c^2$

$=(a+b)^2+2c(a+b)+c^2$

$=(a+b+c)^2=$右边.

题30 已知$a+b=0$,求$a^3-2b^3+a^2b-2ab^2$的值.

解 原式$=a^3+a^2b-2b^3-2ab^2=a^2(a+b)-2b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2-2b^2)$,

$\because a+b=0, \therefore a^3-2b^3+a^2b-2ab^2=0$.

题31 证明:若$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$,则$a=b=c$.

证明 $\because a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$,

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$.

$\therefore a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0$.

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

$\therefore a-b=0, b-c=0, c-a=0$,

$\therefore a=b=c$.

题32 把下列各式分解因式:

(1)$x^3y^2+xy^2+30y^2$; (2)a^3-5a^2+5a-4;

(3)$x^3+6x^2+11x+6$; (4)$a^2-4ab+3b^2+2bc-c^2$.

解 (1)原式$=y^2(x^3+x+30)=y^2(x^3+27+x+3)$

$=y^2[(x+3)(x^2-3x+9)+(x+3)]$

$=y^2(x^2-3x+10)(x+3)$.

(2)原式$=a^3-4a^2-a^2+5a-4=a^2(a-4)-(a-1)(a-4)$

$=(a-4)(a^2-a+1)$.

(3)原式$=x^3+6x^2+9x+2x+6=x(x+3)^2+2(x+3)$

$=(x+3)(x^2+3x+2)=(x+3)(x+2)(x+1)$.

(4)原式$=a^2-4ab+4b^2-b^2+2bc-c^2=(a-2b)^2-(b-c)^2$

$=(a-2b+b-c)(a-2b-b+c)=(a-b-c)(a-3b+c)$.

题33 把下列各式分解因式:

(1)$(xy+1)(x+1)(y+1)+xy$;

(2)$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

解 (1)原式$=(xy+1)(xy+x+y+1)+xy$

$=(xy+1)^2+(xy+1)x+(xy+1)y+xy$

$=(xy+1)(xy+1+x)+(xy+1+x)y$

$=(xy+1+x)(xy+1+y)$.

(2)原式$=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$=a^2b-ab^2-a^2c+b^2c+c^2a-c^2b$

$=ab(a-b)-c(a+b)(a-b)+c^2(a-b)$

$=(a-b)(ab-ac-bc+c^2)$

$=(a-b)[a(b-c)-c(b-c)]$

$=(a-b)(b-c)(a-c).$

题 34 证明：$(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2=(a-1)^2(b-1)^2$.

证明 $(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$

$=a^2+ab-2a+ab+b^2-2b-2a^2b-2ab^2+4ab+1-2ab+a^2b^2$

$=a^2+b^2-2a-2b-2a^2b-2ab^2+4ab+1+a^2b^2$

$=a^2+2ab+b^2+a^2b^2+2ab+1-2a-2b-2a^2b-2ab^2$

$=(a+b)^2+(ab+1)^2-2(a+b)-2ab(a+b)$

$=(a+b)^2+(ab+1)^2-2(a+b)(ab+1)$

$=[(a+b)-(ab+1)]^2=(a-ab+b-1)^2$

$=(a-1)^2(1-b)^2=(a-1)^2(b-1)^2$.

题 35 先化简，再求值：$(a+b+c)^2+(a+b-c)^2-(a-b-c)^2-(a-b+c)^2$，其中 $a=\frac{4}{5}$，$b=-25$.

解 原式$=(a+b+c)^2-(a-b-c)^2+(a+b-c)^2-(a-b+c)^2$

$=[(a+b+c)+(a-b-c)][(a+b+c)-(a-b-c)]+[(a+b-c)+(a-b+c)][(a+b-c)-(a-b+c)]$

$=2a(2b+2c)+2a(2b-2c)$

$=2a(2b+2c+2b-2c)$

$=8ab.$

当 $a=\frac{4}{5}$，$b=-25$ 时，原式$=8\times\frac{4}{5}\times(-25)=-160$.

题 36 已知：$a+b+c=0$，$a^3+b^3+c^3=0$，求证：$abc=0$.

证明 $\because a+b+c=0$，$a+b=-c$，

$\therefore a^3+b^3+c^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)+c^3$

$=-c(a^2+2ab+b^2-3ab)+c^3=-c[(a+b)^2-3ab]+c^3$

$=-c[(-c)^2-3ab]+c^3=-c^3+3abc+c^3=3abc$.

$\because a^3+b^3+c^3=0$，$\therefore 3abc=0$，$\therefore abc=0$.

四、十字相乘法*

题37 多项式 x^2+ax-6 可分解为两个一次因式的积，且 $a<0$，则 a 的值为（　　）.

A. -1　　B. -3　　C. 5　　D. -1 或 -5

解 因为 $a<0$，所以应把 -6 分成 $2\times(-3)$ 或 $1\times(-6)$，因此 $a=-1$ 或 -5，应选择 D.

题38 在多项式 x^2+7x+6，x^2-2x-3，$2x^2+6x+4$，x^2-6x+5，$2x^2+x-1$ 中，含有因式 $x+1$ 的多项式共有（　　）.

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

解 $x^2+7x+6=(x+6)(x+1)$，$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，

$2x^2+6x+4=2(x+1)(x+2)$，$x^2-6x+5=(x-5)(x-1)$，

$2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$，故选择 D.

题39 多项式 x^4-16，x^3-8，x^3-7x^2+10x 的公因式是（　　）.

A. $x-2$　　B. $x-4$　　C. $x+2$　　D. $x-8$

解 因为 $x^4-16=(x^2+4)(x+2)(x-2)$，$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$，$x^3-7x^2+10x=x(x-2)(x-5)$，所以应选择 A.

题40 把多项式 $a^{n+1}b^{n+1}-3a^{n+2}b^n-4a^{n+3}b^{n-1}$（$n$ 是大于 1 的自然数）分解因式的结果是（　　）.

A. $a^{n+1}b^{n-1}(a-b)(4a+b)$　　B. $a^{n+3}b^{n+1}(a-b)(4a+b)$

C. $-a^{n+1}b^{n-1}(a+b)(4a-b)$　　D. $-a^{n+1}b^{n-1}(a-b)(4a+b)$

解 原式 $=a^{n+1}b^{n-1}(b^2-3ab-4a^2)=a^{n+1}b^{n-1}(b-4a)(b+a)$

$=-a^{n+1}b^{n-1}(a+b)(4a-b)$.

故选择 C.

题41 若 $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40=(x+y+m)(x+y+n)$，则 m,n 的值分别为（　　）.

A. $m=8,n=5$　　B. $m=8,n=-5$

C. $m=-8,n=5$　　D. $m=-8,n=-5$

解 $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40=x^2+2xy+y^2-3x-3y-40$

$=(x+y)^2-3(x+y)-40=(x+y-8)(x+y+5)$.

$\therefore m=-8,n=5$，应选择 C.

题 12 把下列各式分解因式：

(1)a^2+5a+6；

(2)$x^2-11x+24$；

(3)$y^2-12y-28$；

(4)x^2+4x-5.

解 (1)原式$=(a+2)(a+3)$.

(2)原式$=(x-3)(x-8)$.

(3)原式$=(y-14)(y+2)$.

(4)原式$=(x+5)(x-1)$.

题 13 把下列各式分解因式：

(1)$a^2b^2+16ab+39$；

(2)$x^2+6xy-91y^2$；

(3)$y^4-3y^3-28y^2$；

(4)$2a^2-73a+36$；

(5)$x^2+19abx+48a^2b^2$；

(6)$x^{2n}+2x^ny-3y^2$；

(7)$7a^2b^2+8abcd-12c^2d^2$；

(8)$x^2+\frac{7}{4}xy+\frac{5}{8}y^2$.

解 (1)原式$=(ab+3)(ab+13)$.

(2)原式$=(x-7y)(x+13y)$.

(3)原式$=y^2(y^2-3y-28)=y^2(y+4)(y-7)$.

(4)原式$=(2a-1)(a-36)$.

(5)原式$=(x+3ab)(x+16ab)$.

(6)原式$=(x^n+3y)(x^n-y)$.

(7)原式$=(ab+2cd)(7ab-6cd)$.

(8)原式$=\frac{1}{8}(8x^2+14xy+5y^2)=\frac{1}{8}(2x+y)(4x+5y)$.

题 14 把下列各式分解因式：

(1)$(a+b)^2-(a+b)-2$；

(2)x^4-34x^2+225；

(3)y^4-3y^2+2；

(4)$(a^2-a)^2-14(a^2-a)+24$；

(5)$10(x+2)^2-29(x+2)+10$；

(6)$(m^2-2m+3)^2-8(m^2-2m+3)+12$.

解 (1)原式$=(a+b-2)(a+b+1)$.

(2)原式$=(x^2-9)(x^2-25)=(x+3)(x-3)(x+5)(x-5)$.

(3)原式$=(y^2-2)(y^2-1)=(y^2-2)(y+1)(y-1)$.

(4)原式$=(a^2-a-2)(a^2-a-12)$

$=(a+1)(a-2)(a-4)(a+3)$.

(5)原式$=[2(x+2)-5][5(x+2)-2]=(2x-1)(5x+8)$.

(6)原式$=[(m^2-2m+3)-2][(m^2-2m+3)-6]$

$=(m^2-2m+1)(m^2-2m-3)$

$=(m-1)^2(m-3)(m+1)$.

题 15 把下列各式分解因式：

(1)$(a^2+3a-3)(a^2+3a+1)-5$；

(2)$(y^2-1)(y+3)(y+5)-9$；

(3)$20xy^2+y^2-x+20y^3+xy-y$；

(4)$(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

解 (1)原式$=[(a^2+3a)-3][(a^2+3a)+1]-5$

$=(a^2+3a)^2-2(a^2+3a)-8$

$=(a^2+3a-4)(a^2+3a+2)$

$=(a+4)(a-1)(a+1)(a+2)$.

(2)原式$=(y+1)(y+3)(y-1)(y+5)-9$

$=(y^2+4y+3)(y^2+4y-5)-9$

$=(y^2+4y)^2-2(y^2+4y)-24$

$=(y^2+4y+4)(y^2+4y-6)$

$=(y^2+4y-6)(y+2)^2$.

(3)原式$=20xy^2+20y^3+xy+y^2-x-y$

$=20y^2(x+y)+y(x+y)-(x+y)$

$=(x+y)(20y^2+y-1)$

$=(x+y)(4y+1)(5y-1)$.

(4)原式$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2-12$

$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10$

$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$

$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$.

题 16 把下列各式分解因式：

(1)$x^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$；

(2)$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$.

解 (1)原式$=(x-3y)(x+y)+3x-5y+2$

$=(x-3y+1)(x+y+2)$.

$$\begin{array}{ccc} x-3y & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 1 \\ x+y & & 2 \end{array}$$

(2)原式$=(2x-3y)(2x+y)-4x+10y-3$

$=(2x-3y+1)(2x+y-3)$.

$$\begin{array}{ccc} 2x-3y & \diagdown\!\!\!\!\diagup & 1 \\ 2x+y & & -3 \end{array}$$

题 17 证明：若 $4x-y$ 是 7 的倍数，其中 x、y 都是整数，则 $8x^2+10xy-3y^2$ 是 49 的倍数.

证明 $8x^2+10xy-3y^2=(2x+3y)(4x-y)$，

$2(2x+3y)=4x+6y=4x-y+7y$.

$\because 4x-y$ 是 7 的倍数，$7y$ 也是 7 的倍数(y 是整数)，

$\therefore 2(2x+3y)$是 7 的倍数，

而 2 与 7 互质，因此，$2x+3y$ 是 7 的倍数，所以 $8x^2+10xy-3y^2$ 是 49 的倍数.

题 48 求证：多项式$(x^2-4)(x^2-10x+21)+100$的值一定是非负数.

证明 $(x^2-4)(x^2-10x+21)+100$

$=(x+2)(x-2)(x-3)(x-7)+100$

$=(x+2)(x-7)(x-2)(x-3)+100$

$=(x^2-5x-14)(x^2-5x+6)+100$

$=(x^2-5x)^2-8(x^2-5x)+16$

$=(x^2-5x+4)^2$.

$\because$无论 x 取何值$(x^2-5x+4)^2\geqslant 0$，

$\therefore (x^2-4)(x^2-10x+21)+100$的值一定是非负数.

题 49 已知 a、b、c 为互不相等的数，且满足$(a-c)^2=4(b-a)(c-b)$.

求证：$a-b=b-c$.

证明 $\because (a-c)^2=4(b-a)(c-b)$，

$\therefore (a-c)^2-4(b-a)(c-b)=0$，

$\therefore a^2-2ac+c^2-4bc+4ac-4ab+4b^2=0$，

$\therefore (a+c)^2-4b(a+c)+4b^2=0$，

$\therefore (a+c-2b)^2=0$，$\therefore a+c-2b=0$，$\therefore a-b=b-c$.

题 50 已知：$x+y=10$，$x^3+y^3=100$，求 x^2+y^2 的值.

解 $\because x+y=10$，$\therefore x^2+y^2+2xy=100$. ①

$\because x^3+y^3=100$，$\therefore (x+y)(x^2-xy+y^2)=100$，

$\therefore 10(x^2-xy+y^2)=100$，

$\therefore x^2-xy+y^2=10$，$\therefore xy=x^2+y^2-10$. ②

把②代入①，得 $x^2+y^2+2(x^2+y^2-10)=100$，

即 $x^2+y^2-20+2(x^2+y^2)=100$，

$\therefore 3(x^2+y^2)=120$，$\therefore x^2+y^2=40$.

第八章 分　　式

一、分式的基本性质

题 1 试述分式的有关概念及性质．

答 设 A、B 表示两个整式，$A\div B$ 可以表示成$\dfrac{A}{B}$的形式．如果 B 中含有字母，式子$\dfrac{A}{B}$就叫做分式．其中，A 叫做分式的分子，B 叫做分式的分母．分式的分子可以含字母，也可以不含字母，但分式的分母必须含有字母．分式的分母的值不能为零，如果分母的值是零，则分式没有意义．

分式的基本性质是：分式的分子与分母都乘以（或除以）同一个不等于零的整式，分式的值不变．这一性质也可以用式子表示为

$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times M}{B\times M}$，$\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\div M}{B\div M}$（其中 M 是不等于零的整式）．

题 2 下列有理式中，哪些是整式，哪些是分式？

$\dfrac{15}{x+y}$，$28a^2b$，$-\dfrac{9}{11}$，$\dfrac{5a+b}{2x-y}$，$\dfrac{3a^2-b^2}{4}$，$2-\dfrac{2}{a}$，$\dfrac{1}{m}$，$\dfrac{5xy}{6}$．

解 整式有 $28a^2b$，$-\dfrac{9}{11}$，$\dfrac{3a^2-b^2}{4}$，$\dfrac{5xy}{6}$，分式有$\dfrac{15}{x+y}$，$\dfrac{5a+b}{2x-y}$，$2-\dfrac{2}{a}$，$\dfrac{1}{m}$．

题 3 要使式了$\dfrac{1}{|x|-5}$有意义，x 应满足条件（　　）．

A．$x\neq5$　　B．$x\neq-5$　　C．$-5<x<5$　　D．$x\neq5$ 且 $x\neq-5$

解 要使式子$\dfrac{1}{|x|-5}$有意义，必须使分母 $|x|-5\neq0$，

即 $x\neq5$，且 $x\neq-5$．故选择 D.

题 4 若式子$\dfrac{|x|-3}{x^2-2x-3}$的值为零，则 x 的值为（　　）．

A．3　　B．-3　　C．±3　　D．0

解 由分子 $|x|-3=0$，得 $x=\pm3$．当 $x=3$ 时，$x^2-2x-3=0$，此时式子无意义；当 $x=-3$ 时，$x^2-2x-3=12\neq0$．故选择 B.

题 5 若$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，则$\frac{2x-3xy-2y}{x-2xy-y}$的值是（　　）．

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{9}{5}$　　D. 4

解 $\because \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3$，$\therefore \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=-3$，将分式的分子和分母都除以 xy，得

$$\frac{2x-3xy-2y}{x-2xy-y}=\frac{\frac{2}{y}-3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}=\frac{2(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})-3}{(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})-2}=\frac{2\times(-3)-3}{-3-2}=\frac{9}{5}.$$

故选择 C.

题 6 下列各式从左到右的变形，错误的是（　　）．

A. $\frac{2(3x-2y)}{3(2y-3x)}=-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

C. $\frac{(b-a)(c-b)}{(a-c)(a-b)(b-c)}=\frac{1}{a-c}$　　D. $\frac{x+y^2}{x}=\frac{x^2+y^2}{x^2}$

解 应根据分式的基本性质进行判断，在 D 中，分子、分母都乘以 x，应得到$\frac{x^2+xy^2}{x^2}$，因此选择 D.

题 7 若使分式$\frac{x^2+3}{4x+9}$的值为正数，则 x 的取值范围是（　　）．

A. $x<-\frac{9}{4}$　　B. $x>-\frac{9}{4}$　　C. $x<\frac{9}{4}$　　D. $-\frac{9}{4}<x<3$

解 因为对任意的 x，都有 $x^2+3>0$，所以要使原分式的值为正数，只需使 $4x+9>0$，即 $x>-\frac{9}{4}$即可．故选择 B.

题 8 当 x 取什么数时，下列分式有意义？

(1)$\frac{3x}{2x-10}$；　　(2)$\frac{14x+y-6}{5x+3}$；　　(3)$\frac{x-8}{x^2+4}$.

解 (1)由分母 $2x-10=0$，得 $x=5$，所以，当 $x\neq5$ 时，分式$\frac{3x}{2x-10}$有意义．

(2)由分母 $5x+3=0$，得 $x=-\frac{3}{5}$．所以，当 $x\neq-\frac{3}{5}$时，分式$\frac{14x+y-6}{5x+3}$有意义．

(3)因为无论 x 取任何有理数，x^2+4 都不等于零，所以，x 取任意有理数时，分式$\frac{x-8}{x^2+4}$都有意义．

题 9 当 y 是什么数时，分式$\frac{6y^2-9}{7y-1}$没有意义？

解 由分母 $7y-1=0$，得 $y=\frac{1}{7}$，

所以，当 $y=\frac{1}{7}$时，分式$\frac{6y^2-9}{7y-1}$没有意义．

题 10 在下列分式中，x 等于什么数时，分式的值为零？

(1)$\frac{3x-2}{8x+9}$；　(2)$\frac{x+5}{x^3-2x+1}$；　(3)$\frac{x(x-1)}{x^2-1}$.

解 (1)由分子 $3x-2=0$,得 $x=\frac{2}{3}$,当 $x=\frac{2}{3}$时,分母 $8x+9\neq0$. 所以,当 $x=\frac{2}{3}$时,分式$\frac{3x-2}{8x+9}$的值为零.

(2)由分子 $x+5=0$,得 $x=-5$,当 $x=-5$ 时,分母 $x^3-2x+1\neq0$,所以,当 $x=-5$时,分式$\frac{x+5}{x^3-2x+1}$的值为零.

(3)由分子 $x(x-1)=0$,得 $x=0$ 或 1. 当 $x=0$ 时,分母 $x^2-1\neq0$;当 $x=1$ 时,$x^2-1=0$,所以,当 $x=0$ 时,分式$\frac{x(x-1)}{x^2-1}$的值为零.

小结:只有在同时满足分子的值是零,而分母的值不为零这两个条件时,分式的值才是零.

题 11 不改变分式的值,把下列各式的分子与分母中各项的系数都化为整数:

(1)$\frac{0.3x-0.6y}{0.7x^2+0.4y^2}$；　(2)$\frac{\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c}{\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}y}$.

解 (1)原式$=\frac{(0.3x-0.6y)\times10}{(0.7x^2+0.4y^2)\times10}=\frac{3x-6y}{7x^2+4y^2}$.

(2)原式$=\frac{(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c)\times12}{(\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}y)\times12}=\frac{6a+4b+2c}{2x-3y}$.

题 12 不改变分式的值,使下列分式的分子与分母都不含“－”号:

(1)$-\frac{-x}{3y}$;(2)$\frac{-2x^2}{5y^2}$;(3)$\frac{n}{-4m}$;(4)$\frac{-7ab}{-9c^2}$;(5)$-\frac{-6x^2}{-11y^2}$;(6)$\frac{-x-y}{5xy}$.

解 (1)原式$=\frac{x}{3y}$;　(2)原式$=-\frac{2x^2}{5y^2}$;

(3)原式$=-\frac{n}{4m}$;　(4)原式$=\frac{7ab}{9c^2}$;

(5)原式$=-\frac{6x^2}{11y^2}$;　(6)原式$=-\frac{x+y}{5xy}$.

题 13 不改变分式的值,使下列分式的分子与分母的最高次项的系数化为正数:

(1)$\frac{25+13a-8a^2}{9-5a^2-a}$;　(2)$\frac{36-x-y}{1-x-14y^2}$;　(3)$-\frac{21-a^2-a^3}{4m+n+a^3}$;

(4)$\frac{x^4-2x^2+7x-10}{12-8x-x^3}$.

解 (1)原式$=\frac{8a^2-13a-25}{5a^2+a-9}$.

(2)原式$=\frac{x+y-36}{14y^2+x-1}$.

(3)原式$=\dfrac{a^3+a^2-21}{a^3+4m+n}$.

(4)原式$=-\dfrac{x^4-2x^2+7x-10}{x^3+8x-12}$.

二、分式的运算

题14 试述把一个分式约分的主要步骤.

答 把分式的分子与分母分解因式,然后约去分子与分母所有的公因式,使所得结果成为最简分式或者整式.另外,如果分式的分子或分母的系数是负数,通常先把负号提到分式本身的前边.

题15 试述分式的乘除法法则.

答 分式乘以分式,用分子的积做积的分子,分母的积做积的分母;分式除以分式,把除式的分子、分母颠倒位置后,与被除式相乘.用式子表示为

$\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$;　　$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$.

题16 试述分式的乘方法则.

答 分式的乘方,就是把分子、分母各自乘方.用式子表示为

$(\dfrac{a}{b})^n=\dfrac{a^n}{b^n}$($n$ 为正整数).

题17 试述分式的加减法法则.

答 (1)同分母的分式相加减,分母不变,把分子相加减,用式子表示为:

$\dfrac{a}{c}\pm\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\pm b}{c}$.

(2)异分母的分式相加减,先通分,变为同分母的分式,然后再加减,用式子表示为:

$\dfrac{a}{b}\pm\dfrac{c}{d}=\dfrac{ad}{bd}\pm\dfrac{bc}{bd}=\dfrac{ad\pm bc}{bd}$.

题18 已知$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$,则$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$的值等于(　　).

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. 0

解 $\because\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$,$\therefore\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a+b}$,$\therefore(a+b)^2=ab$,$\therefore a^2+2ab+b^2=ab$,$\therefore a^2+b^2=-ab$,$\therefore\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b^2+a^2}{ab}=\dfrac{-ab}{ab}=-1$.故选择C.

题19 已知$\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{3}=\dfrac{c}{4}$,则$\dfrac{2a^2-3bc+b^2}{a^2-2ab-c^2}$的值等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{19}{24}$

解　设$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k$,则 $a=2k,b=3k,c=4k$.

$\therefore \frac{2a^2-3bc+b^2}{a^2-2ab-c^2}=\frac{2\times 4k^2-3\times 12k^2+9k^2}{4k^2-2\times 6k^2-16k^2}=\frac{-19k^2}{-24k^2}=\frac{19}{24}$.

∴应选择 D.

题 20　已知 $x=\frac{a+1}{a-1}$,则$\frac{x+1}{x}$等于(　　).

A. $\frac{a}{2a+2}$　　B. $\frac{2a}{a+1}$　　C. $\frac{2a}{a-1}$　　D. $\frac{a}{2a-2}$

解　$\because x=\frac{a+1}{a-1}$,$\therefore \frac{1}{x}=\frac{a-1}{a+1}$.

$\therefore \frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}=1+\frac{a-1}{a+1}=\frac{a+1+a-1}{a+1}=\frac{2a}{a+1}$.

故选择 B.

题 21　当 $x=2000,y=1949$ 时,代数式$\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}$的值为(　　).

A. 51　　B. -51　　C. 3949　　D. -3949

解　$\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}$

$=\frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}\cdot\frac{y-x}{x^2+y^2}=-(x+y)$.

当 $x=2000,y=1949$ 时,原式$=-(2000+1949)=-3949$.

故选择 D.

题 22　计算$\frac{x^2-x-2}{x^2-x-6}\div\frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$的结果是(　　).

A. $\frac{x^2-1}{x^2-3}$　　B. $\frac{x^2+1}{x^2-9}$　　C. $\frac{x^2-1}{x^2-9}$　　D. $\frac{x^2+1}{x^2+3}$

解　原式$=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)}\div\frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-1)}$

$=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)}\cdot\frac{(x+2)(x-1)}{(x+3)(x-2)}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+3)(x-3)}=\frac{x^2-1}{x^2-9}$.

故选择 C.

题 23　若 $a+b+c\neq 0$,$\frac{2a+b}{c}=\frac{2b+c}{a}=\frac{2c+a}{b}=k$,则 k 的值为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. -2　　D. -3

解　$\because a+b+c\neq 0$,

$\therefore \frac{(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)}{c+a+b}=k$,

$\therefore \frac{3(a+b+c)}{a+b+c}=k$，$\therefore k=3$. 故选择 B.

题 24 已知 a 和 b 互为相反数，c 和 d 互为倒数，$|m|=2$，则$\frac{a+b}{m}+m^2-cd$ 的值为（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解 由已知，得，$a+b=0$，$cd=1$，$m^2=4$，

$\therefore \frac{a+b}{m}+m^2-cd=4-1=3$. 故选择 C.

题 25 已知 $x=300$，则$\frac{x}{x-3}-\frac{x+6}{x^2-3x}+\frac{1}{x}$的值为（　　）.

A. $\frac{99}{100}$　　B. $\frac{101}{990}$　　C. $\frac{111}{110}$　　D. $\frac{101}{100}$

解 原式$=\frac{x^2}{x^2-3x}-\frac{x+6}{x^2-3x}+\frac{x-3}{x^2-3x}=\frac{x^2-x-6+x-3}{x^2-3x}$

$=\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\frac{x+3}{x}=\frac{300+3}{300}=\frac{101}{100}$.

故选择 D.

题 26 若 $a^2+b^2=3ab$，则$(1+\frac{2b^3}{a^3-b^3})\div(1+\frac{2b}{a-b})$的值等于（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. 1　　D. $\frac{2}{3}$

解 原式$=\frac{a^3-b^3+2b^3}{a^3-b^3}\div\frac{a-b+2b}{a-b}=\frac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\cdot\frac{a-b}{a+b}$

$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a-b}{a+b}=\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}=\frac{3ab-ab}{3ab+ab}$

$=\frac{2ab}{4ab}=\frac{1}{2}$.

故选择 A.

题 27 已知 $a+b+c=0$，则 $a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$的值等于（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -3

解 $\because a+b+c=0$，

$\therefore b+c=-a$，$a+c=-b$，$a+b=-c$.

$\therefore a(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+b(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})+c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$

$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$

$=\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$.

故选择 D.

题28 约分：

(1)$\dfrac{24x^3y^2a^{12}}{18a^6b^6x^6}$；

(2)$\dfrac{(x-y)^3(7a+4b)^2}{(x-y)^2(7a+4b)^4}$；

(3)$\dfrac{-4a^{n+1}b^n}{10a^{m+1}b^2}$，$(m>n>2)$；

(4)$\dfrac{(2x-x^2)(x^2+4x+3)}{(x^2+x)(x^2+x-6)}$.

解 (1)原式$=\dfrac{4a^6y^2}{3x^3b^6}$.

(2)原式$=\dfrac{x-y}{(7a+4b)^2}$.

(3)原式$=-\dfrac{2b^{n-2}}{5a^{m-n}}$.

(4)原式$=\dfrac{x(2-x)(x+3)(x+1)}{x(x+1)(x+3)(x-2)}=-1$.

题29 先化简，再求值.

(1)$\dfrac{3+2x-x^2}{x^2-7x+12}$，其中$x=-\dfrac{1}{3}$；

(2)$\dfrac{x^2+8x+16}{x^2-8x-48}$，其中$x=4$；

(3)$\dfrac{a^2-b^2-c^2+2bc}{c^2-a^2-b^2+2ab}$，其中$a=3,b=7,c=-2$.

解 (1)原式$=-\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-7x+12}=-\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-4)}=-\dfrac{x+1}{x-4}$，

当$x=-\dfrac{1}{3}$时，原式$=-\dfrac{-\dfrac{1}{3}+1}{-\dfrac{1}{3}-4}=-\dfrac{\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{13}{3}}=\dfrac{2}{13}$.

(2)原式$=\dfrac{(x+4)^2}{(x-12)(x+4)}=\dfrac{x+4}{x-12}$，

当$x=4$时，原式$=\dfrac{4+4}{4-12}=-1$.

(3)原式$=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{c^2-(a-b)^2}=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{(c+a-b)(c-a+b)}=\dfrac{a+b-c}{c-a+b}$，

当$a=3,b=7,c=-2$时，原式$=\dfrac{3+7-(-2)}{(-2)-3+7}=6$.

题30 已知$x^2-16x-1=0$，求$x^3-\dfrac{1}{x^3}$的值.

解 $\because x^2-16x-1=0$，

$\therefore x^2=16x+1, x^2-1=16x, x^2-16x=1$.

$\therefore x^3-\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{x^6-1}{x^3}=\dfrac{(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{x^3}$

$=\dfrac{16x(x^4+x^2+x^2-16x)}{x^3}$

$=16(x^2+2-\frac{16}{x})=16(16x+1+2-\frac{16}{x})$

$=16(3+\frac{16x^2-16}{x})=16[3+\frac{16(x^2-1)}{x}]$

$=16(3+\frac{16\times16x}{x})=16\times259=4144.$

注：此题反复运用了已知条件的变形，最终达到化简求值的目的.

题31 计算：

(1) $\frac{3x^2y}{4ab^2}\cdot\frac{10a^3b}{9xy^2}$；

(2) $\frac{9a^2b^3}{14x^3y^2}\div\frac{3a^3b^2}{49x^3y^3}$；

(3) $(\frac{a^2}{-b})^5\cdot(\frac{b^2}{-a})^6\cdot(\frac{1}{ab})^7$；

(4) $(-3ab^3c^2)^2\div(-\frac{3b^2c}{a})^3$.

解 (1)原式$=\frac{30a^3bx^2y}{36ab^2xy^2}=\frac{5a^2x}{6by}$.

(2)原式$=\frac{9a^2b^3}{14x^3y^2}\cdot\frac{49x^3y^3}{3a^3b^2}=\frac{21by}{2a}$.

(3)原式$=(-\frac{a^{10}}{b^5})\cdot\frac{b^{12}}{a^6}\cdot\frac{1}{a^7b^7}=-\frac{1}{a^3}$.

(4)原式$=9a^2b^6c^4\div(-\frac{27b^6c^3}{a^3})=-9a^2b^6c^4\cdot\frac{a^3}{27b^6c^3}=-\frac{a^5c}{3}$.

题32 计算：

(1) $\frac{a^2-3ab+2b^2}{a^2-2ab+b^2}\div(a-2b)$；

(2) $\frac{x^2-x-xy+y}{x^3-x^4-x^2y+x^3y}\div\frac{x+y}{x^3}$；

(3) $\frac{a^2-1}{a^2-4}\cdot\frac{a+2}{a^2-2a+1}\cdot\frac{a^2-4a+4}{a+1}$；

(4) $\frac{x^2+xy-2y^2}{x^2-xy+y^2}\cdot\frac{5(x^3+y^3)}{x^2+3xy+2y^2}$；

(5) $(x^4-y^4)\div\frac{x^2+y^2}{xy}\div(6x-6y)$；

(6) $(\frac{x^2-2x-24}{x^2+2x+1})^3\cdot(\frac{x+1}{x-6})^4\cdot(\frac{1}{x+4})^3$.

解 (1)原式$=\frac{(a-b)(a-2b)}{(a-b)^2}\cdot\frac{1}{a-2b}=\frac{1}{a-b}$.

(2)原式$=-\frac{x^2-x-xy+y}{x^2(x^2-x-xy+y)}\cdot\frac{x^3}{x+y}=-\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{x+y}=-\frac{x}{x+y}$.

(3)原式$=\frac{(a+1)(a-1)}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{a+2}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a-2)^2}{a+1}=\frac{a-2}{a-1}$.

(4)原式$=\frac{(x+2y)(x-y)}{x^2-xy+y^2}\cdot\frac{5(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+2y)(x+y)}=5(x-y)$.

(5)原式$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{6(x-y)}=\frac{xy(x+y)}{6}$.

(6)原式$=\frac{(x-6)^3(x+4)^3}{(x+1)^6}\cdot\frac{(x+1)^4}{(x-6)^4}\cdot\frac{1}{(x+4)^3}=\frac{1}{(x+1)^2(x-6)}$.

题33 计算：

(1)$\frac{a^3+27b^3}{a^3-27b^3}\div\frac{(a^2+9b^2)^2-9a^2b^2}{(a^2+3ab+9b^2)^2}$；

(2)$\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+b^2-c^2-2ab}\cdot\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

解 (1)原式$=\frac{(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)}{(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)}\cdot\frac{(a^2+3ab+9b^2)^2}{(a^2+9b^2+3ab)(a^2+9b^2-3ab)}$

$=\frac{a+3b}{a-3b}$.

(2)原式$=\frac{(a+b)^2-c^2}{(a-b)^2-c^2}\cdot\frac{a^2-(b+c)^2}{a^2-(b-c)^2}$

$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a-b-c)}\cdot\frac{(a+b+c)(a-b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)}$

$=\frac{(a+b+c)^2}{(a-b+c)^2}$.

题34 通分：

(1)$\frac{7bc}{12a^2},\frac{8ac}{9b^2},\frac{3ab}{4c^2}$；

(2)$\frac{2}{3a-9},\frac{a-1}{a^2-2a-3},\frac{a}{a^2-5a+6}$；

(3)$\frac{1}{a^2-b^2-c^2+2bc},\frac{1}{b^2-c^2-a^2+2ac}$.

解 (1)∵最简公分母是$36a^2b^2c^2$，

∴$\frac{7bc}{12a^2}=\frac{21b^3c^3}{36a^2b^2c^2},\frac{8ac}{9b^2}=\frac{32a^3c^3}{36a^2b^2c^2},\frac{3ab}{4c^2}=\frac{27a^3b^3}{36a^2b^2c^2}$.

(2)∵最简公分母是$3(a+1)(a-2)(a-3)$，

∴$\frac{2}{3a-9}=\frac{2}{3(a-3)}=\frac{2(a+1)(a-2)}{3(a+1)(a-2)(a-3)}$，

$\frac{a-1}{a^2-2a-3}=\frac{a-1}{(a-3)(a+1)}=\frac{3(a-1)(a-2)}{3(a+1)(a-2)(a-3)}$，

$\frac{a}{a^2-5a+6}=\frac{a}{(a-2)(a-3)}=\frac{3a(a+1)}{3(a+1)(a-2)(a-3)}$.

(3)∵最简公分母是$(a+b-c)(a-b+c)(b-a+c)$，

∴$\frac{1}{a^2-b^2-c^2+2bc}=\frac{1}{(a+b-c)(a-b+c)}$

$=\frac{b-a+c}{(a+b-c)(a-b+c)(b-a+c)}$，

$\frac{1}{b^2-c^2-a^2+2ac}=\frac{1}{(b+a-c)(b-a+c)}$

$=\frac{a-b+c}{(a+b-c)(a-b+c)(b-a+c)}$.

题35 计算：

(1)$\frac{7x}{x-y}+\frac{7y}{y-x}$；

(2)$\frac{5x-7}{x^2+3x}-\frac{2x+5}{x^2+3x}-\frac{2x-15}{x^2+3x}$；

(3)$\frac{(m^2-m+1)^2}{(m-1)^3}+\frac{m^2}{(1-m)^3}$；

(4)$\frac{2x^2}{(x-1)(x-2)}+\frac{x}{(1-x)(x-2)}+\frac{1}{(x-1)(2-x)}$.

解 (1)原式$=\frac{7x}{x-y}-\frac{7y}{x-y}=\frac{7x-7y}{x-y}=7$.

(2)原式$=\frac{5x-7-2x-5-2x+15}{x^2+3x}=\frac{x+3}{x(x+3)}=\frac{1}{x}$.

(3)原式$=\frac{(m^2-m+1)^2}{(m-1)^3}-\frac{m^2}{(m-1)^3}=\frac{(m^2-m+1)^2-m^2}{(m-1)^3}$

$=\frac{(m^2+1)(m-1)^2}{(m-1)^3}=\frac{m^2+1}{m-1}$.

(4)原式$=\frac{2x^2}{(x-1)(x-2)}-\frac{x}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{(x-1)(x-2)}$

$=\frac{2x^2-x-1}{(x-1)(x-2)}=\frac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{2x+1}{x-2}$.

题36 计算：

(1)$\frac{a-9b}{6ab^2}-\frac{a+3b}{9a^2b}$；

(2)$2x+2+\frac{5}{x-1}$；

(3)$\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{x}{x+y}-\frac{y}{y-x}$；

(4)$\frac{y}{3y-9}-\frac{5}{y^2-y-6}$；

(5)$\frac{a-1}{a^2+3a+2}-\frac{6}{a^2-a-2}$；

(6)$\frac{1}{x^2-13x+42}+\frac{1}{x^2-14x+48}+\frac{1}{x^2-15x+56}$；

(7)$\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}+\frac{3a}{4b^2-9a^2}$；

(8)$\frac{(a+b)^2}{(a-b)(b-c)}-\frac{6ab}{(b-a)(b-c)}+\frac{9a^2+b^2}{(a-b)(c-b)}$.

解 (1)原式$=\frac{3a(a-9b)}{18a^2b^2}-\frac{2b(a+3b)}{18a^2b^2}=\frac{3a^2-27ab-2ab-6b^2}{18a^2b^2}$

$=\frac{3a^2-29ab-6b^2}{18a^2b^2}$.

(2)原式$=\frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}+\frac{5}{x-1}=\frac{2x^2-2+5}{x-1}=\frac{2x^2+3}{x-1}$.

(3)原式$=\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{x(x-y)}{x^2-y^2}+\frac{y(x+y)}{x^2-y^2}$

$=\frac{2xy+x^2-xy+xy+y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

$$=\frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-y}.$$

(4)原式$=\frac{y(y+2)}{3(y-3)(y+2)}-\frac{15}{3(y-3)(y+2)}$

$$=\frac{y^2+2y-15}{3(y-3)(y+2)}=\frac{(y+5)(y-3)}{3(y-3)(y+2)}=\frac{y+5}{3(y+2)}.$$

(5)原式$=\frac{(a-1)(a-2)}{(a+1)(a+2)(a-2)}-\frac{6(a+2)}{(a+1)(a+2)(a-2)}$

$$=\frac{a^2-3a+2-6a-12}{(a+1)(a+2)(a-2)}=\frac{a^2-9a-10}{(a+1)(a+2)(a-2)}$$

$$=\frac{(a-10)(a+1)}{(a+1)(a+2)(a-2)}=\frac{a-10}{a^2-4}.$$

(6)原式

$$=\frac{x-8}{(x-6)(x-7)(x-8)}+\frac{x-7}{(x-6)(x-7)(x-8)}+\frac{x-6}{(x-6)(x-7)(x-8)}$$

$$=\frac{x-8+x-7+x-6}{(x-6)(x-7)(x-8)}$$

$$=\frac{3x-21}{(x-6)(x-7)(x-8)}$$

$$=\frac{3}{(x-6)(x-8)}.$$

(7)原式

$$=\frac{3a+2b}{2(3a+2b)(3a-2b)}-\frac{3a-2b}{2(3a+2b)(3a-2b)}-\frac{6a}{2(3a+2b)(3a-2b)}$$

$$=\frac{3a+2b-3a+2b-6a}{2(3a+2b)(3a-2b)}=\frac{-6a+4b}{2(3a+2b)(3a-2b)}$$

$$=-\frac{1}{3a+2b}.$$

(8)原式$=\frac{(a+b)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{6ab}{(a-b)(b-c)}-\frac{9a^2+b^2}{(a-b)(b-c)}$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2+6ab-9a^2-b^2}{(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{8ab-8a^2}{(a-b)(b-c)}$$

$$=-\frac{8a(a-b)}{(a-b)(b-c)}=-\frac{8a}{b-c}.$$

题 37 计算：

(1)$\frac{a^2}{a-1}-a-1$；

(2)$\frac{3}{a^2-4a-5}-\frac{4}{a^2-2a-15}$；

(3)$\frac{3y}{x^2-y^2}+\frac{x}{x^2-2xy+y^2}+\frac{6y^2}{x^3-x^2y-xy^2+y^3}$.

解 (1)原式$=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}=\frac{a^2}{a-1}-\frac{a^2-1}{a-1}=\frac{1}{a-1}$.

(2)原式$=\frac{3(a+3)}{(a-5)(a+1)(a+3)}-\frac{4(a+1)}{(a-5)(a+1)(a+3)}$

$=\frac{3a+9-4a-4}{(a-5)(a+1)(a+3)}=\frac{-a+5}{(a-5)(a+1)(a+3)}$

$=-\frac{1}{(a+1)(a+3)}$.

(3)原式$=\frac{3y(x-y)}{(x+y)(x-y)^2}+\frac{x(x+y)}{(x+y)(x-y)^2}+\frac{6y^2}{(x+y)(x-y)^2}$

$=\frac{3xy-3y^2+x^2+xy+6y^2}{(x+y)(x-y)^2}=\frac{x^2+4xy+3y^2}{(x+y)(x-y)^2}$

$=\frac{(x+y)(x+3y)}{(x+y)(x-y)^2}=\frac{x+3y}{(x-y)^2}$.

题38 化简:

(1)$\frac{x-c}{(x-a)(x-b)}+\frac{b-c}{(a-b)(x-b)}+\frac{b-c}{(b-a)(x-a)}$;

(2)$\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{2c-a-b}{(c-b)(c-a)}$.

解 (1)原式$=\frac{x-c}{(x-b)(x-a)}+\frac{b-c}{a-b}\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-a}\right)$

$=\frac{x-c}{(x-b)(x-a)}+\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{b-a}{(x-a)(x-b)}$

$=\frac{x-c}{(x-b)(x-a)}-\frac{b-c}{(x-a)(x-b)}$

$=\frac{x-c-b+c}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{x-a}$.

(2)原式$=\frac{(a-b)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-c)+(b-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c-a)+(c-b)}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c-a}=0$.

题39 已知:$\frac{xy}{x+y}=a$,$\frac{xz}{x+z}=b$,$\frac{yz}{y+z}=c$,且$abc\neq0$.

求证:$x=\frac{2abc}{bc+ac-ab}$.

证明 $\because a=\frac{xy}{x+y}$,$b=\frac{xz}{x+z}$,$c=\frac{yz}{y+z}$,$abc\neq0$,

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$,$\frac{1}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$,$\frac{1}{c}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$,

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{2}{x}$,$\therefore \frac{bc+ac-ab}{abc}=\frac{2}{x}$,$\therefore x=\frac{2abc}{bc+ac-ab}$.

题40 证明:若$a+b+c=0$,则$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$.

证明 $\because a+b+c=0$,

$\therefore b+c=-a, \therefore (b+c)^2=a^2$,

$\therefore b^2+c^2+2bc=a^2, b^2+c^2-a^2=-2bc$.

同理，$c^2+a^2-b^2=-2ac, a^2+b^2-c^2=-2ab$.

$\therefore \frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}$

$=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab}$

$=-\frac{a}{2abc}-\frac{b}{2abc}-\frac{c}{2abc}$

$=-\frac{a+b+c}{2abc}=0$.

题 41 已知：$a+b+c=0, abc=8$. 求证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<0$.

证明 $\because a+b+c=0$,

$\therefore (a+b+c)^2=0$，即 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=0$,

$\therefore ab+bc+ac=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$,

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=-\frac{1}{16}(a^2+b^2+c^2)$.

$\because abc=8$, $\therefore a,b,c$ 均不能为零，$\therefore a^2+b^2+c^2>0$,

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<0$.

题 42 已知：$b+\frac{1}{c}=1, c+\frac{1}{a}=1$，求证：$\frac{ab+1}{b}=1$.

证明 $\because b+\frac{1}{c}=1, c+\frac{1}{a}=1$,

$\therefore b=1-\frac{1}{c}=\frac{c-1}{c}, \frac{1}{a}=1-c, \therefore \frac{1}{b}=\frac{c}{c-1}, a=\frac{1}{1-c}$,

$\therefore \frac{ab+1}{b}=a+\frac{1}{b}=\frac{1}{1-c}+\frac{c}{c-1}=\frac{1}{1-c}-\frac{c}{1-c}=1$.

题 43 计算：

(1) $\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}\cdot\frac{x^2-11x+30}{x^2-5x}-1$;

(2) $\frac{a^2-4}{3a+24}\div\frac{a^3-4a}{a^2+7a-8}+\frac{1}{3a}$;

(3) $\frac{y-3}{4y-8}\div(\frac{5}{y-2}-y-2)$;

(4) $(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}+2)\div(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-2)$;

(5) $\frac{a^3-27b^3}{a+2b}\cdot\frac{a-2b}{a^2+3ab+9b^2}\div\frac{a^2-5ab+6b^2}{a^2+2ab}$;

(6) $(\frac{3}{a-2}+\frac{12}{a^2-4})\div(\frac{2}{a-2}-\frac{1}{a+2})$;

(7)$1-\frac{8}{x^2-4}[(\frac{x^2+4}{4x}-1)\div(\frac{1}{2}-\frac{1}{x})]$;

(8)$\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}\div(1+\frac{2xy}{x^2-xy+y^2})$.

解 (1)原式$=\frac{x(x-3)}{(x-3)^2}\cdot\frac{(x-5)(x-6)}{x(x-5)}-1$

$=\frac{x-6}{x-3}-1=\frac{x-6-x+3}{x-3}=-\frac{3}{x-3}$.

(2)原式$=\frac{(a+2)(a-2)}{3(a+8)}\cdot\frac{(a+8)(a-1)}{a(a+2)(a-2)}+\frac{1}{3a}$

$=\frac{a-1}{3a}+\frac{1}{3a}=\frac{a-1+1}{3a}=\frac{1}{3}$.

(3)原式$=\frac{y-3}{4(y-2)}\div(\frac{5}{y-2}-\frac{y^2-4}{y-2})=\frac{y-3}{4(y-2)}\div\frac{9-y^2}{y-2}$

$=\frac{y-3}{4(y-2)}\cdot\frac{y-2}{(3+y)(3-y)}=-\frac{1}{4(y+3)}$.

(4)原式$=\frac{y^2+x^2+2xy}{xy}\div\frac{y^2+x^2-2xy}{xy}$

$=\frac{(x+y)^2}{xy}\cdot\frac{xy}{(x-y)^2}=\frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$.

(5)原式$=\frac{(a-3b)(a^2+3ab+9b^2)}{a+2b}\cdot\frac{a-2b}{a^2+3ab+9b^2}\cdot\frac{a(a+2b)}{(a-2b)(a-3b)}$

$=a$.

(6)原式$=(\frac{3a+6}{a^2-4}+\frac{12}{a^2-4})\div(\frac{2a+4}{a^2-4}-\frac{a-2}{a^2-4})$

$=\frac{3a+18}{a^2-4}\div\frac{a+6}{a^2-4}=\frac{3(a+6)}{a^2-4}\cdot\frac{a^2-4}{a+6}=3$.

(7)原式$=1-\frac{8}{x^2-4}[\frac{x^2+4-4x}{4x}\div\frac{x-2}{2x}]$

$=1-\frac{8}{x^2-4}[\frac{(x-2)^2}{4x}\cdot\frac{2x}{x-2}]$

$=1-\frac{8}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x-2}{2}$

$=1-\frac{4}{x+2}=\frac{x+2-4}{x+2}=\frac{x-2}{x+2}$.

(8)原式$=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)}\cdot\frac{(x+y)(x-y)}{(x-y)^2}\div\frac{x^2-xy+y^2+2xy}{x^2-xy+y^2}$

$=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\div\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=1$.

题 11 先化简,再求值:

(1)$(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})\div(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2)\div(1+\frac{y}{x})$,其中$x=\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{3}$;

(2)$(\frac{2a+1}{2a-1}-\frac{2a-1}{2a+1})\div[1\div(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{4a^2})]$,其中$a=-\frac{1}{4}$.

解 (1)原式$=\frac{x^2-y^2}{xy}\div\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}\div\frac{x+y}{x}$,

$$=\frac{(x+y)(x-y)}{xy}\cdot\frac{xy}{(x-y)^2}\cdot\frac{x}{x+y}$$

$$=\frac{x}{x-y},$$

当 $x=\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{3}$时,原式$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=3.$

(2)原式$=\frac{(2a+1)^2-(2a-1)^2}{4a^2-1}\div(1\div\frac{4a^2-4a+1}{4a^2})$

$$=\frac{8a}{4a^2-1}\div\frac{4a^2}{4a^2-4a+1}$$

$$=\frac{8a}{(2a+1)(2a-1)}\cdot\frac{(2a-1)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{2(2a-1)}{a(2a+1)}=\frac{4a-2}{2a^2+a}.$$

当 $a=-\frac{1}{4}$,原式$=\frac{-1-2}{2\times\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}=\frac{-3}{\frac{1}{8}-\frac{1}{4}}=24.$

题15 化简求值:$1-(a-\frac{1}{1-a})^2\div\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}$,其中 $a=\frac{1}{2}$.

解 原式$=1-(\frac{a-a^2-1}{1-a})^2\div\frac{a^2-a+1}{(a-1)^2}=1-\frac{(a^2-a+1)^2}{(a-1)^2}\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$

$$=1-(a^2-a+1)=-a^2+a.$$

当 $a=\frac{1}{2}$时,原式$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

题16 已知:$x^2-5x+1=0$,求 $x^4+\frac{1}{x^4}$的值.

解 $\because x^2-5x+1=0$,$\therefore x\neq0$. 两边都除以 x,得 $x-5+\frac{1}{x}=0$.

$\therefore x+\frac{1}{x}=5$,$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}+2=25$,$\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=23$. $\therefore(x^2+\frac{1}{x^2})^2=529$.

即 $x^4+2+\frac{1}{x^4}=529$,$\therefore x^4+\frac{1}{x^4}=527$.

题17 设 $b=a+1$,$c=a+2$,$d=a+3$,

求$\frac{a}{a+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+d}$的值.

解 $\because b=a+1$,$c=a+2$,$d=a+3$,

$\therefore\frac{a}{a+d}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{b+c+d}+\frac{d}{a+d}=\frac{a}{2a+3}+\frac{a+1}{3a+3}+\frac{a+2}{3a+6}+\frac{a+3}{2a+3}$

$=\frac{a+a+3}{2a+3}+\frac{a+1}{3(a+1)}+\frac{a+2}{3(a+2)}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.$

题48 已知$a+b+c=0$，$a+2b+3c=0$，且$abc\neq0$，求$\frac{ab+bc+ca}{b^2}$的值.

解 $\because a+b+c=0$，$a+2b+3c=0$，两式相减得：

$\therefore b+2c=0$，即$b=-2c$. $\therefore a-2c+c=0$，$\therefore a=c$，

$\therefore \frac{ab+bc+ca}{b^2}=\frac{-2c^2-2c^2+c^2}{(-2c)^2}=\frac{-3c^2}{4c^2}$.

$\because abc\neq0$，$\therefore c\neq0$，$\therefore$原式$=-\frac{3}{4}$.

题49 已知$\frac{1}{a}=\frac{2}{x+y}=\frac{3}{y+a}$，求$\frac{4a+x}{3y}$的值.

解 $\because \frac{1}{a}=\frac{3}{y+a}$，$\therefore y+a=3a$，$\therefore y=2a$，$\therefore 2a-y=0$，

$\because \frac{1}{a}=\frac{2}{x+y}$，$\therefore x+y=2a$，$\therefore x=2a-y=0$

由$x=0$，$y=2a$，得$\frac{4a+x}{3y}=\frac{4a}{6a}=\frac{2}{3}$.

题50 已知$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$，且$a,b,c$互不相等.

求证：$a^2b^2c^2=1$.

证明 $\because a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}$，$\therefore a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$，$\therefore a-b=\frac{b-c}{bc}$.

$\because a\neq b$，$\therefore a-b\neq0$，$\therefore bc=\frac{b-c}{a-b}$. 同理，$ac=\frac{c-a}{b-c}$，$ab=\frac{a-b}{c-a}$.

$\therefore bc\cdot ac\cdot ab=\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{c-a}{b-c}\cdot\frac{a-b}{c-a}=1$，$\therefore a^2b^2c^2=1$.

三、可化为一元一次方程的分式方程

题51 简述解可化为一元一次方程的分式方程的一般步骤.

答 (1)在方程的两边都乘以最简公分母，约去分母，化成整式方程；

(2)解这个整式方程；

(3)把整式方程的根代入最简公分母，看结果是否等于零，使最简公分母等于零的根是原方程的增根，必须舍去，但对于含有字母系数的分式方程，一般不要求检验.

题52 已知$\frac{x-1}{x+2}=\frac{y-3}{y-4}$，用含$x$的代数式表示$y$，应为(　　).

A. $y=\frac{10-x}{3}$　　B. $y=-x+2$　　C. $y=\frac{10-x}{2}$　　D. $y=7x-2$

解 $\because \frac{x-1}{x+2}=\frac{y-3}{y-4}$，$\therefore (x-1)(y-4)=(y-3)(x+2)$，

$\therefore xy-4x-y+4=xy+2y-3x-6$，$\therefore -3y=x-10$，$\therefore y=\dfrac{10-x}{3}$.

故选择 A.

题 53 关于 x 的方程$\dfrac{1+x}{1-x}=-\dfrac{a}{b}(a\neq b)$的解是（　　）.

A. $x=\dfrac{a+b}{a-b}$　　B. $x=\dfrac{ab}{a-b}$　　C. $x=\dfrac{a}{a-b}$　　D. $x=\dfrac{b}{a-b}$

解 $\because \dfrac{1+x}{1-x}=-\dfrac{a}{b}$，

$\therefore b(1+x)=-a(1-x)$，$\therefore b+bx=-a+ax$，$\therefore (a-b)x=a+b$.

$\because a\neq b$，$\therefore a-b\neq 0$，$\therefore x=\dfrac{a+b}{a-b}$. 故选择 A.

题 54 解方程$\dfrac{10x}{2x-1}+\dfrac{5}{1-2x}=2$的结果是（　　）.

A. $x=\dfrac{1}{2}$　　B. $x=2$　　C. $x=-\dfrac{7}{6}$　　D. 无解

解 把原方程两边都乘以 $2x-1$，得 $10x-5=4x-2$.

$\therefore 6x=3$，$\therefore x=\dfrac{1}{2}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$时，$2x-1=0$，$\therefore x=\dfrac{1}{2}$是原方程的增根，∴原方程无解.

故选择 D.

题 55 要使方程$\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{a}{x^2+x-2}$的解是正数，$a$ 应满足的条件是（　　）.

A. $a=-1$　　B. $a=-2$　　C. $a<-1$　　D. $a>-1$

解 把原方程两边都乘以 x^2+x-2，得 $x^2-1-x^2-2x=a$.

$\therefore 2x=-a-1$，$\therefore x=-\dfrac{a+1}{2}$.

要使 $x>0$，则$-\dfrac{a+1}{2}>0$，$\therefore a+1<0$，$\therefore a<-1$.

故选择 C.

题 56 如果关于 x 的方程$\dfrac{2}{x-3}=1-\dfrac{m}{x-3}$有增根，则 m 的值等于　　（　　）.

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. 3

解 把方程两边都乘以 $x-3$，得　$2=x-3-m$，$\therefore x=5+m$.

如果方程有增根，那么 $x=3$，即 $5+m=3$，$\therefore m=-2$. 应选择 B.

题 57 关于 x 的方程$(a-1)(a-4)x+2x=a-2(a\neq 2,a\neq 3)$的解是（　　）.

A. $x=\dfrac{1}{a-1}$　　B. $x=\dfrac{1}{a-2}$　　C. $x=\dfrac{1}{a-3}$　　D. $x=\dfrac{1}{a-4}$

解 由原方程，得$(a^2-5a+4)x+2x=a-2$，$(a^2-5a+6)x=a-2$，

$(a-2)(a-3)x=a-2$，

$\because a\neq 2, a\neq 3, \therefore x=\frac{1}{a-3}$. 故选择 C.

题 58 关于 x 的方程 $\frac{a+x}{b}=\frac{x-b}{a}+2(a\neq b)$ 的解为（　　）.

A. $x=a-b$　　B. $x=a+b$　　C. $x=2ab$　　D. $x=b-a$

解 把方程两边都乘以 ab，得 $a^2+ax=bx-b^2+2ab$，

$ax-bx=-a^2-b^2+2ab, (a-b)x=-(a-b)^2$.

$\because a\neq b, \therefore x=b-a$. 故选择 D.

题 59 如果分式 $\frac{3}{x^2+x-6}+\frac{2}{x^2+5x+6}$ 与 $\frac{4}{x^2-4}$ 相等，则 x 的值为（　　）.

A. -3　　B. 10　　C. -4　　D. 1

解 $\because \frac{3}{x^2+x-6}+\frac{2}{x^2+5x+6}=\frac{4}{x^2-4}$,

$\therefore \frac{3}{(x+3)(x-2)}+\frac{2}{(x+2)(x+3)}=\frac{4}{(x+2)(x-2)}$,

$\therefore 3(x+2)+2(x-2)=4(x+3)$.

解这个方程，得 $x=10$. 经检验：$x=10$ 是原方程的根. 故选择 B.

题 60 如果 $xy=a, xz=b, yz=c$，且 x, y, z 都不等于零，则 $x^2+y^2+z^2$ 等于（　　）.

A. $\frac{ab+ac+bc}{abc}$　　B. $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

C. $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$　　D. $\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{abc}$

解 $\because xy=a, xz=b, \therefore x^2yz=ab$.

又 $\because yz=c$，且 $yz\neq 0, \therefore x^2=\frac{ab}{c}$. 同理，$y^2=\frac{ac}{b}, z^2=\frac{bc}{a}$.

$\therefore x^2+y^2+z^2=\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}=\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{abc}$.

故选择 D.

题 61 解下列关于 x 的方程：

(1) $x+\frac{a}{b}x=a+b\quad(a+b\neq 0)$

(2) $(\frac{m}{n}+\frac{n}{m})x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x\quad(m+n\neq 0)$；

(3) $\frac{1}{3}a^2-ax=\frac{1}{3}b^2+bx\quad(a+b\neq 0)$；

(4) $ax(x+a)+bx(x+b)=(a+b)(x+a)(x+b)\quad(ab\neq 0)$.

解 (1)去分母，得　$bx+ax=b(a+b)$，

即　$(a+b)x=b(a+b)$. $\because a+b\neq 0, \therefore x=b$.

(2)去分母，得　$(m^2+n^2)x=m^2-n^2-2mnx$，

移项，得　$(m^2+2mn+n^2)x=m^2-n^2, (m+n)^2x=m^2-n^2$.

$\because m+n\neq 0$，$\therefore x=\dfrac{m^2-n^2}{(m+n)^2}$，$\therefore x=\dfrac{m-n}{m+n}$.

(3)移项，得　$-ax-bx=\dfrac{1}{3}b^2-\dfrac{1}{3}a^2$，

即　$(a+b)x=\dfrac{1}{3}(a^2-b^2)$

$\because a+b\neq 0$，$\therefore x=\dfrac{a^2-b^2}{3(a+b)}$，$\therefore x=\dfrac{a-b}{3}$.

(4)去括号，得　$ax^2+a^2x+bx^2+b^2x=(a+b)x^2+(a+b)^2x+ab(a+b)$.

整理，得　$(a^2+b^2)x-(a+b)^2x=ab(a+b)$，

$-2abx=ab(a+b)$.

$\because ab\neq 0$，$\therefore x=-\dfrac{a+b}{2}$.

小结：解含字母系数的方程，在消未知数的系数时，一定要强调未知数的系数不等于零，如果方程的解是分式形式，必须化成最简分式或整式.

题 62　在公式 $s=vt+\dfrac{1}{2}at^2(t\neq 0)$ 中：

(1)已知 s,t,a，求 v；(2)已知 s,t,v，求 a.

解　(1)移项，得 $s-\dfrac{1}{2}at^2=vt$.

因为 $t\neq 0$，两边都除以 t，得，$v=\dfrac{s}{t}-\dfrac{1}{2}at$，即 $v=\dfrac{2s-at^2}{2t}$.

(2)移项，得 $s-vt=\dfrac{1}{2}at^2$，$\therefore 2s-2vt=at^2$.

因为 $t\neq 0$，两边都除以 t^2，得 $a=\dfrac{2s-2vt}{t^2}$.

题 63　已知 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$. 求证：$\dfrac{m}{n}=\dfrac{a-b}{a+b}$.

证明　$\because \dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}$，

$\therefore m=\dfrac{ab}{a+b}$，$n=\dfrac{ab}{a-b}$，$\therefore \dfrac{m}{n}=\dfrac{ab}{a+b}\cdot\dfrac{a-b}{ab}=\dfrac{a-b}{a+b}$.

题 64　解下列方程：

(1)$\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{1}{x+3}$；　　(2)$\dfrac{1}{x-3}+2=\dfrac{4-x}{x-3}$；

(3)$\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2x+6}$；　　(4)$\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{3}{1-x}-\dfrac{5}{x+1}$.

解　(1)方程两边都乘以 $(x-1)(x+3)$，得

$5(x+3)=x-1$，$\therefore 5x+15=x-1$.

解得 $x=-4$. 经检验：$x=-4$ 是原方程的根.

(2)方程两边都乘以 $x-3$，得

$1+2(x-3)=4-x$，$\therefore 1+2x-6=4-x$.

解得 $x=3$. 经检验:$x=3$ 是原方程的增根,∴原方程无解.

(3)方程两边都乘以 $2(x+3)$,得

$4+3(x+3)=1$,∴$4+3x+9=1$.

解得 $x=-4$. 经检验:$x=-4$ 是原方程的根.

(4)方程两边都乘以 $1-x^2$,得

$1=3(1+x)-5(1-x)$,∴$1=3+3x-5+5x$.

解得 $x=\frac{3}{8}$. 经检验:$x=\frac{3}{8}$是原方程的根.

题65 解下列方程:

(1)$\frac{4}{x+2}-\frac{2-x}{2+x}=3$;　　(2)$\frac{1+x}{2x-1}+\frac{5}{1-2x}=14$;

(3)$\frac{x+1}{x-1}-\frac{4}{x^2-1}=1$;　　(4)$\frac{6x-1}{3x+2}-\frac{4x-7}{2x-5}=0$;

(5)$\frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1$;　　(6)$\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{3x+1}{3x-1}=\frac{12}{1-9x^2}$;

(7)$\frac{x}{x^2-1}-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-1}=0$;　　(8)$\frac{2}{1-x^2}+\frac{5}{1-2x+x^2}=\frac{3}{1+2x+x^2}$.

解 (1)方程两边都乘以 $x+2$,得

$4-2+x=3(x+2)$,

解得 $x=-2$. 经检验 $x=-2$ 是原方程的增根,∴原方程无解.

(2)方程两边都乘以 $2x-1$,得

$1+x-5=14(2x-1)$,

解得 $x=\frac{10}{27}$. 经检验 $x=\frac{10}{27}$是原方程的根.

(3)方程两边都乘以 x^2-1,得

$(x+1)^2-4=x^2-1$,∴$x^2+2x+1-4=x^2-1$.

解得 $x=1$. 经检验 $x=1$ 是原方程的增根,∴原方程无解.

(4)方程两边都乘以$(3x+2)(2x-5)$,得

$(6x-1)(2x-5)-(4x-7)(3x+2)=0$,

∴$12x^2-32x+5-12x^2+13x+14=0$,

解得 $x=1$. 经检验 $x=1$ 是原方程的根.

(5)方程两边都乘以$(3x-2)(2x-3)$,得

$(9x-7)(2x-3)-(4x-5)(3x-2)=(3x-2)(2x-3)$,

∴$18x^2-41x+21-12x^2+23x-10=6x^2-13x+6$.

解得 $x=1$. 经检验 $x=1$ 是原方程的根.

(6)方程两边都乘以 $1-9x^2$,得

$(1-3x)^2-(1+3x)^2=12$,

∴$1-6x+9x^2-1-6x-9x^2=12$.

解得 $x=-1$. 经检验 $x=-1$ 是原方程的根.

(7)方程两边都乘以$(x+1)(x-1)(x+2)$,得

$x(x+2)-2(x+1)(x-1)+(x+1)(x+2)=0$,

$\therefore x^2+2x-2x^2+2+x^2+3x+2=0$.

解得 $x=-\frac{4}{5}$. 经检验 $x=-\frac{4}{5}$是原方程的根.

(8)方程两边都乘以$(1+x)^2(1-x)^2$,得

$2(1+x)(1-x)+5(1+x)^2=3(1-x)^2$,

$\therefore 2-2x^2+5+10x+5x^2=3-6x+3x^2$.

解得 $x=-\frac{1}{4}$. 经检验 $x=-\frac{1}{4}$是原方程的根.

题66 a 为何值时,关于 x 的方程$\frac{x+1}{x-2}=\frac{2a-3}{a+5}$的解等于零?

解 方程两边都乘以$(a+5)(x-2)$,得

$ax+a+5x+5=2ax-4a-3x+6$,

整理,得$(8-a)x=1-5a$.

当 $a\neq 8$ 时,方程有惟一解 $x=\frac{1-5a}{8-a}$.

设$\frac{1-5a}{8-a}=0$,则 $1-5a=0$,$\therefore a=\frac{1}{5}$.

综上所述,当 $a=\frac{1}{5}$时,原方程的解等于零.

题67 m 为何值时,关于 x 的方程$\frac{2}{x-2}+\frac{mx}{x^2-4}=\frac{3}{x+2}$会产生增根?

解 方程两边都乘以 x^2-4,得 $2x+4+mx=3x-6$.

整理,得$(m-1)x=-10$.

当 $m\neq 1$ 时,$x=-\frac{10}{m-1}$.

如果方程产生增根,那么 $x^2-4=0$,即 $x=2$ 或 $x=-2$.

(1)若 $x=2$,则$-\frac{10}{m-1}=2$,$\therefore m=-4$;

(2)若 $x=-2$,则$-\frac{10}{m-1}=-2$,$\therefore m=6$.

综上所述,当 $m=-4$ 或 6 时,原方程会产生增根.

题68 求 x 为何值时,代数式$\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}$的值等于 2?

解 由已知,得$\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}=2$,

即 $2+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}=2$,$\therefore \frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}=0$.

两边都乘以 $x(x+3)(x-3)$,得

$3x(x-3)-x(x+3)-2(x+3)(x-3)=0$,

$3x^2-9x-x^2-3x-2x^2+18=0$.

解得 $x=\frac{3}{2}$. 经检验:$x=\frac{3}{2}$是原方程的根.

∴当 $x=\frac{3}{2}$时,代数式$\frac{2x+9}{x+3}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x}$的值等于 2.

四、可化为一元一次方程的分式方程的应用

题69 如果 m 个人完成一项工作需要 d 天,则$(m+n)$个人完成此项工作需要(　　).

A. $(d+b)$天　　B. $(d-n)$天　　C. $(\frac{md}{m+n})$天　　D. $(\frac{d}{m+n})$天

解 把整个工作看作 1,则每人每天完成整个工作的$\frac{1}{md}$,而$(m+n)$个人每天完成整个工作的$\frac{m+n}{md}$. 因此,$(m+n)$个人完成此项工作需要 $1\div\frac{m+n}{md}$天,即$\frac{md}{m+n}$天. 故选择 C.

题70 把含盐 $m\%$的盐水 100 克,配制成含盐 $2m\%$的盐水,需要加入盐的重量为(　　).

A. $\frac{m}{100+m}$　　B. $\frac{2m}{100-m}$　　C. $\frac{50m}{100+m}$　　D. $\frac{50m}{50-m}$

解 设需要加 x 克盐. 根据题意,得$\frac{m+x}{100+x}\times 100\%=2m\%$

解这个方程,得 $x=\frac{50m}{50-m}$.

故选择 D.

题71 某人上山和下山的路程都是 s 千米,上山的速度为 a 千米/时,下山的速度为 b 千米/时,则此人上山和下山的平均速度为(　　).

A. $\frac{a+b}{2}$千米/时　　B. $\frac{2s}{a+b}$千米/时

C. $\frac{2ab}{a+b}$千米/时　　D. $\frac{s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}}$千米/时

解 根据已知,上山所用的时间为$\frac{s}{a}$小时,下山所用的时间为$\frac{s}{b}$小时,一共为$(\frac{s}{a}+\frac{s}{b})$小时,而上山、下山的总路程为 $2s$ 千米,所以平均速度为$\frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}}=\frac{2ab}{a+b}$. 应选择 C.

题72 沿河两地相距 m 千米，船在静水中的速度为 b 千米/时，水流的速度为 c 千米/时，则船往返一次所需的时间是(　　).

A. $\frac{2m}{b+c}$小时　　B. $(\frac{m}{b+c}+\frac{m}{b-c})$小时

C. $\frac{2m}{b-c}$小时　　D. $(\frac{m}{b}+\frac{m}{c})$小时

解 由已知，船顺流行驶的速度为$(b+c)$千米/时，逆流行驶的速度为$(b-c)$千米/时. 因此，往返一次共用$(\frac{m}{b+c}+\frac{m}{b-c})$小时. 故选择B.

题73 有两块稻田，第一块有 m 亩，第二块有 n 亩，如果两块稻田的亩产量分别为 a 千克和 b 千克，那么这两块稻田的平均亩产量为(　　).

A. $\frac{am+bn}{m+n}$千克　B. $\frac{a+b}{2}$千克　C. $\frac{am+bn}{a+b}$千克　D. $\frac{a+b}{m+n}$千克

解 由已知，第一块稻田的产量为 ma 千克，第二块稻田的产量为 bn 千克，因此，两块稻田的平均亩产量为$\frac{am+bn}{m+n}$千克，故选择A.

题74 甲、乙两地相距 s 千米，某人从甲地出发，以 v 千米/时的速度步行，走了 a 小时后改乘汽车，又过 b 小时到达乙地，则汽车的速度为(　　).

A. $\frac{s}{a+b}$千米/时　　B. $\frac{s-av}{b}$千米/时

C. $\frac{s-av}{a+b}$千米/时　　D. $\frac{2s}{a+b}$千米/时

解 由已知，此人步行的路程为 av 千米，所以乘车的路程为$(s-av)$千米，又已知乘车的时间为 b 小时，故汽车的速度为$\frac{s-av}{b}$千米/时. 应选择B.

题75 甲、乙两个工程队，甲单独完成某项工程需 a 天，乙单独完成这项工程需要 b 天. 若甲、乙合作 c 天后，再由甲单独完成，则甲还需要干的天数为(　　).

A. $\frac{1}{a}-\frac{a}{a+b}$　B. $\frac{a+b+c}{a}$　C. $a-c-\frac{ac}{b}$　D. $a-c+\frac{ac}{b}$

解 设甲还需要干 x 天，根据题意，得　$\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{x}{a}=1.$

解这个方程，得　$x=a-c-\frac{ac}{b}.$

故选择C.

题76 加工一批零件，甲单独做需要 m 小时完成，乙单独做需要 n 小时完成，则甲、乙两人合做需要(　　).

A. $(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$小时　B. $\frac{m+n}{m}$小时　C. $\frac{mn}{m+n}$小时　D. $\frac{m+n}{n}$小时

解 由已知，甲每小时完成整个工作的$\frac{1}{m}$，乙每小时完成$\frac{1}{n}$，所以，甲和乙合做，每小

时完成$(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$. 由此可知. 甲、乙合做完成整个工作需要$1\div(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})$小时,即$\frac{mn}{m+n}$小时. 故选择C.

题77 m个男孩和n个女孩的平均年龄为x岁,如果女孩的平均年龄为y岁,那么男孩的平均年龄为(　　).

A. $\frac{mx+ny}{m+n}$岁　　B. $\frac{mx-yn}{m}$岁

C. $\frac{(m+n)x+ny}{m+n}$岁　　D. $\frac{(m+n)x-ny}{m}$岁

解 由已知,这些男孩和女孩的年龄之和为$(m+n)x$岁,其中女孩的年龄之和为ny岁,所以男孩的年龄之和为$[(m+n)x-ny]$岁,由此可知,男孩的平均年龄为$\frac{(m+n)x-ny}{m}$岁. 故选择D.

题78 一个分数的分母比分子大7,如果把分子加上17,分母减去4,那么所得的分数等于原分数的倒数,原分数是(　　).

A. $\frac{23}{16}$　　B. $\frac{10}{3}$　　C. $\frac{3}{10}$　　D. $\frac{16}{23}$

解 设原分数为$\frac{x}{x+7}$. 根据题意,得　$\frac{x+17}{x+3}=\frac{x+7}{x}$.

方程两边都乘以$x(x+3)$,得　　$x^2+17x=x^2+10x+21$.

解得　$x=3$. 经检验:$x=3$是原方程的根. ∴原分数是$\frac{3}{10}$,故选择C.

题79 有30%的盐水50克,要配制成25%的盐水,需要加x克水,则以下所列的关于x的方程中正确的是(　　).

A. $\frac{30}{50+x}=25\%$　　B. $\frac{50}{50+x}=25\%$

C. $\frac{15}{15+x}=25\%$　　D. $\frac{15}{50+x}=25\%$

解 50克30%的盐水中含盐量为$50\times30\%$克. 根据题意,得

$\frac{50\times30\%}{50+x}\times100\%=25\%$,　即$\frac{15}{50+x}=25\%$.

故选择D.

题80 甲、乙两人同时同地出发同向而行,甲每小时走a千米,乙每小时走$b(a>b)$千米,如果从出发点到终点的距离为m千米,那么甲比乙提前到达终点(　　).

A. $(\frac{m}{b}-\frac{m}{a})$小时　B. $(\frac{m}{a}-\frac{m}{b})$小时　C. $\frac{m}{a-b}$小时　D. $\frac{m}{a+b}$小时

解 由已知,甲走的时间为$\frac{m}{a}$小时,乙走的时间为$\frac{m}{b}$小时,所以甲比乙提前$(\frac{m}{b}-\frac{m}{a})$小时到达终点,应选择A.

题81 某工人现在平均每天比原计划多做20个零件，已知现在做4000个零件和原计划做3000个零件所用的时间相同，问此工人现在平均每天做多少个零件？

解 设现在平均每天做x个零件，则原计划每天做$(x-20)$个零件．根据题意，得

$$\frac{4000}{x}=\frac{3000}{x-20}.$$

方程两边都乘以$x(x-20)$，得 $4000(x-20)=3000x$.

解得 $x=80$．经检验：$x=80$是原方程的根．

答：现在平均每天做80个零件．

题82 某车间有甲、乙两个小组，甲组的工作效率比乙组的高25%，因此甲组加工2000个零件所用的时间比乙组加工1800个零件所用的时间少半小时，问甲、乙两组每小时各加工多少个零件？

解 设乙组每小时加工x个零件，则甲组每小时加工$(1+25\%)x$个零件．根据题意，得 $\frac{2000}{(1+25\%)x}+\frac{1}{2}=\frac{1800}{x}$.

整理，得 $\frac{1600}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1800}{x}$.

解这个方程得 $x=400$．经检验：$x=400$是原方程的根．

当$x=400$时，$(1+25\%)x=(1+25\%)\times400=500$.

答：甲组每小时加工500个零件，乙组每小时加工400个零件．

题83 甲、乙两个班共88人，甲班人数和乙班人数的比为$\frac{4}{7}$，求两班各有多少人？

解 设甲班有x人，则乙班有$(88-x)$人．根据题意，得

$$\frac{x}{88-x}=\frac{4}{7}.$$

解得 $x=32$，经检验：$x=32$是原方程的根．

当$x=32$时，$88-x=56$.

答：甲班有32人，乙班有56人．

题84 甲、乙两个工程队共同完成一项工程，乙队先单独做1天后，再由两队合作2天就完成了全部工程．已知甲队单独完成工程所需的天数是乙队单独完成所需天数的$\frac{2}{3}$，求甲、乙两队单独完成各需多少天？

解 设乙队单独完成需x天，则甲队单独完成需$\frac{2}{3}x$天，根据题意，得

$$\frac{1}{x}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{3}x}\right)=1,\qquad 即\quad \frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=1.$$

解得 $x=6$，经检验：$x=6$是原方程的根．

$x=6$时，$\frac{2}{3}x=4$.

答：甲、乙两队单独完成分别需4天、6天．

题85 某校学生进行急行军训练，预计行36千米的路程可在下午5点到达，后来由于把速度加快$\frac{1}{5}$，结果于下午4点到达，求原计划行军的速度.

解 设原计划的速度为x千米/时，根据题意，得

$$\frac{36}{x}-1=\frac{36}{(1+\frac{1}{5})x} \quad 即 \quad \frac{36}{x}-1=\frac{30}{x}.$$

解得 $x=6$. 经检验：$x=6$是原方程的根.

答：原计划行军的速度为6千米/时.

题86 一列火车从车站开出，预计行程450千米，当它开出3小时后，因特殊任务多停一站，耽误30分钟，后来把速度提高了0.2倍，结果准时到达目的地，求这列火车的速度.

解 设这列火车原来的速度为x千米/时，根据题意，得

$$\frac{450}{x}=3\frac{1}{2}+\frac{450-3x}{1.2x}.$$

方程两边都乘以$12x$，得 $5400=42x+4500-30x$，

解得 $x=75$. 经检验：$x=75$是原方程的根.

答：这列火车原来的速度为75千米/时.

题87 甲、乙两地相距19千米，某人从甲地去乙地，先步行7千米，然后改骑自行车，共用了2小时到达乙地，已知这个人骑自行车的速度是步行速度的4倍. 求步行的速度和骑车的速度各是多少？

解 设步行的速度为x千米/时，则骑车的速度为$4x$千米/时. 根据题意，得

$$\frac{7}{x}+\frac{12}{4x}=2.$$

解得 $x=5$. 经检验：$x=5$是原方程的解.

当$x=5$时，$4x=20$.

答：这个人步行的速度为5千米/时，骑车的速度为20千米/时.

题88 甲、乙两地相距150千米，一轮船从甲地逆流航行至乙地，然后又从乙地返回甲地，已知水流速度为3千米/时，回来时所需的时间等于去时的$\frac{3}{4}$，求轮船在静水中的速度.

解 设轮船在静水中的速度为x千米/时，根据题意，得

$$\frac{150}{x+3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{150}{x-3}.$$

解得 $x=21$. 经检验：$x=21$是原方程的根.

答：轮船在静水中的速度为21千米/时.

题89 有三堆数量相同的煤，用小卡车单独运第一堆煤的天数是用大卡车单独运第二堆煤的1.5倍. 大、小卡车又同时运第三堆煤，6天运了一半. 问大、小卡车单独运一

堆煤各需多少天？

解 设大卡车单独运一堆煤需 x 天，则小卡车单独运一堆煤需 $1.5x$ 天．根据题意，得

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{1.5x}=\frac{1}{2},\text{即}\frac{6}{x}+\frac{4}{x}=\frac{1}{2}.$$

解得 $x=20$．经检验：$x=20$ 是原方程的解．

答：大小卡车单独运一堆煤分别需 20 天、30 天．

题 90 甲、乙两地相距 270 千米，两辆汽车都从甲地开往乙地，大汽车比小汽车提前出发 5 小时，小汽车比大汽车晚到 30 分钟．已知小汽车和大汽车的速度之比为 5∶2，求两辆汽车的速度各是多少？

解 设小汽车的速度为 $5x$ 千米/时，大汽车的速度为 $2x$ 千米/时．根据题意，得

$$\frac{270}{5x}+5-\frac{1}{2}=\frac{270}{2x}.$$

解得 $x=18$．经检验：$x=18$ 是原方程的解．

当 $x=18$ 时，$5x=90$，$2x=36$．

答：小汽车的速度为 90 千米/时，大汽车的速度为 36 千米/时．

题 91 甲、乙两队共同合作，3 天内完成工程的一半，余下的工程由甲队单独做 1 天，再由乙队单独做 6 天后全部完成，问甲、乙两队单独完成工程各需多少天？

解 设甲队单独完成工程需 x 天，乙队单独完成工程需 y 天，根据题意得

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=10,\\ y=15.\end{cases}$ 经检验：$\begin{cases}x=10,\\ x=15\end{cases}$ 是原方程组的解．

答：甲、乙两队单独完成工程分别需 10 天、15 天．

题 92 轮船在一次航行中顺流航行 105 千米，逆流航行 60 千米，共用了 9 小时；在另一次航行中，用相同的时间，顺流航行 84 千米，逆流航行 75 千米，求这艘轮船在静水中的速度和水流速度．

解 设这艘轮船在静水中的速度为 x 千米/时，水流速度为 y 千米/时，根据题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{105}{x+y}+\dfrac{60}{x-y}=9,\\ \dfrac{84}{x+y}+\dfrac{75}{x-y}=9.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=18,\\ y=3.\end{cases}$ 经检验：$\begin{cases}x=18,\\ y=13\end{cases}$ 是原方程组的解．

答：轮船在静水中的速度为 18 千米/时，水流速度为 3 千米/时．

第九章　数的开方

题 1　简述数的平方根与算术平方根之间的区别与联系.

答　任何正数 a 的平方根有两个,它们互为相反数,记作 $\pm\sqrt{a}$;任何正数 a 的算术平方根只有一个,它是指 a 的正的平方根,记作 $\sqrt{a}$.

0 的平方根和算术平方根都是指 0 本身.

题 2　简述数的平方根与立方根之间的区别.

答　一个正数的平方根有两个,而一个正数的立方根只有一个;任何负数没有平方根,但有立方根.

题 3　下列各式中正确的是(　　).

A. $\sqrt{4^2-3^2}=4-3=1$　　B. $-\sqrt{-49}=-(-7)=7$

C. $\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$　　D. $\sqrt{1\frac{9}{16}}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

解　因为 $\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}\neq1$,故 A 不正确;因为负数没有平方根,所以 $\sqrt{-49}$无意义,故 B 不正确;因为$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{13}{36}}\neq\frac{5}{6}$,故 C 也不正确,因此选择 D.

题 4　下列五个命题中,真命题的个数是(　　).

(1)零是最小的实数;　　(2)数轴上的所有点都表示实数;

(3)无理数就是带根号的数;　　(4)$-\frac{1}{8}$的立方根是$\pm\frac{1}{2}$

(5)一个实数的平方根有两个,它们互为相反数.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解　因为不存在最小的实数,故命题(1)不正确;因为 π 是无理数,π 不带根号,故命题(3)不正确;$-\frac{1}{8}$的立方根是$-\frac{1}{2}$,故命题(4)不正确;因为负数没有平方根,故命题(5)不正确;只有命题(2)正确,因此选择 A.

题 5　若$(3x+2)^3-1=\frac{61}{64}$,则 x 等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{4}$　　D. $-\frac{9}{4}$

解 $\because (3x+2)^3-1=\frac{61}{64}$,

$\therefore (3x+2)^3=\frac{125}{64}$, $\therefore 3x+2=\frac{5}{4}$, $\therefore x=-\frac{1}{4}$. 故选择 C.

题 6 若某数的立方根等于这个数的算术平方根，则这个数等于(　　).

A. 0　　B. ±1　　C. −1 或 0　　D. 0 或 1

解 设此数为 x，则 $\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}$. $\because \sqrt{x}\geqslant 0$, $\therefore \sqrt[3]{x}\geqslant 0$, $\therefore x\geqslant 0$. 因此，只能考虑选 A 或 D. 当 $x=0$ 时，$\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}=0$；当 $x=1$ 时，$\sqrt[3]{x}=\sqrt{x}=1$. 故选择 D.

题 7 等式 $\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$ 成立的条件是(　　).

A. a 是任意实数　　B. $a>0$　　C. $a<0$　　D. $a\geqslant 0$

解 对于任意实数 a，$\sqrt{a^2}$ 都有意义；当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a}$ 才有意义. 因此，当 $a\geqslant 0$ 时，$\sqrt{a^2}=a$，$(\sqrt{a})^2=a$，所以，$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$ 成立. 应选择 D.

题 8 求下列各式的值：

(1) $\sqrt{\frac{25}{361}}$；　(2) $-\sqrt{14\frac{1}{16}}$；(3) $-\sqrt{1\frac{99}{225}}$；(4) $\pm\sqrt{10^6}$.

解 (1) $\because \frac{25}{361}=\left(\frac{5}{19}\right)^2$，$\therefore \sqrt{\frac{25}{361}}=\frac{5}{19}$；

(2) $\because 14\frac{1}{16}=\frac{225}{16}=\left(\frac{15}{4}\right)^2$，$\therefore -\sqrt{14\frac{1}{16}}=-\frac{15}{4}$；

(3) $\because 1\frac{99}{225}=\frac{324}{225}=\left(\frac{18}{15}\right)^2$，$\therefore -\sqrt{1\frac{99}{225}}=-\frac{18}{15}=-\frac{6}{5}$；

(4) $\because 10^6=(1000)^2$，$\therefore \pm\sqrt{10^6}=\pm 1000$.

题 9 求下列各式中的 x：

(1) $64x^2=25$；　(2) $(x-1)^2=289$；

(3) $(5x-3)^2=20\frac{1}{4}$；　(4) $5x^2=76.3$(精确到 0.01).

解 (1) $\because 64x^2=25$，$\therefore x^2=\frac{25}{64}$，$x=\pm\frac{5}{8}$；

(2) $\because (x-1)^2=289$，$\therefore x-1=\pm 17$.

当 $x-1=17$ 时，$x=18$；当 $x-1=-17$ 时，$x=-16$.

(3) $\because (5x-3)^2=20\frac{1}{4}$，$\therefore 5x-3=\pm\frac{9}{2}$.

当 $5x-3=\frac{9}{2}$ 时，$x=\frac{3}{2}$；当 $5x-3=-\frac{9}{2}$ 时，$x=-\frac{3}{10}$.

(4) $\because 5x^2=76.3$，$\therefore x^2=15.26$，$\therefore x=\pm\sqrt{15.26}$；

查表得，$\sqrt{15.26}=3.907\approx3.91$，$\therefore x\approx\pm3.91$.

题10 求下列各数的立方根：

(1) $-\frac{1}{8}$；　(2) $-3\frac{3}{8}$；　(3) a^3；　(4) $-a^3$.

解 (1) $\because(-\frac{1}{2})^3=-\frac{1}{8}$，$\therefore\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$；

(2) $\because-3\frac{3}{8}=-\frac{27}{8},\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{27}{8}$，$\therefore\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}=-\frac{3}{2}$；

(3) $\because a^3=a,\therefore\sqrt[3]{a^3}=a$；

(4) $\because(-a)^3=-a^3$，$\therefore\sqrt[3]{-a^3}=-a$.

题11 求下列各式中的 x：

(1) $8x^3+1=0$；　(2) $(x-1)^3=64$；

(3) $x^3+\frac{46}{27}=2$；　(4) $x^3+46810=0$(精确到 0.01).

解 (1) $\because8x^3+1=0$，$\therefore x^3=-\frac{1}{8}$，$\therefore x=-\frac{1}{2}$；

(2) $\because(x-1)^3=64$，$\therefore x-1=4$，$\therefore x=5$；

(3) $\because x^3+\frac{46}{27}=2$，$\therefore x^3=\frac{8}{27}$，$\therefore x=\frac{2}{3}$；

(4) $\because x^3+46810=0$，$\therefore x^3=-46810$，$\therefore x=-\sqrt[3]{46810}$，

查表得，$\sqrt[3]{46.8}=3.604$，$\therefore x\approx-36.04$.

题12 求下列各式的值：

(1) $\sqrt[3]{1-0.936}$；　(2) $-\sqrt[3]{91\frac{1}{8}}$；　(3) $-\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}$；

(4) $-\sqrt[3]{-\frac{343}{216}}$；　(5) $\sqrt[3]{-1-\frac{61}{64}}$；　(6) $\sqrt[3]{-16+10\frac{21}{125}}$.

解 (1) $\sqrt[3]{1-0.936}=\sqrt[3]{0.064}=0.4$；

(2) $-\sqrt[3]{91\frac{1}{8}}=-\sqrt[3]{\frac{729}{8}}=-\frac{9}{2}$；

(3) $-\sqrt[3]{5-\frac{10}{27}}=-\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=-\frac{5}{3}$；

(4) $-\sqrt[3]{-\frac{343}{216}}=-(-\frac{7}{6})=\frac{7}{6}$；

(5) $\sqrt[3]{-1-\frac{61}{64}}=\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}=-\frac{5}{4}$；

(6) $\sqrt[3]{-16+10\frac{21}{125}}=\sqrt[3]{-\frac{729}{125}}=-\frac{9}{5}$.

题13 计算(精确到0.01)：

(1) $\sqrt{8}-\sqrt{2}-3.612$；　　(2) $2\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{7}$；

(3) $4.85+\frac{2}{7}-\sqrt{3}+\pi$；　　(4) $\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}-4$；

(5) $\frac{1}{8}+\sqrt[3]{9}-|\sqrt{5}-\pi|$.

解 (1) $\sqrt{8}-\sqrt{2}-3.612=2.828-1.414-3.612\approx-2.20$；

(2) $2\sqrt{3}+\sqrt{15}-2\sqrt{7}=2\times1.732+3.873-2\times2.646\approx2.05$；

(3) $4.85+\frac{2}{7}-\sqrt{3}+\pi\approx4.85+0.286-1.732+3.142\approx6.55$；

(4) $\sqrt[3]{3}+\sqrt{3}-4=1.442+1.732-4\approx-0.83$；

(5) $\frac{1}{8}+\sqrt[3]{9}-|\sqrt{5}-\pi|\approx0.125+2.080-|2.236-3.142|\approx1.30$.

题14 已知 $y=x^2-3$，且 y 的算术平方根为4，求 x 的值.

解 ∵ y 的算术平方根是4，∴ $y=4^2=16$.

又∵ $y=x^2-3$，∴ $x^2=y+3=16+3=19$，∴ $x=\pm\sqrt{19}$.

题15 某数的立方根的绝对值等于5，求这个数.

解 设这个数为 x，根据题意，得 $|\sqrt[3]{x}|=5$，∴ $\sqrt[3]{x}=\pm5$.

若 $\sqrt[3]{x}=5$，则 $x=125$；若 $\sqrt[3]{x}=-5$，则 $x=-125$.

题16 某数的立方与28的和为1，求这个数.

解 设这个数为 x，根据题意，得 $x^3+28=1$.

∴ $x^3=-27$，∴ $x=-3$.

题17 两个无理数的和一定是无理数吗？举例说明.

解 两个无理数的和不一定是无理数，例如，$\sqrt{3}$ 是无理数，$2-\sqrt{3}$ 也是无理数，但是，$\sqrt{3}+(2-\sqrt{3})=2$ 是有理数.

题18 两个无理数的积一定是无理数吗？举例说明.

解 两个无理数的积不一定是无理数，例如，$\sqrt{2}$ 是无理数，$3\sqrt{2}$ 也是无理数，但 $\sqrt{2}\cdot3\sqrt{2}=6$ 是有理数.

题19 两个无理数的商一定有意义吗？其结果是否一定为无理数？

解 因为两数相除，只有当除数为零时才无意义，而无理数中不包含零，所以，两个无理数的商一定有意义.其结果不一定为无理数，例如，$4\sqrt{5}$ 是无理数，$\sqrt{5}$ 也是无理数，但 $4\sqrt{5}\div\sqrt{5}=4$ 是有理数.

题20 化简：

(1) $\sqrt{9a^2+12ab+4b^2}+\sqrt{9a^2-12ab+4b^2},(0<\frac{3}{2}a<b)$；

(2) $\sqrt[3]{(y-x+5)[(y-x)^2-5(y-x)+25]-125}$；

(3) $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|$.

解 (1) 原式$=\sqrt{(3a+2b)^2}+\sqrt{(3a-2b)^2}=|3a+2b|+|3a-2b|$.

$\because 0<\frac{3}{2}a<b,\therefore 3a+2b>0,3a-2b<0$,

$\therefore$原式$=3a+2b-(3a-2b)=3a+2b-3a+2b=4b$.

(2) 原式$=\sqrt[3]{(y-x)^3+125-125}=\sqrt[3]{(y-x)^3}=y-x$.

(3)$\because \sqrt{2}>1,\sqrt{3}>\sqrt{2},2>\sqrt{3}$,

$\therefore$原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$.

题21 已知:$a=10^{-2},b=6.25\times10^6$,且$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$,求$x$.

解 $\because \frac{a}{x}=\frac{x}{b}$,

$\therefore x^2=ab=10^{-2}\times6.25\times10^6=6.25\times10^4$.

$\because 6.25\times10^4=(\pm250)^2$,

$\therefore x=\pm250$.

题22 一个长方体的木箱,它的底面是正方形,木箱高1.25米,体积为2.18米^3,求这个木箱的底面的边长(精确到0.01米).

解 设这个木箱底面的边长为x米,根据题意,得

$1.25x^2=2.18$,

$\therefore x^2=1.744$.

$\because x>0,\therefore x=\sqrt{1.744}$.

查表得,$\sqrt{1.744}=1.321$.则$x\approx1.32$.

答 这个木箱的底面的边长约为1.32米.

题23 一个圆柱形水池深1.4米,它能装80吨水,求水池底面半径是多少米(精确到0.1米)?

解 设水池的底面半径为r米,根据题意,得

$\pi r^2\cdot1.4=80$,

$\therefore r^2=\frac{80}{1.4\pi}=\frac{80}{1.4\times3.14}\approx18.20$.

由已知,$r>0$,

$\therefore r\approx\sqrt{18.20}$.

查表得,$\sqrt{18.20}=4.266$. $\therefore r\approx4.3$.

答 水池底面半径约为 4.3 米.

题24 一个圆柱的体积为 $26m^3$，且底面圆的直径与圆柱的高相等，求这个圆柱的底面半径(精确到 0.1m).

解 设这个圆柱的底面半径为 x m，根据题意，得

$\pi x^2 \cdot 2x=26$，

$\therefore 2\pi x^3=26$， $\therefore x^3=\frac{13}{\pi}=\frac{13}{3.14}\approx 4.14$.

$\therefore x\approx \sqrt[3]{4.14}$. 查表得，$\sqrt[3]{4.14}=1.606$. $\therefore x\approx 1.6$.

答 这个圆柱的底面半径为 1.6 m.

题25 一个正方体的体积为 3.44 cm^3，求这个正方体的表面积(结果保留三个有效数字).

解 设这个正方体的棱长为 a cm，根据题意，得

$a^3=3.44$， $\therefore a=\sqrt[3]{3.44}$.

查表得，$\sqrt[3]{3.44}=1.510$. $\therefore a=1.510$.

$\therefore$ 这个正方体的表面积为 $6a^2=6\times 1.510^2=13.6806\approx 13.7$.

答 这个正方体的表面积约为 13.7 cm^2.

第十章　二次根式

题1　什么是最简二次根式？

答　最简二次根式就是满足下列条件的二次根式：

(1) 被开方数的因数是整数，因式是整式；

(2) 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

题2　简述二次根式的主要性质.

答　二次根式的主要性质有：

(1) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0);\end{cases}$

(2) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\ (a\geqslant 0,b\geqslant 0)$；

(3) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$.

题3　如果$\sqrt{-\dfrac{5}{3-x}}$有意义，那么 x 的取值范围是(　　).

A. $x\geqslant 3$　　B. $x\leqslant 3$　　C. $x>3$　　D. $x<3$

解　$\because\sqrt{-\dfrac{5}{3-x}}$有意义，　$\therefore -\dfrac{5}{3-x}\geqslant 0$，　$\therefore x>3$.

故选择 C.

题4　若$(\sqrt{1-2x})^2=\sqrt{(2x-1)^2}$成立，则 x 应满足条件(　　).

A. $x=\dfrac{1}{2}$　　B. x 为任意实数　　C. $x\geqslant\dfrac{1}{2}$　　D. $x\leqslant\dfrac{1}{2}$

解　由已知，$\sqrt{1-2x}$必须有意义，则 $1-2x\geqslant 0$，　$\therefore x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

当 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$时，$(\sqrt{1-2x})^2=1-2x$，$\sqrt{(2x-1)^2}=1-2x$.

故选择 D.

题5　已知 $\sqrt{(2+x)^2}+\sqrt{(1+2y)^2}=0$，则 x^3-y^3 的值为(　　).

A. $-\frac{15}{8}$　　B. $-\frac{63}{8}$　　C. $\frac{63}{8}$　　D. $\frac{65}{8}$

解　$\because \sqrt{(2+x)^2}+\sqrt{(1+2y)^2}=0$，

$\therefore |2+x|+|1+2y|=0$，　$\therefore x=-2$，$y=-\frac{1}{2}$.

$\therefore x^3-y^3=(-2)^3-\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-8+\frac{1}{8}=-\frac{63}{8}$.

故选择 B.

题 6　若式子$\frac{\sqrt{1-x}}{2-|x|}$有意义，则 x 的取值范围是(　　).

A. $x\leqslant 1$　　B. $x\leqslant 1$ 且 $x\neq -2$

C. $x\neq \pm 2$　　D. $x\geqslant 1$ 且 $x\neq \pm 2$

解　若$\frac{\sqrt{1-x}}{2-|x|}$有意义，

则应 $1-x\geqslant 0$，且 $2-|x|\neq 0$，　$\therefore x\leqslant 1$，且 $x\neq -2$.

应选择 B.

题 7　化简 $\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{4x^2-20x+25}\left(\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}\right)$的结果是(　　).

A. 8　　B. $8-4x$　　C. -2　　D. $4x-8$

解　$\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{4x^2-20x+25}$

$=\sqrt{(2x-3)^2}-\sqrt{(2x-5)^2}=|2x-3|-|2x-5|$.

$\because \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}$，　$\therefore 2x-3\geqslant 0, 2x-5\leqslant 0$，

$\therefore$原式$=2x-3-(5-2x)=2x-3-5+2x=4x-8$.

故选择 D.

题 8　已知 $a=\sqrt{2}+1, b=1-\sqrt{2}$，则 a^2+ab+b^2 的值为(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解　$\because a=\sqrt{2}+1, b=1-\sqrt{2}$，

$\therefore a^2=3+2\sqrt{2}, ab=-1, b^2=3-2\sqrt{2}$，

$\therefore a^2+ab+b^2=3+2\sqrt{2}-1+3-2\sqrt{2}=5$.

故选择 A.

题 9　如果$|x+\sqrt{3}|+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=0$，那么$(xy)^{2000}$等于(　　).

A. 2000　　B. -2000　　C. 1　　D. -1

解　$\because |x+\sqrt{3}|+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=0$，

$\therefore x=-\sqrt{3}, y=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore xy=-1$, $\therefore (xy)^{2000}=1$.

故选择C.

题10 如果$\sqrt{x^3+3x^2}=-x\sqrt{x+3}$,那么$x$的取值范围是( ).

A. $x\leqslant 0$　　B. $x\geqslant -3$　　C. $0<x<3$　　D. $-3\leqslant x\leqslant 0$

解 $\because \sqrt{x^3+3x^2}=\sqrt{x^2(x+3)}=|x|\sqrt{x+3}=-x\sqrt{x+3}$,

$\therefore |x|=-x$, $\therefore x\leqslant 0$.

又$\because x+3\geqslant 0$, $\therefore x\geqslant -3$, $\therefore -3\leqslant x\leqslant 0$.

故选择D.

题11 等式$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$成立的条件是( ).

A. $x\geqslant -1$　B. $x\geqslant 2$　C. $x>2$　D. $x\geqslant -1$且$x\neq 2$

解 由$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$,得$x+1\geqslant 0$,且$x-2>0$.

$\therefore x\geqslant -1$,且$x>2$.即$x>2$.

故选择C.

题12 已知最简二次根式$\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+1}$与$2\sqrt{6x^2-1}$是同类二次根式,则x的值为( ).

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. ± 1

解 $\because \frac{3}{4}\sqrt{4x^2+1}$与$2\sqrt{6x^2-1}$是同类二次根式,

$\therefore 4x^2+1=6x^2-1$, $\therefore 2x^2=2$, $\therefore x^2=1$, $\therefore x=\pm 1$.

故选择D.

题13 下列各组根式中,属于同类二次根式的是( ).

A. $\sqrt{ab^3c^5}$ 和 $-3\sqrt{\frac{c^2}{ab}}(a<0,b<0,c>0)$

B. $7\sqrt[3]{5a}$ 和 $\frac{1}{6}\sqrt{5a}$

C. $\frac{1}{7}\sqrt{32}$ 和 $-\frac{2}{5}\sqrt{0.125}$

D. $-10\sqrt{a^2b}$ 和 $\frac{3}{4}\sqrt{ab^2}(a>0,b>0)$

解 $\because a<0,b<0,c>0$,

$\therefore \sqrt{ab^3c^5}=-bc^2\sqrt{abc}$, $-3\sqrt{\frac{c^2}{ab}}=-\frac{3c}{ab}\sqrt{ab}$.所以不能选A. $\sqrt[3]{5a}$与$\sqrt{5a}$不是同次根式,显然,不能选B.

$\because \frac{1}{7}\sqrt{32}=\frac{4}{7}\sqrt{2}, -\frac{2}{5}\sqrt{0.125}=-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{8}}=-\frac{1}{10}\sqrt{2},$

$\therefore \frac{1}{7}\sqrt{32}$与$-\frac{2}{5}\sqrt{0.125}$是同类二次根式，所以选 C.

题 14 已知 x、y 为实数，$y=\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}+1}{x-2}$，则 $3x+4y$ 的值为(　　).

A. -5　　B. -7　　C. 5　　D. 7

解 $\because \sqrt{x^2-4}$ 和 $\sqrt{4-x^2}$都有意义，

$\therefore x^2-4\geqslant 0$，且 $4-x^2\geqslant 0$，　$\therefore x^2-4=0$，　$\therefore x=\pm 2$.

又$\because x-2\neq 0$，　$\therefore x\neq 2$，　$\therefore x=-2$.

把 $x=-2$ 代入 $y=\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-x^2}+1}{x-2}$ 得，$y=-\frac{1}{4}$.

$\therefore 3x+4y=3\times(-2)+4\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-7$. 故选择 B.

题 15 已知 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，则 x^2+y^2 的值为(　　).

A. 98　　B. 99　　C. 100　　D. 102

解 $\because x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}},$

$$\therefore x+y=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(5-2\sqrt{6})+(5+2\sqrt{6})}{3-2}=10,$$

$xy=1$,

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2\times 1=98$. 故选择 A.

题 16 已知$(\sqrt{2}+1)x=\sqrt{3}x+2$，则 x 的值为(　　).

A. $\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

C. $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{2+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$

解 $\because (\sqrt{2}+1)x=\sqrt{3}x+2$，　$\therefore (\sqrt{2}+1-\sqrt{3})x=2$，

$$\therefore x=\frac{2}{\sqrt{2}+1-\sqrt{3}}=\frac{2(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+1)^2-3}$$

$$=\frac{2(\sqrt{2}+1+\sqrt{3})}{3+2\sqrt{2}-3}=\frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

$=\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

故选择C.

题17 若式子 $\dfrac{25-\sqrt{(-x^2)^2}}{\sqrt{x^2-2x-16}}$ 的值为零,则 x 的值为(　　).

A. 5　　B. -5　　C. ± 5　　D. $\sqrt{5}$

解 由题意可得,由 $25-\sqrt{(-x^2)^2}=0$,得 $25-\sqrt{x^4}=0$,

$\therefore 25-x^2=0$,　$\therefore x=\pm 5$.

当 $x=5$ 时,$x^2-2x-16=-1$,此时,$\sqrt{x^2-2x-16}$无意义;

当 $x=-5$ 时,$x^2-2x-16=19$,　$\therefore \sqrt{x^2-2x-16}=\sqrt{19}$.

综上所述,当 $x=-5$ 时,原式的值为零.故选择B.

题18 计算$(x-y)\sqrt{\dfrac{1}{y-x}}+\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{x^2-2xy+y^2}$ 的结果是(　　).

A. $\dfrac{4}{3}\sqrt{y-x}$　　B. $\dfrac{2}{3}\sqrt{y-x}$

C. $-\dfrac{2}{3}\sqrt{y-x}$　　D. $-\dfrac{2}{3}\sqrt{x-y}$

解 $\because \sqrt{\dfrac{1}{y-x}}$有意义,　$\therefore \dfrac{1}{y-x}\geqslant 0$,　$\therefore y-x>0$,

$\therefore (x-y)\sqrt{\dfrac{1}{y-x}}+\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{x^2-2xy+y^2}$

$=(x-y)\sqrt{\dfrac{y-x}{(y-x)^2}}+\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{(y-x)^2}$

$=\dfrac{(x-y)\sqrt{y-x}}{y-x}+\dfrac{1}{3}\sqrt{y-x}=-\sqrt{y-x}+\dfrac{1}{3}\sqrt{y-x}$

$=-\dfrac{2}{3}\sqrt{y-x}$.

故选择C.

题19 计算$\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$的结果是(　　).

A. $\dfrac{1+\sqrt{2n+1}}{2}$　B. $\dfrac{\sqrt{2n-1}}{2}$　C. $\dfrac{1-\sqrt{2n-1}}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

解 将各式分母有理化可有

原式 $=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\cdots+\dfrac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}=$

$\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$.

故选择 D.

题 20 当$\frac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt{3-|x|}}$有意义时，$x$ 满足条件(　　).

A. $x\geqslant -\frac{7}{3}$　　B. $x<3$　　C. $-\frac{7}{3}\leqslant x<3$　　D. $-3<x<3$

解　若$\frac{\sqrt{3x+7}}{\sqrt{3-|x|}}$有意义，则 $3x+7\geqslant 0$，且 $3-|x|>0$.

由 $3x+7\geqslant 0$，得 $x\geqslant -\frac{7}{3}$；由 $3-|x|>0$，得 $-3<x<3$.

$\therefore -\frac{7}{3}\leqslant x<3$. 故选择 C.

题 21 若 $a>0$，且 $-2a<x<-a$，则化简 $|x+a|+\sqrt{x^2-2ax+a^2}+2|x+2a|$的结果是(　　).

A. $4a$　　B. $6x-2a$　　C. $2x+2a$　　D. $2a-2x$

解　$\because a>0$，且 $-2a<x<-a$，

$\therefore x+2a>0, x+a<0, x-a<0$，

$\therefore |x+a|+\sqrt{x^2-2ax+a^2}+2|x+2a|$

$=-(x+a)+(a-x)+2(x+2a)=-x-a+a-x+2x+4a=4a$.

故选择 A.

题 22 已知 $a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，则 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$ 的值为(　　).

A. $10\sqrt{3}$　　B. $12\sqrt{3}$　　C. 10　　D. 15

解　$\because a-b=2+\sqrt{3}$，$b-c=2-\sqrt{3}$，

$\therefore a-c=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$，

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac$

$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$

$=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+16]$

$=\frac{1}{2}(4+4\sqrt{3}+3+4-4\sqrt{3}+3+16)=15$.

故选择 D.

题 23 x 是怎样的实数时，下列各式在实数范围内有意义？

(1) $\sqrt{5-2x}$；　(2) $\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2+1}$；　(3) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$；

(4) $\sqrt{x^2+1-2x}$；　(5) $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+6}$；　(6) $\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{1-2x}}$.

解 (1)由 $5-2x\geqslant 0$,得 $x\leqslant\frac{5}{2}$.

∴当 $x\leqslant\frac{5}{2}$时，$\sqrt{5-2x}$在实数范围内有意义.

(2)由 $5-x\geqslant 0$,得 $x\leqslant 5$. 当 $x\leqslant 5$ 时，$x^2+1\neq 0$.

∴当 $x\leqslant 5$ 时，$\dfrac{\sqrt{5-x}}{x^2+1}$在实数范围内有意义.

(3)由 $1-x\geqslant 0$,得 $x\leqslant 1$. 又因为分母 $x\neq 0$,所以，当 $x\leqslant 1$ 且 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{\sqrt{1-x}}{x}$在实数范围内有意义.

(4) $\sqrt{x^2+1-2x}=\sqrt{(x-1)^2}$. 对任意的实数 x,都有 $(x-1)^2\geqslant 0$. 所以，无论 x 取任何实数，$\sqrt{x^2+1-2x}$都有意义.

(5)由 $x-2\geqslant 0$,得 $x\geqslant 2$. 又因为 $x^2-5x+6\neq 0$,所以 $x\neq 2$ 且 $x\neq 3$. 因此，当 $x>2$ 且 $x\neq 3$ 时，$\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-5x+6}$在实数范围内有意义.

(6)由 $x+4\geqslant 0$,得 $x\geqslant -4$. 由 $1-2x>0$,得 $x<\frac{1}{2}$.

∴当 $-4\leqslant x<\frac{1}{2}$时，$\dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{1-2x}}$在实数范围内有意义.

题 24 化简下列各式：

(1) $\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(3-a)^2}$　$(a>3)$；

(2) $\sqrt{27m^2}$　$(m<0)$；　(3) $\sqrt{25a^5}$　$(a>0)$；

(4) $\sqrt{x^4+x^2y^2}$　$(x<0)$；

(5) $|1-a|+\sqrt{a^2-6a+9}$　$(1<a<3)$；

(6) $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2-x+\dfrac{1}{4}}$　$\left(x<\dfrac{1}{2}\right)$.

解 (1)∵$a>3$，∴$a-2>0, 3-a<0$，

$\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(3-a)^2}=(a-2)-(a-3)=a-2-a+3=1$；

(2)∵$m<0$，∴ $\sqrt{27m^2}=\sqrt{3\cdot(3m)^2}=-3m\sqrt{3}=-3\sqrt{3}m$；

(3)∵$a>0$，∴ $\sqrt{25a^5}=\sqrt{(5a^2)^2\cdot a}=5a^2\sqrt{a}$；

(4)$\because x<0$，$\therefore \sqrt{x^4+x^2y^2}=\sqrt{x^2(x^2+y^2)}=-x\sqrt{x^2+y^2}$；

(5)$\because 1<a<3$，$\therefore 1-a<0, a-3<0$，

$\therefore |1-a|+\sqrt{a^2-6a+9}=a-1+\sqrt{(a-3)^2}=a-1+3-a=2$；

(6)$\because x<\frac{1}{2}$，$\therefore \sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}-x$，

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-x\right)=\frac{1}{4}-x^2$.

题 25 求 x 和 y 的值：

(1) $\sqrt{x^2-16}+\sqrt{13-y}=0$；　　(2) $(x-2y)^2+\sqrt{2x-3y-1}=0$.

解 (1)由已知，得 $x^2-16=0, 13-y=0$.

由 $x^2-16=0$，得 $x=\pm 4$；由 $13-y=0$，得 $y=13$；

(2)由已知，得 $x-2y=0, 2x-3y-1=0$.　$\therefore x=2, y=1$.

题 26 计算：

(1) $\sqrt{6\times 50\times 147}$；　　(2) $\sqrt{0.02a^3b^2}$；

(3) $\sqrt{48}\cdot\sqrt{4.5}$；　　(4) $\sqrt{\frac{2b}{3a}}\cdot\sqrt{\frac{3b}{8a}}$.

解 (1) $\sqrt{6\times 50\times 147}=\sqrt{6\times 5^2\times 2\times 7^2\times 3}$

$=\sqrt{6^2\times 5^2\times 7^2}=6\times 5\times 7=210$；

(2) $\sqrt{0.02a^3b^2}=\sqrt{0.01\cdot 2a^2b^2\cdot a}=\sqrt{0.01a^2b^2}\sqrt{2a}=0.1ab\sqrt{2a}$；

(3) $\sqrt{48}\cdot\sqrt{4.5}=\sqrt{48\times 4.5}=\sqrt{24\times 9}=\sqrt{6\times 36}=6\sqrt{6}$；

(4) $\sqrt{\frac{2b}{3a}}\cdot\sqrt{\frac{3b}{8a}}=\sqrt{\frac{2b}{3a}\cdot\frac{3b}{8a}}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}}=\frac{b}{2a}$.

题 27 比较下列两数的大小：

(1) $\sqrt{2.8}$与$\sqrt{2\frac{3}{4}}$；　　(2) $\frac{1}{2}\sqrt{11}$与$\sqrt{3\frac{1}{3}}$；

(3) $5\sqrt{5}$与$8\sqrt{2}$；　　(4) $6\sqrt{7}$与$7\sqrt{6}$；

(5) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$与$\frac{3}{10}\sqrt{10}$；　　(6) $4\sqrt{3}$与6.9.

解 (1) $\sqrt{2\frac{3}{4}}=\sqrt{2.75}$.　$\because 2.8>2.75$，$\therefore \sqrt{2.8}>\sqrt{2\frac{3}{4}}$；

(2) $\frac{1}{2}\sqrt{11}=\sqrt{\frac{11}{4}}$，$\sqrt{3\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{10}{3}}$.

$\because \frac{11}{4}<\frac{10}{3}$，$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{11}<\sqrt{3\frac{1}{3}}$；

(3) $5\sqrt{5}=\sqrt{5^2\times5}=\sqrt{125}, 8\sqrt{2}=\sqrt{8^2\times2}=\sqrt{128}$.

$\because 125<128$, $\therefore 5\sqrt{5}<8\sqrt{2}$;

(4) $6\sqrt{7}=\sqrt{6^2\times7}=\sqrt{252}, 7\sqrt{6}=\sqrt{7^2\times6}=\sqrt{294}$.

$\because 252<294$, $\therefore 6\sqrt{7}<7\sqrt{6}$;

(5) $\frac{2}{3}\sqrt{2}=\sqrt{\frac{4}{9}\times2}=\sqrt{\frac{8}{9}}, \frac{3}{10}\sqrt{10}=\sqrt{\frac{9}{100}\times10}=\sqrt{\frac{9}{10}}$;

$\because \frac{8}{9}<\frac{9}{10}$, $\therefore \frac{2}{3}\sqrt{2}<\frac{3}{10}\sqrt{10}$;

(6) $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\times3}=\sqrt{48}$, $6.9=\sqrt{6.9^2}=\sqrt{47.61}$.

$\because 48>47.61$, $\therefore 4\sqrt{3}>6.9$.

题 28 把下列各式的分母有理化：

(1) $\frac{5}{\sqrt{10}}$;　　(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}$;

(3) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ab}}$;　　(4) $\frac{x^2y}{\sqrt{xy}}$;

(5) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$;　　(6) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}}$;

(7) $\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}$;　　(8) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

解 (1) $\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$;

(2) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{5\times21}}{21}=\frac{\sqrt{105}}{21}$;

(3) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{c}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{abc}}{ab}$;

(4) $\frac{x^2y}{\sqrt{xy}}=\frac{x^2y\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}\cdot\sqrt{xy}}=\frac{x^2y\sqrt{xy}}{xy}=x\sqrt{xy}$;

(5) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}=\frac{3(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{6+3\sqrt{3}}{4-3}=6+3\sqrt{3}$;

(6) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}+2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}{(\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{5}-\sqrt{6})}$

$$=\frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{10}-2\sqrt{3}}{14}=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{3}}{7};$$

(7) $\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}=\frac{(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}{(3\sqrt{5}-4\sqrt{2})(3\sqrt{5}+4\sqrt{2})}$

$$=\frac{45+24\sqrt{10}+32}{(3\sqrt{5})^2-(4\sqrt{2})^2}=\frac{77+24\sqrt{10}}{13};$$

(8) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$

$$=\frac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

题29 把下列根式化成最简根式，并指出哪些是同类根式：

(1) $2\sqrt{20},\frac{2}{5}\sqrt{125},10\sqrt{0.05},6\sqrt{50}$;

(2) $\sqrt{4a^3x},2a\sqrt{\frac{x^3}{4a}},2\sqrt{a^3x^2},2x\sqrt{\frac{a}{x}}$;

(3) $\sqrt{x^2(x^2+y^2)},\frac{1}{2}\sqrt{y^2(x^2+y^2)^3},\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

解 (1) $2\sqrt{20}=2\sqrt{4\times5}=2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}$,

$\frac{2}{5}\sqrt{125}=\frac{2}{5}\sqrt{25\times5}=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$,

$10\sqrt{0.05}=10\sqrt{0.01\times5}=10\cdot\sqrt{0.01}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}$,

$6\sqrt{50}=6\sqrt{25\times2}=6\cdot\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=30\sqrt{2}$.

$\therefore 2\sqrt{20}$、$\frac{2}{5}\sqrt{125}$和$10\sqrt{0.05}$是同类二次根式.

(2) $\sqrt{4a^3x}=\sqrt{4a^2}\cdot\sqrt{ax}=2a\sqrt{ax}$,

$2a\sqrt{\frac{x^3}{4a}}=2a\sqrt{\frac{ax^3}{4a^2}}=2a\cdot\frac{\sqrt{ax^3}}{\sqrt{4a^2}}=2a\cdot\frac{x\sqrt{ax}}{2a}=x\sqrt{ax}$,

$2\sqrt{a^3x^2}=2\sqrt{a^2x^2}\cdot\sqrt{a}=2ax\sqrt{a}$,

$2x\sqrt{\frac{a}{x}}=2x\sqrt{\frac{ax}{x^2}}=2x\cdot\frac{\sqrt{ax}}{x}=2\sqrt{ax}$.

$\therefore \sqrt{4a^3x}$、$2a\sqrt{\frac{x^3}{4a}}$和$2x\sqrt{\frac{a}{x}}$是同类二次根式.

(3) $\sqrt{x^2(x^2+y^2)}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=x\sqrt{x^2+y^2}$,

$\frac{1}{2}\sqrt{y^2(x^2+y^2)^3}=\frac{1}{2}\sqrt{y^2}\cdot\sqrt{(x^2+y^2)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$=\frac{1}{2}y(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}$,

$\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^4-y^4}}{x^2+y^2}$.

$\therefore\sqrt{x^2(x^2+y^2)}$和$\frac{1}{2}\sqrt{y^2(x^2+y^2)^3}$是同类二次根式.

题30 如果最简根式$\sqrt[3a+2]{4a+3b}$和$\sqrt[2b+4]{2a+4b+1}$是同类根式，求a^2+b^2的值.

解 由已知，得 $\begin{cases}3a+2=2b+4,\\4a+3b=2a+4b+1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=-1.\end{cases}$

$\therefore a^2+b^2=0^2+(-1)^2=1$.

题31 合并下列各式中的同类二次根式：

(1) $\sqrt{5}-\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{3}{5}\sqrt{5}$；

(2) $9\sqrt{3}+7\sqrt{12}-5\sqrt{48}$；

(3) $\sqrt{12\frac{1}{2}}+4\sqrt{1.75}-\frac{1}{6}\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{200}}$；

(4) $\frac{1}{2}x\sqrt{4x}+6x\sqrt{\frac{x}{9}}-2x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$；

(5) $(\sqrt{12}-\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}})-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{18}\right)$；

(6) $\left(4b\sqrt{\frac{a}{b}}+\frac{2}{a}\sqrt{a^5b^3}\right)-3ab\left(\sqrt{\frac{1}{ab}}+\sqrt{4ab}\right)$.

解 (1) 原式$=\sqrt{5}-2\sqrt{5}+\frac{3}{5}\sqrt{5}+\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{6}$

$=-\frac{2}{5}\sqrt{5}-\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

(2) 原式$=9\sqrt{3}+14\sqrt{3}-20\sqrt{3}=3\sqrt{3}$.

(3) 原式$=\frac{5}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{7}-\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{1}{20}\sqrt{2}=\frac{51}{20}\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{7}$.

(4) 原式$=\frac{1}{2}x\cdot2\sqrt{x}+6x\cdot\frac{\sqrt{x}}{3}-2x^2\frac{\sqrt{x}}{x}$

$=x\sqrt{x}+2x\sqrt{x}-2x\sqrt{x}=x\sqrt{x}$.

(5) 原式$=\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)$

$=2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{9}{4}\sqrt{2}$.

(6)原式$=\left(4b\cdot\frac{\sqrt{ab}}{b}+\frac{2}{a}\cdot a^2b\sqrt{ab}\right)-3ab\left(\frac{\sqrt{ab}}{ab}+2\sqrt{ab}\right)$

$=4\sqrt{ab}+2ab\sqrt{ab}-3\sqrt{ab}-6ab\sqrt{ab}$

$=(1-4ab)\sqrt{ab}$.

题 32 一个直角三角形两条直角边的长分别为 $2\sqrt{2}$ cm，$\sqrt{6}$ cm，求这个直角三角形的面积.

解 $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}=\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}(\text{cm}^2)$.

答 这个直角三角形的面积为 $2\sqrt{3}\text{ cm}^2$.

题 33 设直角三角形的两条直角边分别为 a、b，斜边为 c：

(1) 已知 $a=\sqrt{152}$，$b=\sqrt{248}$，求 c；

(2) 已知 $a=4\sqrt{2}$，$c=9$，求 b.

解 (1)$\because a=\sqrt{152}$，$b=\sqrt{248}$，　$\therefore a^2=152$，$b^2=248$.

$\therefore c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{152+248}=\sqrt{400}=20$.

(2)$\because a=4\sqrt{2}$，$c=9$，　$\therefore a^2=16\times2=32$，$c^2=81$.

$\therefore b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{81-32}=\sqrt{49}=7$.

题 34 求下列各式的值：

(1) 已知 $x=9.8$，$y=10$，求 $\sqrt{2xy}$的值；

(2) 已知 $a=\frac{1}{3}$，$b=1$，$c=-\frac{1}{4}$，求 $\sqrt{b^2-4ac}$的值；

(3) 已知 $a=11$，$b=8$，求 $\sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2}$的值.

解 (1) $\sqrt{2xy}=\sqrt{2\times9.8\times10}=\sqrt{196}=14$；

(2) $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{1^2-4\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{4}\right)}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$；

(3) $\sqrt{(a+1)^2+(b-2)^2}=\sqrt{(11+1)^2+(8-2)^2}=\sqrt{144+36}=6\sqrt{5}$.

题 35 已知长方形的长是 a，宽是 b，求与下列长方形面积相等的正方形的边长 x：

(1) $a=3.6$，$b=0.8$；　　　(2)$a=2\frac{3}{5}$，$b=\frac{13}{125}$.

解 (1)由已知，得　$x^2=ab=3.6\times0.8=2.88$，且 $x>0$，

$\therefore x=\sqrt{2.88}=\sqrt{\frac{72}{25}}=\frac{6}{5}\sqrt{2}$.

(2)由已知，得 $x^2=ab=2\frac{3}{5}\times\frac{13}{125}=\frac{13}{5}\times\frac{13}{125}=\frac{169}{625}$，且 $x>0$，

$\therefore x=\sqrt{\frac{169}{625}}=\frac{13}{25}$.

题 26 已知 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，求 $x^4-9x^2-2\sqrt{3}x+3$ 的值.

解 $\because x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，

$\therefore x^2=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$，$\therefore x^2-10=2\sqrt{6}-5$.

$x^4-9x^2-2\sqrt{3}x+3=x^4-10x^2+x^2-2\sqrt{3}x+3$

$=x^2(x^2-10)+(x-\sqrt{3})^2$

$=(5+2\sqrt{6})(2\sqrt{6}-5)+(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3})^2$

$=(2\sqrt{6})^2-25+2=1$.

题 27 已知 $x=\frac{\sqrt{5}}{2}$，求 $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ 的值.

解 $\because x=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore x^2=\frac{5}{4}$，$\therefore x^2-1=\frac{1}{4}$，$\therefore \sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}$.

$$\therefore \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)^2-(\sqrt{5}-1)^2}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{(6+2\sqrt{5})-(6-2\sqrt{5})}{5-1}$$

$$=\frac{6+2\sqrt{5}-6+2\sqrt{5}}{4}=\sqrt{5}.$$

题 28 计算：

(1) $\sqrt{242}-\sqrt{200}+\sqrt{8}$；　　(2) $\sqrt{54}+\sqrt{96}-\sqrt{150}$；

(3) $6\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{12}+\sqrt{3}$；　　(4) $40\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{1000}+2\sqrt{10}$.

解 (1) 原式 $=11\sqrt{2}-10\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$；

(2) 原式 $=3\sqrt{6}+4\sqrt{6}-5\sqrt{6}=2\sqrt{6}$；

(3) 原式$=6\times\frac{\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$；

(4) 原式$=40\times\frac{\sqrt{10}}{5}-10\sqrt{10}+2\sqrt{10}$

$=8\sqrt{10}-10\sqrt{10}+2\sqrt{10}=0.$

题39 计算：

(1) $\left(16\sqrt{\frac{3}{2}}-5\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\frac{1}{4}\sqrt{8}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$；

(2) $\left(4\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-(4\sqrt{0.125}-\sqrt{12})$；

(3) $(\sqrt{8}-2\sqrt{0.25})-\left(\sqrt{1\frac{1}{8}}+\sqrt{50}+\frac{2}{3}\sqrt{72}\right)$.

解 (1)原式$=\left(16\times\frac{1}{2}\sqrt{6}-5\times\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\times2\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$

$=8\sqrt{6}-\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{6}=\frac{23}{3}\sqrt{6}-2\sqrt{2}$；

(2)原式$=\left(4\times\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\times\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)-\left(4\times\frac{1}{4}\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

$=2\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}-\sqrt{2}+2\sqrt{3}=\sqrt{2}+\frac{4}{3}\sqrt{3}$；

(3)原式$=(2\sqrt{2}-2\times0.5)-\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}+5\sqrt{2}+\frac{2}{3}\times6\sqrt{2}\right)$

$=2\sqrt{2}-1-\frac{3}{4}\sqrt{2}-5\sqrt{2}-4\sqrt{2}=-\frac{31}{4}\sqrt{2}-1.$

题40 计算：

(1) $\sqrt{25a^5}+4a\sqrt{a^3}-a^2\sqrt{a}$；

(2) $\sqrt{81b^3}-5b\sqrt{b}+\frac{3}{b}\sqrt{4b^5}$；

(3) $\frac{1}{2}m\sqrt{4m}+6m\sqrt{\frac{m}{9}}-2m^2\sqrt{\frac{1}{m}}$；

(4) $\sqrt{4y^2-4x^2}+\sqrt{(x+y)^2}-\sqrt{9y^2-9x^2}-\sqrt{(x-y)^2}(0<x<y)$.

解 (1) 原式$=5a^2\sqrt{a}+4a^2\sqrt{a}-a^2\sqrt{a}=8a^2\sqrt{a}$；

(2) 原式$=9b\sqrt{b}-5b\sqrt{b}+\frac{3}{b}\cdot2b^2\sqrt{b}$

$=4b\sqrt{b}+6b\sqrt{b}=10b\sqrt{b}$；

(3) 原式$=\frac{m}{2}\cdot2\sqrt{m}+6m\cdot\frac{\sqrt{m}}{3}-2m^2\cdot\frac{\sqrt{m}}{m}$

$=m\sqrt{m}+2m\sqrt{m}-2m\sqrt{m}=m\sqrt{m}$;

(4) 原式$=2\sqrt{y^2-x^2}+x+y-3\sqrt{y^2-x^2}-(y-x)$

$=2x-\sqrt{y^2-x^2}$.

题 11 计算:

(1) $(7\sqrt{2}+2\sqrt{6})\cdot(2\sqrt{6}-7\sqrt{2})$;

(2) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdot(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\sqrt{6})$;

(3) $(2+\sqrt{5})^4\cdot(2-\sqrt{5})^4$

(4) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$;

(5) $(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})^2$.

解 (1) 原式$=(2\sqrt{6})^2-(7\sqrt{2})^2=24-98=-74$;

(2) 原式$=(2\sqrt{3}-\sqrt{6})^2-(3\sqrt{2})^2=12-12\sqrt{2}+6-18$

$=-12\sqrt{2}$;

(3) 原式$=[(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})]^4=(4-5)^4=(-1)^4=1$;

(4) 原式$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}-3\sqrt{2}+2\sqrt{3})$

$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(4\sqrt{2}+7\sqrt{3})$

$=3\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}+21\sqrt{6}-8\sqrt{6}-2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{3}$

$=12\times 2+13\sqrt{6}-14\times 3=13\sqrt{6}-18$;

(5) 原式$=(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})$

$=2\sqrt{3}(2\sqrt{5}-2\sqrt{7})=4\sqrt{15}-4\sqrt{21}$.

题 12 计算下列各式:

(1) $\sqrt{8+2\sqrt{15}}$; (2) $\sqrt{4-\sqrt{12}}$.

解 (1) 原式$=\sqrt{3+2\sqrt{15}+5}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$;

(2) 原式$=\sqrt{3-2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$.

题 13 求下列各式的值(精确到 0.01):

(1) $\left(\sqrt{80}-\sqrt{1\frac{4}{5}}\right)-\left(\sqrt{3\frac{1}{5}}+\frac{4}{5}\sqrt{45}\right)$;

(2) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{2}}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{18}\right)$.

解 (1) 原式 $=\left(4\sqrt{5}-\frac{3}{5}\sqrt{5}\right)-\left(\frac{4}{5}\sqrt{5}+\frac{4}{5}\times 3\sqrt{5}\right)$

$=4\sqrt{5}-\frac{3}{5}\sqrt{5}-\frac{4}{5}\sqrt{5}-\frac{12}{5}\sqrt{5}$

$=\frac{1}{5}\sqrt{5}\approx\frac{1}{5}\times 2.236\approx 0.45$;

(2) 原式 $=\left(2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)-\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)$

$=\frac{4}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{9}{4}\sqrt{2}\approx\frac{4}{3}\times 1.732+\frac{9}{4}\times 1.414\approx 5.49$.

题 14 计算下列各式:

(1) $(3\sqrt{2a^3}-2\sqrt{a})\cdot\sqrt{a}$;

(2) $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\cdot\sqrt{ab}$;

(3) $(x-2\sqrt{xy}+y)\div(\sqrt{x}-\sqrt{y})$;

(4) $\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}$;

(5) $(\sqrt{a^3b}-3ab+\sqrt{ab^3})\div\sqrt{ab}$;

(6) $(7\sqrt{a}+2\sqrt{b})(2\sqrt{b}-\sqrt{49a})$.

解 (1) 原式 $=(3a\sqrt{2a}-2\sqrt{a})\cdot\sqrt{a}=3a\sqrt{2a^2}-2a=3\sqrt{2}a^2-2a$;

(2) 原式 $=\sqrt{\frac{b}{a}}\cdot\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{ab}=\sqrt{b^2}-\sqrt{a^2}=b-a$;

(3) 原式 $=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2\div(\sqrt{x}-\sqrt{y})=\sqrt{x}-\sqrt{y}$;

(4) 原式 $=\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{xy}}+\frac{y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$;

(5) 原式 $=\sqrt{a^3b}\div\sqrt{ab}-3ab\div\sqrt{ab}+\sqrt{ab^3}\div\sqrt{ab}=a-3\sqrt{ab}+b$;

(6) 原式 $=(7\sqrt{a}+2\sqrt{b})(2\sqrt{b}-7\sqrt{a})$

$=(2\sqrt{b})^2-(7\sqrt{a})^2=4b-49a$;

题 15 把下列各式的分母有理化:

(1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{15}}$;　　(2) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$;

(3) $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$；　　(4) $\frac{3\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{7\sqrt{6}-2\sqrt{3}}$.

解 (1) 原式$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot\sqrt{15}}{15}=\frac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}}{15}$；

(2) 原式$=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$

$=\frac{3\sqrt{6}+6-6-2\sqrt{6}}{18-12}=\frac{\sqrt{6}}{6}$；

(3) 原式$=\frac{(2+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}=\frac{2\sqrt{2}-2+2-\sqrt{2}}{2-1}=\sqrt{2}$；

(4) 原式$=\frac{(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})(7\sqrt{6}+2\sqrt{3})}{(7\sqrt{6}-2\sqrt{3})(7\sqrt{6}+2\sqrt{3})}$

$=\frac{21\sqrt{30}+6\sqrt{15}+28\sqrt{18}+8\times 3}{(7\sqrt{6})^2-(2\sqrt{3})^2}$

$=\frac{21\sqrt{30}+6\sqrt{15}+84\sqrt{2}+24}{282}$

$=\frac{7\sqrt{30}+2\sqrt{15}+28\sqrt{2}+8}{94}$.

题 46 计算：

(1) $\frac{b}{a\sqrt{b}-c}$；　　(2) $\frac{\sqrt{a}+3\sqrt{b}}{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}$；

(3) $(1-a)\div(1-\sqrt{1-a})(a<1)$；

(4) $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})\div(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(a>b)$.

解 (1) 原式$=\frac{b(a\sqrt{b}+c)}{(a\sqrt{b}-c)(a\sqrt{b}+c)}=\frac{ab\sqrt{b}+bc}{a^2b-c^2}$；

(2) 原式$=\frac{(\sqrt{a}+3\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-3\sqrt{b})(\sqrt{a}+3\sqrt{b})}=\frac{a+6\sqrt{ab}+9b}{a-9b}$；

(3) 原式$=\frac{1-a}{1-\sqrt{1-a}}=\frac{(1-a)(1+\sqrt{1-a})}{(1-\sqrt{1-a})(1+\sqrt{1-a})}$

$=\frac{(1-a)(1+\sqrt{1-a})}{1-(1-a)}=\frac{1-a+\sqrt{1-a}-a\sqrt{1-a}}{a}$；

(4) 原式$=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}=\frac{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})}$

$$=\frac{a+b+2\sqrt{a^2-b^2}+a-b}{(a+b)-(a-b)}$$

$$=\frac{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}{2b}=\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

题 47 计算：

(1) $\frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\frac{4}{1+\sqrt{3}}$；

(2) $\frac{4}{\sqrt{5}-1}+\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{3}{2+\sqrt{3}}$；

(3) $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$；

(4) $\frac{5}{4-\sqrt{11}}+\frac{1}{3+\sqrt{7}}-\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{\sqrt{7}-5}{2}$.

解 (1) 原式 $=\frac{(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}-\frac{4(\sqrt{3}-1)}{(1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$

$$=\frac{2-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+3}{4-3}-\frac{4\sqrt{3}-4}{3-1}$$

$$=5-3\sqrt{3}-(2\sqrt{3}-2)=7-5\sqrt{3}；$$

(2) 原式 $=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}+\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}+\frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$$=\frac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1}+\frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}+\frac{6-3\sqrt{3}}{4-3}$$

$$=\sqrt{5}+1+\sqrt{5}+\sqrt{3}+6-3\sqrt{3}$$

$$=2\sqrt{5}-2\sqrt{3}+7；$$

(3) 原式 $=\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}-\frac{(5-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}{2-1}+\frac{3\sqrt{3}+3-3-\sqrt{3}}{3-1}-\frac{5\sqrt{5}+5-5-\sqrt{5}}{5-1}$$

$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$；

(4) 原式$=\dfrac{5(4+\sqrt{11})}{(4-\sqrt{11})(4+\sqrt{11})}+\dfrac{3-\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})}$

$-\dfrac{6(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}-\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$

$=\dfrac{5(4+\sqrt{11})}{16-11}+\dfrac{3-\sqrt{7}}{9-7}-\dfrac{6(\sqrt{7}+2)}{7-4}-\dfrac{\sqrt{7}-5}{2}$

$=4+\sqrt{11}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}-2\sqrt{7}-4-\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\dfrac{5}{2}$

$=\sqrt{11}-3\sqrt{7}+4.$

题48 已知$x=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，求$\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$的值.

解 原式$=\dfrac{\sqrt{x^2-1}(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}=\dfrac{x\sqrt{x^2-1}+x^2-1}{x^2-(x^2-1)}$

$=x\sqrt{x^2-1}+x^2-1.$

$\because x=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，$\therefore x^2=\dfrac{9}{8}$，$\therefore x^2-1=\dfrac{1}{8}$.

$\therefore$原式$=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{8}}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{1}{8}=3\times\dfrac{2}{16}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{2}.$

题49 已知$a=3+2\sqrt{2}$，$b=3-2\sqrt{2}$，求a^2b-ab^2的值.

解 $\because a=3+2\sqrt{2}$，$b=3-2\sqrt{2}$，

$\therefore ab=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=9-8=1$，

$a-b=(3+2\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})=4\sqrt{2}$，

$\therefore a^2b-ab^2=ab(a-b)=4\sqrt{2}$.

题50 已知$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}$的值.

解 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a-b}=\dfrac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)}=\dfrac{2a}{a^2-b^2}.$

当$a=\sqrt{5}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$时，

$a^2=5$，$b^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$.

$\therefore$原式$=\dfrac{2\sqrt{5}}{5-(5-2\sqrt{6})}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}.$

题51 已知$a=2-\sqrt{5}$，$b=\sqrt{15}$，求$a^2b+2\sqrt{5}ab+5b$的值.

解 $a^2b+2\sqrt{5}ab+5b=b(a^2+2\sqrt{5}a+5)=b(a+\sqrt{5})^2$.

当 $a=2-\sqrt{5}$, $b=\sqrt{15}$ 时，

原式 $=\sqrt{15}\cdot(2-\sqrt{5}+\sqrt{5})^2=4\sqrt{15}$.

题 52 已知 $x=2+\sqrt{3}$，求 $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x-2$ 的值.

解 $\because x=2+\sqrt{3}$，$\therefore x^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$，

$\therefore (7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x-2$

$=(7-4\sqrt{3})(7+4\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})-2$

$=49-48+4-3-2=0$.

题 53 已知 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，求 $\dfrac{a^2+2a+1}{a^3-a}-\dfrac{2}{a-1}$ 的值.

解 $\dfrac{a^2+2a+1}{a^3-a}-\dfrac{2}{a-1}=\dfrac{(a+1)^2}{a(a+1)(a-1)}-\dfrac{2}{a-1}$

$=\dfrac{a+1}{a(a-1)}-\dfrac{2a}{a(a-1)}=\dfrac{a+1-2a}{a(a-1)}=\dfrac{1-a}{a(a-1)}=-\dfrac{1}{a}$.

当 $a=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ 时，

原式 $=-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

题 54 已知 $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$，求 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9$ 的值.

解 $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+9=\left(x+\dfrac{1}{x}-3\right)^2$

当 $x=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$ 时，

原式 $=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\sqrt{5}-2-3\right)^2$

$=\left[\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}+\sqrt{5}-5\right]^2$

$=\left[\dfrac{\sqrt{5}+2}{5-4}+\sqrt{5}-5\right]^2=(\sqrt{5}+2+\sqrt{5}-5)^2$

$=(2\sqrt{5}-3)^2=29-12\sqrt{5}$.

第十一章　一元二次方程

一、一元二次方程的解法及应用

题1　写出一元二次方程的一般形式及一元二次方程的解法.

答　一元二次方程的一般式：$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

一元二次方程的解法：(1)直接开平方法；(2)配方法；(3)公式法；(4)因式分解法.

题2　写出一元二次方程的求根公式.

答　一元二次方程的求根公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0)$.

题3　解方程 $3x^2+27=0$（　　）.

A. $x=-3$　　B. $x=\pm 3$　　C. 无实数根　　D. 以上都不对

解　$3x^2=-27$，$x^2=-9$，因为一个数的平方不能是负数，所以无实根. 故选择 C.

题4　方程 $4x^2-1=0$（　　）.

A. 有两个解 $x=\pm\dfrac{1}{4}$　　B. 有两个解 $x=\pm\dfrac{1}{2}$

C. 有一个解 $x=\dfrac{1}{2}$　　D. 该方程无解

解　$4x^2=1$，$x^2=\dfrac{1}{4}$，　$\therefore x=\pm\dfrac{1}{2}$. 故选择 B.

题5　方程$(1+\sqrt{2})x^2-(1-\sqrt{2})x=0$的解是（　　）.

A. $x_1=0,x_2=2\sqrt{2}-3$　　B. $x_1=0,x_2=3-2\sqrt{2}$

C. $x_1=1,x_2=3-2\sqrt{2}$　　D. $x_1=0,x_2=1$

解　由 $x[(1+\sqrt{2})x-(1-\sqrt{2})]=0$

得 $x=0$ 或 $(1+\sqrt{2})x-(1-\sqrt{2})=0$,

$\therefore x_1=0,x_2=2\sqrt{2}-3$. 故选择 A.

4 **题6** 方程$(2-3x)+(3x-2)^2=0$的解是(　　).

A. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=-1$　　B. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=1$

C. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=\frac{1}{3}$　　D. $x_1=x_2=\frac{2}{3}$

解 由$(2-3x)+(2-3x)^2=0$，$(2-3x)(3-3x)=0$，

得$2-3x=0$或$3-3x=0$，$\therefore x_1=\frac{2}{3}, x_2=1$. 故选择B.

题7 用直接开平方法解下列各方程：

(1) $x^2-\sqrt{625}=0$；　　(2) $0.5x^2-\frac{1}{3}=0$；

(3) $0.8x^2-4=0$；　　(4) $(x-3)^2=2$.

解 (1) $x^2=\sqrt{625}, x^2=25, x=\pm 5, \therefore x_1=5, x_2=-5$.

(2) $0.5x^2=\frac{1}{3}, x^2=\frac{2}{3}, x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \therefore x_1=\frac{\sqrt{6}}{3}, x_2=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) $0.8x^2=4, x^2=5, x=\pm\sqrt{5}, \therefore x_1=\sqrt{5}, x_2=-\sqrt{5}$.

(4) $x-3=\pm\sqrt{2}$，$x-3=\sqrt{2}$或$x-3=-\sqrt{2}$，

$\therefore x_1=3+\sqrt{2}, x_2=3-\sqrt{2}$.

题8 用配方法解下列各方程：

(1) $y^2-6y-6=0$；　　(2) $3x^2-2=4x$；

(3) $x^2-0.5x-0.06=0$；　　(4) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$.

解 (1)移项，得$y^2-6y=6$.

配方，得$y^2-6y+3^2=6+3^2, (y-3)^2=15$.

解这个方程，得$y-3=\pm\sqrt{15}$. $\therefore y_1=3+\sqrt{15}, y_2=3-\sqrt{15}$.

(2)移项，得$3x^2-4x=2$.

把方程的各项都除以3，得$x^2-\frac{4}{3}x=\frac{2}{3}$.

配方，得$x^2-\frac{4}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$.

解这个方程，得$x-\frac{2}{3}=\pm\sqrt{\frac{10}{9}}, x-\frac{2}{3}=\pm\frac{\sqrt{10}}{3}$.

$\therefore x_1=\frac{2+\sqrt{10}}{3}, x_2=\frac{2-\sqrt{10}}{3}$.

(3)移项，得$x^2-0.5x=0.06$，

配方，得$x^2-0.5x+(0.25)^2=0.06+(0.25)^2$，

$$(x-0.25)^2=0.1225.$$

解这个方程，得 $x-0.25=\pm0.35$.

$\therefore x_1=0.6, x_2=-0.1$.

(4)移项，得 $x^2+\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}$.

配方，得 $x^2+\frac{1}{6}x+\left(\frac{1}{12}\right)^2=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{12}\right)^2, \left(x+\frac{1}{12}\right)^2=\frac{49}{144}$.

解这个方程，得 $x+\frac{1}{12}=\pm\frac{7}{12}$. $\therefore x_1=\frac{1}{2}, x_2=-\frac{2}{3}$.

题 3 用公式法解下列各方程：

(1) $x^2-2x-8=0$；　　(2) $2x^2+2x=1$；

(3) $4y=1-\frac{3}{2}y^2$；　　(4) $3y^2+1=2\sqrt{3}y$.

解 (1)$\because a=1, b=-2, c=-8$,

$b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-8)=36>0$.

$\therefore x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{36}}{2\times1}=\frac{2\pm6}{2}$. $\therefore x_1=4, x_2=-2$.

(2) 移项，得 $2x^2+2x-1=0$.

$\because a=2, b=2, c=-1, b^2-4ac=2^2-4\times2\times(-1)=12>0$.

$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{2\times2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore x_1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}, x_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$.

(3)移项，得 $\frac{3}{2}y^2+4y-1=0$.

$\because a=\frac{3}{2}, b=4, c=-1, b^2-4ac=4^2-4\times\frac{3}{2}\times(-1)=22>0$.

$\therefore y=\frac{-4\pm\sqrt{22}}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{-4\pm\sqrt{22}}{3}$.

$\therefore y_1=\frac{\sqrt{22}-4}{3}, y_2=\frac{-\sqrt{22}-4}{3}$.

(4)移项，得 $3y^2-2\sqrt{3}y+1=0$.

$\because a=3, b=-2\sqrt{3}, c=1, b^2-4ac=(-2\sqrt{3})^2-4\times3\times1=0$.

$\therefore y=\frac{-(-2\sqrt{3})\pm\sqrt{0}}{2\times3}=\frac{2\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore y_1=y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

题10 用因式分解法解下列各方程：

(1) $x^2=2x$；　　(2) $(x+1)^3-(x-1)^3=2$；

(3) $x^2-6x+8=0$；　　(4) $4(x+3)^2=25(x-2)^2$；

(5) $(x-1)(x+3)-2(x+3)^2+3(x+3)(x-3)=0$.

解 (1) 原方程变形为 $x^2-2x=0$.

左边分解因式，得 $x(x-2)=0$. $x=0$ 或 $x-2=0$. $\therefore x_1=0, x_2=2$；

(2) 原方程可变形为

$$(x+1-x+1)[(x+1)^2+(x+1)(x-1)+(x-1)^2]=2.$$

即 $2(x^2+2x+1+x^2-1+x^2-2x+1)=2$，

$3x^2+1=1, x^2=0$. $\therefore x_1=x_2=0$.

(3) 原方程左边分解因式，得 $(x-2)(x-4)=0$，

$\therefore x-2=0$ 或 $x-4=0$. $\therefore x_1=2, x_2=4$.

(4) 原方程可变形为 $4(x+3)^2-25(x-2)^2=0$.

左边分解因式，得 $[2(x+3)-5(x-2)][2(x+3)+5(x-2)]=0$，

$\therefore (-3x+16)(7x-4)=0$，

$\therefore -3x+16=0$ 或 $7x-4=0$. $\therefore x_1=\dfrac{16}{3}, x_2=\dfrac{4}{7}$.

(5) 原方程变形为 $x^2+2x-3-2x^2-12x-18+3x^2-27=0$，

$x^2-5x-24=0$. 左边分解因式，得 $(x-8)(x+3)=0$，

$\therefore x-8=0$ 或 $x+3=0$. $\therefore x_1=8, x_2=-3$.

题11 若 $a>b>c>0$，一元二次方程 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 的两个实数根中，求较大的一个实数根.

解 由观察知，$x=1$ 满足方程，所以，方程 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 有实数根 1. 又知 $a-b>0, b-c>0$，若 $x>1$，则有 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)>(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$，所以，方程 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 没有大于 1 的实数根，因此较大的一个实数根为 1.

题12 已知方程 $x^2-19x-150=0$ 的一个正根为 a，求 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a+1999}+\sqrt{a+2000}}$ 的值.

解 由方程 $x^2-19x-150=0$ 知，其正根为 25，即 $a=25$.

又 $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a+1999}+\sqrt{a+2000}}$

$=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})+(\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1})+(\sqrt{a+3}-\sqrt{a+2})+\cdots\cdots+$

$(\sqrt{a+2000}-\sqrt{a+1999})$

$=\sqrt{a+2000}-\sqrt{a}=\sqrt{2025}-\sqrt{25}=45-5=40.$

题13 要使关于 x 的方程 $x^2+bx+1=0$ 与 $x^2-x-b=0$ 有且只有一个公共根，求 b 的值.

解 设 α 是它们的公共根，则

$$\alpha^2+b\alpha+1=0, \quad ①$$

$$\alpha^2-\alpha-b=0. \quad ②$$

①－②，得 $(b+1)\alpha+1+b=0$，

$\therefore (b+1)\alpha=-b-1.$ ③

当 $b+1\neq 0$，即 $b\neq -1$ 时，③有惟一解 $\alpha=-1$.

把 $\alpha=-1$ 代入①，得 $1-b+1=0$， $\therefore b=2$.

题14 已知两个数的差为4，它们的积为45，求这两个数.

解 设较小的一个数为 x，则较大的数为 $4+x$. 根据题意，得

$x(4+x)=45.$

整理后，得 $x^2+4x-45=0$. 解这个方程，得 $x_1=5, x_2=-9$.

由 $x=5$，得 $4+x=9$；由 $x=-9$，得 $4+x=-5$.

答 这两个数为5、9或－9、－5.

题15 直角三角形的周长为 $2+\sqrt{6}$，斜边上的中线为1，求这个直角三角形的面积.

解 因为斜边中线为1，所以斜边长为2. 设两条直角边分别为 a、b，则

$$\begin{cases} a+b=\sqrt{6}, & ① \\ a^2+b^2=c^2=4. & ② \end{cases}$$

①式平方，减去②式，得 $ab=1$.

直角三角形面积 $S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}$.

答 这个三角形的面积是 $\frac{1}{2}$.

题16 两个正方形，小正方形的边长比大正方形的边长的一半多4厘米，大正方形的面积比小正方形的面积的2倍少32平方厘米，求大小两个正方形的边长.

解 设大正方形边长为 x 厘米，则小正方形的边长为 $\left(\frac{x}{2}+4\right)$ 厘米. 根据题意，得

$2\left(\frac{x}{2}+4\right)^2-x^2=32$，解得 $x_1=0$（不合题意，舍去），$x_2=16$.

当 $x=16$ 时，$\frac{x}{2}+4=8+4=12$.

答 大正方形的边长为16厘米，小正方形的边长为12厘米.

题17 某高新技术产业生产总值两年内由45万元增加到88.2万元，每年产值的平均增长率是多少？

解 设每年产值的平均增长率为x.根据题意，得

$45(1+x)^2=88.2,(1+x)^2=1.96,$

$1+x=\pm1.4,\therefore x_1=0.4,x_2=-2.4$（不合题意，舍去）.

$0.4\times100\%=40\%.$

答 每年产值的平均增长率是40%.

题18 某小化肥厂去年四月份某种化肥的产量为20万吨，通过技术革新，产量逐月上升，第二季度共生产了这种化肥95万吨，问五、六月份平均每月增产的百分率是多少？

解 设五、六月份平均每月增产的百分率为x，根据题意，得

$20+20(1+x)+20(1+x)^2=95,$

整理，得 $4x^2+12x-7=0.$

解得 $x_1=0.5$，或$x_2=-3.5$，但$x_2=-3.5$不合题意，舍去，所以$x=0.5=50\%$.

答 五、六月份平均每月增产50%.

题19 某化肥厂去年四月份生产化肥500吨，因管理不善，五月份的化肥产量减少了10%，从六月份起强化了管理，产量逐月上升，七月份产量达到648吨，求该厂六、七月份的月平均增长率.

解 设六、七月份的月平均增长率为x.五月份的化肥产量是：$500(1-10\%)=450$.根据题意，得

$450(1+x)^2=648.\ (1+x)^2=\frac{36}{25},$

$1+x=\pm\frac{6}{5},\therefore x_1=\frac{1}{5},x_2=-\frac{11}{5}$（不合题意，舍去）.

$\frac{1}{5}\times100\%=20\%.$

答 该厂六、七月份的平均月增长率为20%.

题20 某人将2000元人民币按一年定期存入银行，到期后支取1000元用于购物，剩下的1000元及应得利息又全部按一年定期存入银行，若存款的利率不变，到期后得本金和利息共1320元，求这种存款方式的年利率.

解 设年利率为x，根据题意，得

$[2000(1+x)-1000](1+x)=1320,$

整理，得$50x^2+75x-8=0$，解得$x_1=\frac{1}{10},x_2=-\frac{8}{5}.$

$x_2=-\frac{8}{5}$不合题意，舍去，所以只取$x_1=\frac{1}{10}=10\%.$

答 这种存款方式的年利率为10%.

二、一元二次方程的根的判别式

题 21 试述有关一元二次方程根的判别式及根的情况.

答 一元二次方程:$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.根的判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

(1) 当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根;

(3) 当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根.

5 **题 22** 方程 $kx^2-3x+2=0$ 有两个相等的实数根,则必须(　　).

A. $k=0$　　B. $k\geqslant 0$　　C. $k=-\frac{9}{8}$　　D. $k=\frac{9}{8}$

解 因为方程 $kx^2-3x+2=0$ 有两个相等的实数根,所以

$\Delta=(-3)^2-4k\times 2=9-8k=0$.

解得 $k=\frac{9}{8}$.故选择 D.

6 **题 23** 若关于 x 的方程 $kx^2-4x+3=0$ 有实数根,则 k 的非负整数值是(　　).

A. 0,1　　B. 0,1,2　　C. 1　　D. 1,2,3

解 根据题意,得 $\Delta=(-4)^2-4\times 3k=16-12k\geqslant 0$.

$\therefore k\leqslant\frac{4}{3}$,又 k 取非负整数,$\therefore k=0$ 或 1.故选择 A.

7 **题 24** 关于 x 的方程 $mx^2-2(3m-1)x+9m-1=0$ 有两个实数根,那么 m 值的范围是(　　).

A. $m\leqslant\frac{1}{5}$　　B. $0<m<\frac{1}{5}$ 或 $m<0$

C. $m\leqslant\frac{1}{5}$ 且 $m\neq 0$　　D. $m\geqslant\frac{1}{5}$

解 根据题意,得 $\Delta=[-2(3m-1)]^2-4m(9m-1)=4(-5m+1)\geqslant 0$.

$\therefore m\leqslant\frac{1}{5}$.又由题设知 $m\neq 0$,$\therefore m\leqslant\frac{1}{5}$ 且 $m\neq 0$.故选择 C.

8 **题 25** 已知 $k>0$ 且方程 $3kx^2+12x+k=-1$ 有两个相等的实数根,那么 k 的值等于(　　).

A. $2\sqrt{3}$　　B. $\pm 2\sqrt{3}$　　C. 3,−4　　D. 3

解 根据题意,得

$$\begin{cases}k>0,\\ \Delta=12^2-4\times 3k\cdot(k+1)=0;\end{cases}$$

解得 $k=3$.故选择 D.

9 **题26** 方程 $4x^2-2(a-b)x-ab=0$ 的根的判别式是(　　).

A. $4(a+b)^2$　　B. $(a+b)^2$　　C. $(a-b)^2$　　D. $(a-b)^2-4ab$

解 根据题意,得

$\Delta=[-2(a-b)]^2-4\times4\times(-ab)=4(a-b)^2+16ab$

$=4a^2-8ab+4b^2+16ab=4a^2+8ab+4b^2=4(a+b)^2$. 故选择 A.

10 **题27** 若 m 为不等于零的实数,则方程 $x^2+mx-m^2=0$ 的根的情况是(　　).

A. 有两个相等的实数根　　B. 有两个不等的实数根

C. 有两个实数根　　D. 无实数根

解 由 $\Delta=m^2-4\times(-m^2)=5m^2$,而 $m\neq0$,$\therefore 5m^2>0$,即 $\Delta>0$,$\therefore$方程有两个不相等的实数根. 故选择 B.

题28 当 k 不小于 $-\frac{1}{4}$ 时,方程 $(k-2)x^2-(2k-1)x+k=0$ (　　).

A. 有两个不等的实数根　　B. 有两个相等的实数根

C. 有两个实数根　　D. 没有实数根

解 $\because \Delta=[-(2k-1)]^2-4k(k-2)=4k+1$,而 $k\geqslant-\frac{1}{4}$,$\therefore 4k+1\geqslant0$,即 $\Delta\geqslant0$,$\therefore$方程有两个实数根. 故选择 C.

题29 对于方程 $x^2-2|x|+2=m$. 如果方程实根的个数恰为三个,则 m 等于(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 2.5

解 $\because |x|^2=x^2$,$\therefore$原方程可变为 $|x|^2-2|x|+2-m=0$.

$\because$此方程恰有 3 个实根,$\therefore$必有一个实根为 $|x|=0$(否则必有 4 个实根),

$\therefore 2-m=0$,$\therefore m=2$. 故选择 C.

题30 方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实根的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

解 显然 $x=0$ 不是原方程的根;

当 $x>0$ 时,原方程变为 $x^2-3x+2=0$,此方程有两个正根;

当 $x<0$ 时,原方程变为 $x^2-3x-2=0$,此方程有一正一负两个根,但 $x<0$,$\therefore$舍去正根,故只有一个负根.

综上所述,原方程有三个实根. 故选择 C.

题31 如果方程 $x^2+mx+2=0$ 和 $x^2+2x+m=0$ 至少有一个相等的实数根,求 m 的值.

解 设这两个方程的等根为 α,则有

$$\alpha^2+m\alpha+2=0, \quad ①$$

$$\alpha^2+2\alpha+m=0. \quad ②$$

①−②，得 $a=1$，

代入①，得 $1^2+m+2=0$，$\therefore m=-3$.

题32 已知方程 $(a+1)x^2+(|a+2|-|a-10|)x+a=5$ 有两个不等的实数根，则 a 可以是（　　）.

A. 5　　B. 9　　C. 10　　D. 11

解 原方程为 $(a+1)x^2+(|a+2|-|a-10|)x+a-5=0$. 由题设知方程有两个不等实数根，所以

$\Delta=(|a+2|-|a-10|)^2-4(a+1)(a-5)>0$，即

$62>a^2+|a+2|\cdot|a-10|$.

当 a 取 9、10、11 时，均不满足上面不等关系；只有当 a 取 5 时，才满足上面不等式. 事实上，当 $a=5$ 时，$a+1=6$，$|a+2|-|a-10|=7-5=2$，$a-5=0$. 故原方程为 $6x^2+2x=0$，其根为 0、$-\frac{1}{3}$. 故选择 A.

题33 如果关于 x 的方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，那么关于 x 的方程 $(m-5)x^2-2(2m+2)x+m=0$ 的实数根的个数为（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. 0　　D. 1 或 2

解 ∵方程 $mx^2-2(m+2)x+m+5=0$ 没有实数根，而当 $m=0$ 时，上面的方程变为 $-4x+5=0$，有实数根，$\therefore m\neq 0$，

所以上面的方程是一元二次方程. 设其判别式为 Δ_1，则

$\Delta_1=4(m+2)^2-4m(m+5)<0$，解得 $m>4$.

当 $m=5$ 时，方程 $(m-5)x^2-2(m+2)x+m=0$ 变为 $-14x+5=0$，有一个实根；

当 $m\neq 5$ 时，该方程是一元二次方程，设其判别式为 Δ_2，则

$\Delta_2=4(m+2)^2-4m(m-5)=36m+16$，又 $m>4$，$\therefore \Delta_2>0$.

于是该方程有两个不等实根. 故选择 D.

题34 m 取什么值时，方程 $(m+2)x^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实数根？

解 若方程有两个不相等的实数根，

则应 $\Delta=b^2-4ac=4-4(m+2)\times(-1)=4m+12>0$，$\therefore m>-3$.

∵方程有两个实数根，$\therefore m+2\neq 0$，即 $m\neq -2$.

∴当 $m>-3$ 且 $m\neq -2$ 时，方程 $(m+2)x^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实数根.

题35 m 是什么实数时，方程 $x^2-(m-2)x+1=0$ 有不相等的实根？

解 由 $\Delta=(m-2)^2-4=m^2-4m=m(m-4)>0$，得 $m>4$ 或 $m<0$.

∴当 $m>4$ 或 $m<0$ 时，方程 $x^2-(m-2)x+1=0$ 有不相等的实根.

题36 m 取什么值时，方程 $x^2-(m-3)x+(m+1)^2=0$ 有两个不相等的实数根？

解 由 $\Delta=[-(m-3)]^2-4(m+1)^2=-3m^2-14m+5>0$，

$3m^2+14m-5<0$，$(3m-1)(m+5)<0$，解得 $-5<m<\frac{1}{3}$.

∴当$-5<m<\frac{1}{3}$时,方程有两个不相等的实数根.

题37 已知$\sqrt{a+4}+|b-1|=0$,当k取何值时,方程$kx^2+ax+b=0$有两个不相等的实数根?

解 由$\sqrt{a+4}+|b-1|=0$,得

$\begin{cases}\sqrt{a+4}=0,\\|b-1|=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-4,\\b=1.\end{cases}$

∴方程为$kx^2-4x+1=0$.

根据题意,得$\begin{cases}k\neq0,\\\Delta=16-4k>0.\end{cases}$即当$k<4$且$k\neq0$时,方程有两个不相等的实数根.

题38 当m是什么整数时,关于x的一元二次方程$mx^2-4x+4=0$与$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$的根都是整数?

解 ∵一元二次方程$mx^2-4x+4=0$有实数根,

∴$\Delta=16-16m\geqslant0$, 解得$m\leqslant1$. ①

又方程$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$有实数根,

∴$\Delta=16m^2-4(4m^2-4m-5)\geqslant0$, 解得$m\geqslant-\frac{5}{4}$. ②

由①②得,$-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant1$. ∴$m$的整数解为$-1,0,1$.

当$m=0$时,方程$mx^2-4x+4=0$的二次项为零,不符合题意,舍去;

当$m=1$时,方程$mx^2-4x+4=0$的根为$x_1=x_2=2$,方程$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$的根为$x_1=5,x_2=-1$;

当$m=-1$时,方程$mx^2-4x+4=0$的根不是整数,不符合题意,舍去.

∴当$m=1$时,一元二次方程$mx^2-4x+4=0$与$x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$的根都是整数.

题39 当m为何值时,方程$(m^2-2)x^2-2(m+1)x+1=0$有两个不相等的实根?

解 当$m^2-2\neq0$,且$\Delta>0$时,原方程有两个不等实根.

由$m^2-2\neq0$,得$m\neq\pm\sqrt{2}$.

由$\Delta>0$,得$4(m+1)^2-4(m^2-2)>0$,

$m^2+2m+1-m^2+2>0$,∴$m>-\frac{3}{2}$.

∴当$m>-\frac{3}{2}$,且$m\neq\pm\sqrt{2}$时,原方程有两个不等实根.

题40 如果一元二次方程$x^2-3x+m=0$有两个相等的实数根,求m值.

解 ∵方程有两个相等实数根,

∴$\Delta=(-3)^2-4m=9-4m=0$,∴$m=\frac{9}{4}$.

题41 方程$(m-1)x^2+2(m-7)x+2m+2=0$有两个相等的实根，求m值.

解 ∵方程有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta=4(m-7)^2-4(m-1)(2m+2)=-4(m^2+14m-51)=0$，

$\therefore m_1=-17, m_2-3$. 即$m$值为$-17$或3.

题42 已知实数a、b、c满足$a+b+c=0$，$abc=8$，则求出c的取值范围.

解 由$a+b+c=0$，得$a=-b-c$. ①

把①代入$abc=8$中，得$(-b-c)bc=8$. $\therefore cb^2+c^2b+8=0$.

因为b是实数，故上面关于b的一元二次方程有实数解，所以

$\Delta=c^4-32c=c(c^3-32)\geqslant 0$. ②

因为$abc=8$，所以$c\neq 0$. 故由②得

$$\begin{cases}c>0,\\c^3-32\geqslant 0;\end{cases} \text{或} \begin{cases}c<0,\\c^3-32\leqslant 0.\end{cases}$$

解此两不等式组，得$c\geqslant 2\sqrt[3]{4}$或$c<0$.

题43 求方程$14x^2-4xy+11y^2-88x+34y+149=0$的实数解.

解 把原方程整理成关于x的二次方程，得

$14x^2-4(y+22)x+(11y^2+34y+149)=0$.

若它有实数解，则

$\Delta=[-4(y+22)]^2-4\times 14(11y^2+34y+149)=-600(y+1)^2\geqslant 0$，

$\therefore (y+1)^2\leqslant 0$. 又$\because (y+1)^2\geqslant 0$，$\therefore (y+1)^2=0$，$\therefore y=-1$.

把$y=-1$代入原方程，得$x^2-6x+9=0$. ，$\therefore x_1=x_2=3$.

所以原方程的实数解为$\begin{cases}x=3,\\y=-1.\end{cases}$

题44 设k为整数，且$k\neq 0$，方程$kx^2-(k-1)x+1=0$有有理根，求k值.

解 若使方程$kx^2-(k-1)x+1=0$有有理根，只需使判别式

$\Delta_1=(k-1)^2-4k$为完全平方数. 设$(k-1)^2-4k=m^2$(m为整数).

$\therefore k^2-6k+1-m^2=0$. ①

显然①应有整数根k，故①的判别式$\Delta_2=36-4(1-m^2)=32+4m^2$也是完全平方数. 再设$32+4m^2=n^2$($n$为正整数)，$\therefore (n+2m)(n-2m)=32$. 因为$n+2m$与$n-2m$同奇，同偶，故它们同为偶数，所以

$$\begin{cases}n+2m=16,\\n-2m=2;\end{cases} \text{或} \begin{cases}n+2m=8,\\n-2m=4.\end{cases} \text{解得 } m=\frac{7}{2}\text{(舍去)或 } m=1.$$

把$m=1$代入①中，得$k^2-6k=0$，$\therefore k_1=0$(舍去)，$k_2=6$.

故所求的k值为6.

题45 m是有理数，当k为何值时，方程$x^2-4mx+4x+3m^2-2m+4k=0$的根为

有理数？

解 原方程整理为 $x^2+4(1-m)x+(3m^2-2m+4k)=0$.

它的判别式

$\Delta_1=[4(1-m)]^2-4\times1\times(3m^2-2m+4k)=4m^2-24m-16k+16$.

要使方程有有理根，只需使 Δ_1 为 m 的完全平方式，若使 $4m^2-24m-16k+16$ 为 m 的完全平方式，只需使它的判别式

$\Delta_2=(-24)^2-4\times4\times(-16k+16)=0$,

$6^2+16k-16=0$, $\therefore k=-\dfrac{5}{4}$.

所以当 $k=-\dfrac{5}{4}$ 时，原方程有有理根.

题 46 已知方程 $x^2+2x=k-1$ 没有实数根，求证方程 $x^2+kx=1-2k$ 一定有两个不相等的实数根.

证明 ∵方程 $x^2+2x=k-1$ 没有实数根.

$\therefore \Delta_1=2^2-4(1-k)=4(1-1+k)=4k<0$, $\therefore k<0$.

设方程 $x^2+kx=1-2k$，即 $x^2+kx-(1-2k)=0$ 的判别式为 Δ_2，则

$\Delta_2=k^2+4(1-2k)=k^2-8k+4$.

$\because k<0$, $\therefore k^2>0$, $-8k>0$,

$\therefore k^2-8k+4>0$，即 $\Delta_2>0$.

∴方程 $x^2+kx=1-2k$ 有两个不等实数根.

题 47 已知：如图 11 - 1 所示，AD 为 $\triangle ABC(AB>AC)$ 的角平分线，AD 的垂直平分线与 BC 延长线交于点 E，设 $CE=a$, $DE=b$, $BE=c$.

求证：关于 x 的二次方程 $ax^2-2bx+c=0$ 有两个相等的实根.

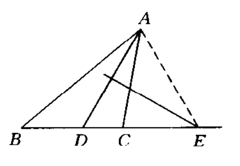


图 11 - 1

证明 连结 AE，则 $EA=ED$,

$\angle EAD=\angle EDA$.

$\because \angle BAD=\angle DAC$,

$\therefore \angle B=\angle ADE-\angle BAD=\angle EAD-\angle DAC=\angle CAE$.

又 $\because \angle AEC=\angle BEA$, $\therefore \triangle BAE\backsim\triangle ACE$, $\therefore \dfrac{AE}{BE}=\dfrac{EC}{AE}$,

$\therefore AE^2=BE\cdot CE$，即 $DE^2=BE\cdot CE$.

于是 $b^2-ac=0$，也就是方程的判别式 $\Delta=0$.

∴关于 x 的方程 $ax^2-2bx+c=0$ 有两个相等的实数根.

题 48 若 $a、b、c、d>0$，证明：在方程① $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}\,x+\sqrt{cd}=0$，② $\frac{1}{2}x^2+$

$\sqrt{2b+c}x+\sqrt{da}=0$，③ $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}x+\sqrt{ab}=0$，④ $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}x+\sqrt{bc}=0$ 中，至少有两个方程有不相等的实数根.

证明 设这四个方程的判别式分别为 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4，则

$$\Delta_1=(\sqrt{2a+b})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{cd}=2a+b-2\sqrt{cd}, \qquad ①$$

$$\Delta_2=(\sqrt{2b+c})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{da}=2b+c-2\sqrt{da}, \qquad ②$$

$$\Delta_3=(\sqrt{2c+d})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{ab}=2c+d-2\sqrt{ab}, \qquad ③$$

$$\Delta_4=(\sqrt{2d+a})^2-4\times\frac{1}{2}\sqrt{bc}=2d+a-2\sqrt{bc}, \qquad ④$$

而 $\Delta_1+\Delta_3=2a+b-2\sqrt{cd}+2c+d-2\sqrt{ab}$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{d})^2+a+c>0, \qquad ⑤$$

$\Delta_2+\Delta_4=2b+c-2\sqrt{da}+2d+a-2\sqrt{bc}$

$$=(\sqrt{a}-\sqrt{d})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+b+d>0. \qquad ⑥$$

若 $\Delta_1\leqslant0$，$\Delta_3\leqslant0$，则 $\Delta_1+\Delta_3\leqslant0$，与⑤式矛盾，故 Δ_1、Δ_3 中至少有一个大于零.

同理，由⑥可知：Δ_2、Δ_4 中至少有一个大于零. 故 Δ_1、Δ_2、Δ_3、Δ_4 中至少有两个大于零，即所给方程中至少有两个方程有不相等的实数根.

三、一元二次方程的根与系数关系

题19 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2，那么 x_1、x_2 与方程的系数 a、b、c 的关系是什么？

答 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

题20 已知方程 $x^2-6x+7=0$ 的两根为 x_1、x_2，则 $x_1{}^2+x_2{}^2$ 的值为（　　）.

A. 22　　B. 50　　C. 36　　D. -50

解 根据根与系数关系，有 $x_1+x_2=6$，$x_1\cdot x_2=7$. 则

$x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=6^2-2\times7=36-14=22$. 故选择 A.

题21 设 α、β 是关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$ 的两根，则 $\alpha^2+\beta^2$ 等于（　　）.

A. p^2+2q　　B. p^2-2q　　C. p^2+q^2　　D. p^2-q^2

解 ∵α、β 是方程的两个根，∴$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\cdot\beta=q$. 则

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-p)^2-2q=p^2-2q$. 故选择 B.

题52 一元二次方程 $px^2+qx+r=0(p\neq0)$ 的两根为 0 和 -1，则 $\frac{q}{p}$ 等于(　　).

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 不存在

解 设 $x_1=0, x_2=-1$，根据根与系数的关系，则

$x_1+x_2=0+(-1)=-\frac{q}{p}$，$\therefore \frac{q}{p}=-(-1)=1$. 故选择 C.

题53 关于 x 的一元二次方程 $x^2-ax-3a=0$ 的一根是 6，另一根是(　　).

A. 2　　B. -2　　C. -6 或 2　　D. 6 或 -2

解 设另一个根为 x_1，根据根与系数的关系，得

$\begin{cases}x_1+6=a,\\6x_1=-3a.\end{cases}$ 解得 $x_1=-2$　即另一个根是 -2. 故选择 B.

题54 如果方程 $2x^2-mx-4=0$ 的两根为 x_1、x_2，且 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$，那么实数 m 的值等于(　　).

A. 4　　B. -4　　C. 8　　D. -8

解 $\because x_1$、x_2 是方程的两根，$\therefore x_1+x_2=\frac{m}{2}$，$x_1\cdot x_2=-2$.

将已知式 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$ 变形，得 $\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2$，即 $\frac{\frac{m}{2}}{-2}=2$，

解得 $m=-8$. 故选择 D.

题55 已知一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的系数满足 $\left(\frac{b}{2}\right)^2=ac$，则方程的两根之比为(　　).

A. 0∶1　　B. 1∶1　　C. 1∶2　　D. 2∶3

解 将已知式 $\left(\frac{b}{2}\right)^2=ac$ 整理得：$b^2-4ac=0$，即 $\Delta=0$，

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根，$\therefore$ 两根之比为 1∶1. 故选择 B.

题56 以 $(1+\sqrt{3})$ 和 $(1-\sqrt{3})$ 为根，且二次项系数为 1 的一元二次方程是(　　).

A. $x^2+2x+2=0$　　B. $x^2-2x-2=0$

C. $x^2-2x+2=0$　　D. $x^2+2x-2=0$

解 $\because$ 所求作方程的二根为 $(1+\sqrt{3})$ 和 $(1-\sqrt{3})$，

$\therefore (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$，

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-(\sqrt{3})^2=-2$，

$\therefore$ 所求作方程为 $x^2-2x-2=0$. 故选择 B.

题57 已知方程 $x^2+(2k+1)x+k^2-2=0$ 的两个实数根的平方和等于 11，则(　　).

A. $k=-3$ 或 $k=1$　　B. $k=-3$　　C. $k=1$　　D. $k=3$

解 设方程两根为 x_1、x_2，则

$x_1+x_2=-(2k+1)$，　$x_1\cdot x_2=k^2-2$.

$\therefore x_1{}^2+x_2{}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$

$=[-(2k+1)]^2-2(k^2-2)=2k^2+4k+5=11$，

即 $k^2+2k-3=0$，　解得 $k_1=-3$，$k_2=1$.

又当 $k_1=-3$ 时，$\Delta=(2k+1)^2-4(k^2-2)=4k+9<0$，$\therefore$ 只取 $k=1$.

故选择 C.

题 58 方程 $x^2-2\sqrt{5}x-3=0$ 的解的情况适合于结论（　）.

A. 没有实数根　　B. 有两个正根

C. 有两个负根　　D. 有一个正根和一个负根

解 由 $\Delta=(-2\sqrt{5})^2-4\times(-3)=32>0$ 知方程有两个不等实根，设其为 x_1、x_2，由 $x_1\cdot x_2=-3<0$ 知 x_1、x_2 异号，即方程有一个正根和一个负根. 故选择 D.

题 59 以 $(1+\sqrt{3})$ 和 $(1-\sqrt{3})$ 为根，且二次项系数为 1 的一元二次方程是（　）.

A. $x^2+2x+2=0$　　B. $x^2-2x-2=0$

C. $x^2-2x+2=0$　　D. $x^2+2x-2=0$

解 $\because (1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2$，

$(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=1-3=-2$.

$\therefore$ 所求方程为 $x^2-2x-2=0$. 故选择 B.

题 60 已知 $p<0$，$q<0$，则一元二次方程 $x^2+px+q=0$（　）.

A. 一定有一个正实根和一个负实根，并且正实根的绝对值大

B. 一定有一个正实根和一个负实根，并且负实根的绝对值大

C. 一定有两个实根，它们互为相反数

D. 不一定有实根

解 由根的判别式可得　$\Delta=p^2-4q$；

$\because p<0$，$q<0$，则 $\Delta>0$；$\therefore$ 所以方程有不相等两个实根.

设方程两根为 x_1，x_2，根据根与系数的关系，得

$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$　$\because p<0$，$q<0$，

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-p>0, & ① \\ x_1\cdot x_2=q<0. & ② \end{cases}$

由②知两根 x_1、x_2 异号，即一个正根，一个负根；

由①知正实根的绝对值大. 故选择 A.

题 61 若方程 $x^2+px-q=0$ 的两根为 x_1、x_2，且 $x_1>1$，$p+q+3>0$，则 x_2（　　）.

A. 小于 1　　B. 等于 1　　C. 大于 1　　D. 不确定

解 ∵x_1、x_2 是方程的两根，根据根与系数关系，得

$x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=-q$.

∴$p+q+3=-x_1-x_2-x_1\cdot x_2+3>0$，∴$x_1+x_2+x_1\cdot x_2<3$.

∵$x_1>1$，∴$1+x_2+x_1\cdot x_2<3$，∴$(1+x_1)x_2<2$，

∴$x_2<\dfrac{2}{1+x_1}<\dfrac{2}{1+1}=1$. 故选择 A.

题 62 已知：方程 $x^2+ax-4=0$ 的两根的绝对值相等，求这个方程的根.

解 设方程两根为 x_1、x_2，则 $|x_1|=|x_2|$.

由 $|x_1|=|x_2|$ 得到 $x_1=\pm x_2$，根据根与系数关系，有

$x_1\cdot x_2=4$，∴$\pm x_1^2=4$，∴$x_1^2=4$ 或 $x_1^2=-4$（无解）.

∴$x_1=\pm 2$，此时 $x_2=\mp 2$，即方程两根是 ± 2.

题 63 设方程 $x^2-101x+k-2=0$ 的一个根的 3 倍少 7 为另一个根，求 k 值.

解 设一个根为 x_1，则另一个根为 $3x_1-7$. 根据根与系数的关系，得

$$\begin{cases}x_1+(3x_1-7)=101,\\ x_1(3x_1-7)=k-2.\end{cases}$$ 解得 $k=2000$.

答 k 的值是 2000.

题 64 已知：$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$、$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 是关于 x 的二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 的两个根，求 b 的值.

解 根据根与系数的关系，得

$$\begin{cases}\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}=-\dfrac{b}{a},\\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1}{a}.\end{cases}$$ 解得 $b=-1$.

答 b 的值是 -1.

题 65 已知：方程 $x^2-2mx+m^2-4=0$，不解方程，求证：

(1)它有两个不相等的实数根；

(2)当 $m>2$ 时，它的两个根都是正数.

证明 (1)∵$\Delta=(-2m)^2-4(m^2-4)=4m^2-4m^2+16=16>0$，

∴方程有两个不相等的实数根.

(2)设 x_1、x_2 为已知方程的两个根，由根与系数关系，得

$$\begin{cases}x_1+x_2=2m,\\ x_1x_2=m^2-4.\end{cases}$$

$\because m>2$，$\therefore 2m>0$，$m^2-4>0$，$\therefore \begin{cases} x_1+x_2>0, \\ x_1\cdot x_2>0. \end{cases}$

$\because x_1x_2>0$，$\therefore x_1$、x_2 同号，又 $\because x_1+x_2>0$，$\therefore x_1>0$，$x_2>0$.

$\therefore$ 当 $m>2$ 时，已知方程的两个根都是正数.

题66 设 x_1、x_2 是方程 $x^2+3x-4=0$ 的两个根，求 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ 的值.

解 $\because x_1$、x_2 是方程的两个根，根据根与系数的关系，得

$x_1+x_2=-3$，$x_1\cdot x_2=-4$.

$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$.

题67 关于 x 的方程 $x^2+(m-2)x-m-3=0$ 的两根的差的平方不大于 25，求最大的整数 m.

解 设 x_1、x_2 是方程的两个根，则

$x_1+x_2=2-m$，$x_1\cdot x_2=-m-3$.

$\because (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2=(2-m)^2+4(m+3)=m^2+16$.

而 $(x_1-x_2)^2\leqslant 25$，即 $m^2+16\leqslant 25$，解得 $-3\leqslant m\leqslant 3$.

$\because \Delta=m^2+16>0$，$\therefore m$ 的最大整数是 3.

题68 关于 x 的方程 $x^2+(2m-3)x+m^2+6=0$ 的两实根之积是两实根之和的 2 倍，求 m 的值.

解 设方程的两实根分别为 x_1、x_2，则

$x_1+x_2=-(2m-3)$，$x_1x_2=m^2+6$.

根据题意，得 $m^2+6=2(3-2m)$，

$\therefore m^2+4m=0$，$m_1=0$，或 $m_2=-4$.

由 $\Delta=(2m-3)^2-4(m^2+6)\geqslant 0$，

$\therefore -12m-15\geqslant 0$，$m\leqslant -\frac{5}{4}$.

当 $m=0$ 不合题意，$\therefore m$ 的值为 -4.

题69 已知：关于 x 的方程 $2x^2-2tx+t=0$ 的两个实数根 x_1、x_2 满足 $(x_1-1)(x_2-1)=2$，求 $\frac{t^4-1}{t-1}$ 的值.

解 $\because x_1$、x_2 是方程的两个根，根据根与系数的关系：

$\therefore x_1+x_2=-\frac{-2t}{2}=t$，$x_1\cdot x_2=\frac{t}{2}$.

把已知式 $(x_1-1)(x_2-1)=2$ 变形得

$x_1\cdot x_2-(x_1+x_2)+1=2$，$\therefore \frac{t}{2}-t+1=2$，$\therefore t=-2$.

$\therefore \frac{t^4-1}{t-1}=\frac{(t+1)(t-1)(t^2+1)}{t-1}=(t+1)(t^2+1)=(-2+1)(4+1)=-5$.

题70 设 x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+(2m+1)x+(m-2)^2=0$ 的两个实数根，当 m 取什么值时，$(x_1-x_2)^2=15$？

解 根据根与系数的关系，得

$x_1+x_2=-(2m+1)$，$x_1\cdot x_2=(m-2)^2$.

$\because (x_1-x_2)^2=15$，则 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=15$，

$\therefore [-(2m+1)]^2-4(m-2)^2=15$，

$4m^2+4m+1-4m^2+16m-16=15$，$\therefore m=\frac{3}{2}$.

并且当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$\Delta=(2m+1)^2-4(m-2)^2=15>0$.

$\therefore$ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时，$(x_1-x_2)^2=15$.

题71 已知 x_1、x_2 为方程 $x^2-(m+1)x+m=0$ 的两个不相等的实数根，且有 $(x_1-x_2)^2<4$，求 m 的取值范围.

解 根据题意，方程有两个不相等的实数根 x_1、x_2，

$\therefore \Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2>0$，则 $m\neq1$.

又 $(x_1-x_2)^2<4$，而 $x_1+x_2=m+1$，$x_1\cdot x_2=m$，

$\therefore (x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=(m+1)^2-4m=(m-1)^2<4$，

$\therefore -1<m<3$.

综上，m 的取值范围是 $-1<m<3$ 且 $m\neq1$.

题72 已知方程 $(x-1)(x-2)=k^2$，k 为实数，且 $k\neq0$，不解方程证明：

(1)这个方程有两个不相等的实数根；

(2)一个根大于1，另一个根小于1.

证明 (1)原方程整理，得 $x^2-3x+2-k^2=0$.

$\because \Delta=(-3)^2-4(2-k^2)=9-8+4k^2=1+4k^2>0$，

$\therefore$ 原方程有两个不等实根.

(2)设原方程的两个不等实根分别为 α、β，则：

$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2-k^2-3+1=-k^2$.

$\because k\neq0$，$\therefore -k^2<0$，即 $(\alpha-1)(\beta-1)<0$，$\therefore \alpha-1$ 与 $\beta-1$ 异号，

$\therefore$ 原方程的一个根大于1，另一个根小于1.

题73 设 x_1、x_2 是方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个根，利用韦达定理，求下列各式的值：

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$；　　(2) $(x_1-x_2)^2$；　　(3) x_1-x_2.

解 $\because x_1$、x_2 是方程的两个根，根据韦达定理，得

$x_1+x_2=-\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}$.

(1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=3$;

(2) $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{4}$;

(3) 由(2)知$(x_1-x_2)^2=\frac{17}{4}$，$\therefore x_1-x_2=\pm\frac{\sqrt{17}}{2}$.

题74 已知x_1、x_2是关于x的方程$4x^2-(3m-5)x-6m^2=0$的两个实数根，且$\left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\frac{3}{2}$，求$m$的值.

解 $\because \Delta=[-(3m-5)]^2-4\times4\times(-6m^2)=(3m-5)^2+96m^2$，

$\therefore m$为任何实数，都有$\Delta>0$.

$\because \left|\frac{x_1}{x_2}\right|=\frac{3}{2}$，而$x_1\cdot x_2=-\frac{3}{2}m^2\leqslant0$. $\therefore \frac{x_1}{x_2}=-\frac{3}{2}$.

故可设$x_1=3k$，$x_2=-2k$，

又$\because x_1+x_2=\frac{3m-5}{4}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{3}{2}m^2$，

$\therefore \begin{cases}k=\frac{3m-5}{4},\\4k^2=m^2.\end{cases}$ 化简，得$m^2-6m+5=0$，

$\therefore m=1$或$m=5$.

题75 利用根与系数的关系，求一个一元二次方程，使它的根分别是方程$2x^2-3x+1=0$的各根的平方.

解 设方程$2x^2-3x+1=0$的两根是x_1、x_2，则所求作方程的根是${x_1}^2$、${x_2}^2$，

$\because x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{1}{2}$，

$\therefore {x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$，

${x_1}^2\cdot{x_2}^2=(x_1\cdot x_2)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

因此，所求作的方程是：$y^2-\frac{5}{4}y+\frac{1}{4}=0$，即$4y^2-5y+1=0$.

题76 已知：关于x的方程$x^2+bx+4b=0$有两个相等实根，y_1、y_2是关于y的方程$y^2+(2-b)y+4=0$的两实根，求以$\sqrt{y_1}$、$\sqrt{y_2}$为根的一元二次方程.

解 $\because x^2+bx+4b=0$有两个相等实根.

$\therefore \Delta=b^2-16b=0$，$b=0$或$b=16$.

当$b=0$时，$y^2+2y+4=0$，$\Delta_1=4-16<0$，无实根.

当$b=16$时，$y^2-14y+4=0$，$\Delta_2=(-14)^2-4\times4=180>0$，

$\therefore y_1+y_2=14, y_1y_2=4.$

则 $y_1>0, y_2>0$，$\therefore \sqrt{y_1}\cdot\sqrt{y_2}=\sqrt{y_1y_2}=\sqrt{4}=2$，

$(\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2})^2=3\sqrt{2}$，(负值舍去).

$\therefore$所求方程为 $z^2-3\sqrt{2}z+2=0$.

题77 设 α、β 为关于 x 的方程 $(x-a)(x-b)-cx=0$ 的根，试证明关于 x 的方程 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$ 的根是 a、b.

证明 方程 $(x-a)(x-b)-cx=0$ 变形为 $x^2-(a+b+c)x+ab=0$.

根据根与系数的关系，得

$\alpha+\beta=a+b+c, \alpha\beta=ab.$ ①

方程 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$ 变形为

$x^2-(\alpha+\beta-c)x+\alpha\beta=0.$ ②

把①代入②，得 $x^2-(a+b)x+ab=0$，

$(x-a)(x-b)=0$，$\therefore x_1=a, x_2=b$.

即关于 x 的方程 $(x-\alpha)(x-\beta)+cx=0$ 的根为 a、b.

题78 已知：不等式 $|x-a|<b$ 的解集为 $-7<x<1$，求以 a、b 为根的一元二次方程.

解 解不等式 $|x-a|<b$ 得 $a-b<x<a+b$.

又$\because$它的解集是 $-7<x<1$，所以

$\begin{cases}a+b=1,\\a-b=-7.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

所以以 a、b 为根的一元二次方程为 $y^2-y-12=0$.

题79 已知：x_1、x_2 是关于 x 的方程 $x^2+2x+m^2=0$ 的两个根，且 $(x_1-x_2)^2=2$. 求 m 的值.

解 $\because x_1$、x_2 是方程 $x^2+2x+m^2=0$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=-2, x_1\cdot x_2=m^2$.

而 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=2$，

$\therefore (-2)^2-4m^2=2$，解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

题80 已知：关于 x 的方程 $x^2-\sqrt{2}mx+m=0$ 的两个不相等的实数根恰好是一个直角三角形的两锐角的余弦，求 m 的值.

解 设直角三角形两锐角分别为 α、β，根据题意，m 的值必须满足下列各式：

判别式 $\Delta=(-\sqrt{2}m)^2-4m=2m^2-4m>0.$ ①

由根与系数的关系可知 $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}m$， ②

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = m. \quad ③$$

$\because \alpha$、β为直角三角形两锐角，$\therefore \alpha$、β互余，即$\cos\beta=\sin\alpha$，代入②、③，得

$$\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}m, \quad ④$$

$$\cos\alpha\sin\alpha=m. \quad ⑤$$

把④式平方，得$(\sqrt{2}m)^2=(\cos\alpha+\sin\alpha)^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\cdot\sin\alpha$，

把$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$和⑤代入上式消去$\alpha$，得

$2m^2=1+2m$. $\therefore m_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$m_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.

当$m_1=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$时，

$\Delta=2\times\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\times\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0$，不满足①式，舍去；

当$m_2=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$时，

$\Delta=2\times\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\times\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}>0$，满足①式.

但是$\cos\alpha\cdot\cos\beta=m>0$，而$m_2<0$，$\therefore$这样的$m$不存在.

题81 已知关于x的方程$(a+c)x^2+2bx-(c-a)=0$的两根之和为-1，两根之差为1，其中a、b、c是$\triangle ABC$的三边长.

(1)求方程的两根；

(2)试判断$\triangle ABC$的形状.

解 (1)设方程$(a+c)x^2+2bx-(c-a)=0$的两个根为x_1、x_2，且$x_1>x_2$，根据已知，得

$\begin{cases}x_1+x_2=-1,\\x_1-x_2=1.\end{cases}$解得$x_1=0$，$x_2=-1$.

(2)把$x_1=0$和$x_2=-1$代入所给方程，得

$$\begin{cases}c-a=0,\\a+c-2b-(c-a)=0.\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}c-a=0,\\a-b=0.\end{cases}$$

$\therefore a=b=c$，$\triangle ABC$为等边三角形.

题82 已知：三角形两条边的长是关于x的方程$x^2-(a+b)x+ab=0$的两根，且此两根的平方和等于3与两根之积的差，求ab的取值范围.

解 解方程$x^2-(a+b)x+ab=0$，得$x_1=a$，$x_2=b$. 根据题设条件，得

$$a^2+b^2=3-ab，即(a+b)^2=3+ab. \quad ①$$

∵方程 $x^2-(a+b)x+ab=0$ 有两个实数根，

∴$\Delta=(a+b)^2-4ab\geqslant 0$. ②

将①代入②得 $3+ab-4ab\geqslant 0$，∴$ab\leqslant 1$.

又∵a、b 是三角形的边长，∴a、b 是正数，故 $0<ab\leqslant 1$.

题 83 已知：方程 $x^2-4mx+4m^2-6m-8=0$ 有两个不等的实数根 x_1 和 x_2，且 m 为负整数，求 $x_1^4+x_2^4$ 的值.

解 ∵原方程有两个不等的实数根，

∴$\Delta=(-4m)^2-4(4m^2-6m-8)>0$，∴$m>-\dfrac{4}{3}$.

又∵m 为负整数，∴$m=-1$.

∴原方程就是 $x^2+4x+2=0$. ∴$x_1+x_2=-4$，$x_1\cdot x_2=2$.

∴$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-4)^2-2\times 2=12$，

∴$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=12^2-2\times 2^2=136$.

题 84 设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-4mx+2m^2+3m-2=0$ 的两个实根，当 m 为何值时，$x_1^2+x_2^2$ 有最小值，并求出这个最小值.

解 ∵方程有实根，

∴$\Delta=16m^2-8(2m^2+3m-2)\geqslant 0$，即 $3m-2\leqslant 0$，∴$m\leqslant\dfrac{2}{3}$.

又 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(2m)^2-2\times\dfrac{1}{2}(2m^2+3m-2)$

$$=2m^2-3m+2=2\left(m-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}.$$

∵$m\leqslant\dfrac{2}{3}$，∴当 $m=\dfrac{2}{3}$时，上式取最小值$\dfrac{8}{9}$.

题 85 如果 $a^2+11a=-16$，$b^2+11b=-16$，$(a\neq b)$. 求$\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}$的值.

解 由已知条件知，a、b 是一元二次方程 $x^2+11x+16=0$ 的二不等根.

∴$a+b=-11$，$ab=16$.

又$\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)^2=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}+2=\dfrac{a^2+b^2}{ab}+2=\dfrac{(a+b)^2-2ab}{ab}+2$

$$=\frac{(-11)^2-2\times 16}{16}+2=\frac{11^2}{16}.$$

又$\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\geqslant 0$，

∴$\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\sqrt{\dfrac{11^2}{16}}=\dfrac{11}{4}$.

题 86 关于 x 的方程

$x^2-mx-\dfrac{3}{4}m-1=0$， ①

与 $2x^2-(m+6)x-m^2+4=0$. ②

若方程①的两个实数根的平方和等于方程②的一个整数根，求 m 的值.

解 设方程①的两个实数根为 α、β，那么

$\alpha+\beta=m, \alpha\beta=-\frac{3}{4}m-1$.

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=m^2-2\left(-\frac{3}{4}m-1\right)=m^2+\frac{3}{2}m+2$.

方程②可变形为

$[2x+(m-2)][x-(m+2)]=0$.

解得 $x_1=-\frac{m-2}{2}$，或 $x_2=m+2$.

若 x_1 为整数根，则 $m^2+\frac{3}{2}m+2=-\frac{m-2}{2}$，解得 $m=-1$.

此时 $x_1=-\frac{-1-2}{2}=\frac{3}{2}$，不是整数根，不合题意，舍去.

若 x_2 为整数根，则 $m^2+\frac{3}{2}m+2=m+2$，解得 $m=-\frac{1}{2}$，$m=0$.

当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$x_2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$ 不是整数，不合题意，舍去.

当 $m=0$ 时，$x_2=0+2=2$，是整数，此时方程①为 $x^2-1=0$，有两个实数根，符合题意，

$\therefore m=0$.

题 87 已知关于 x 的方程 $kx^2+(2k-1)x+k-1=0$ ①，只有整数根，且关于 y 的一元二次方程 $(k-1)y^2-3y+m=0$ ②，有两个实数根 y_1 和 y_2.

(1)当 k 为整数时，确定 k 的值；

(2)在(1)的条件下，若 $m>-2$，用关于 m 的代数式表示 $y_1^2+y_2^2$.

解 (1)当 $k=0$ 时，方程①化为 $-x-1=0$，$x=-1$，方程有整数根.

当 $k\neq0$ 时，方程①可化为 $(x+1)(kx+k-1)=0$，

解得 $x_1=-1$，$x_2=\frac{-k+1}{k}=-1+\frac{1}{k}$.

$\because$ 方程①的根是整数，所以 k 为整数的倒数.

$\because k=\pm1$，此时，$\Delta=(2k-1)^2-4k(k-1)=1>0$.

但当 $k=1$ 时，$(k-1)y^2-3y+m=0$ 不是一元二次方程，

$\therefore k=1$ 舍去，$\therefore k=0$，$k=-1$.

(2)当 $k=0$ 时，方程②化为 $-y^2-3y+m=0$.

$\because$ 方程②有两个实数根，

$\therefore \Delta=9+4m\geqslant0$，即 $m\geqslant-\frac{9}{4}$，又 $m>-2$，

∴当 $m>-2$ 时，$y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=9+2m$，

当 $k=-1$ 时，方程②化为 $-2y^2-3y+m=0$，

方程有两个实数根，

∴$\Delta=9+8m\geqslant0$，即 $m\geqslant-\dfrac{9}{8}$.

∵$m>-2$，∴当 $-2<m<-\dfrac{9}{8}$ 时，方程②无实根；

当 $m\geqslant-\dfrac{9}{8}$ 时，$y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=\dfrac{9}{4}+m$.

题 88 已知：关于 x 的二次方程 $ax^2-4x+4=0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2.

(1)求 a 的取值范围；

(2)若 $x_1{}^3+x_2{}^3=\dfrac{16}{a}$，试求 a 的值；

(3)设 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 为 x 轴上的两点，$x_1>x_2$，O 为原点，并且 $OA+OB=2\sqrt{3}$，试求 A、B 两点的坐标.

解 (1)$ax^2-4x+4=0$ 有两个不相等的实数根，

∴$\begin{cases}a\neq0,\\ \Delta=(-4)^2-4\times4a>0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a\neq0,\\ a<1.\end{cases}$

∴a 的取值范围是 $a<1$ 且 $a\neq0$.

(2)由根与系数关系可知：

$x_1+x_2=\dfrac{4}{a}$，$x_1x_2=\dfrac{4}{a}$.

∴$x_1{}^3+x_2{}^3=(x_1+x_2)(x_1{}^2-x_1x_2+x_2{}^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$

$$=\frac{4}{a}\left(\frac{16}{a^2}-\frac{12}{a}\right)=\frac{16}{a},$$

∴$a^2+3a-4=0$，∴$a_1=-4$，$a_2=1$.

经检验 $a_1=-4$，$a_2=1$ 都是方程的根，但 $a=1$ 不在 a 的取值范围内，

∴$a=-4$.

(3)∵$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{4}{a},\\ x_1x_2=\dfrac{4}{a};\end{cases}$ 且 $a<1$，$a\neq0$.

①当 $0<a<1$ 时，$\begin{cases}x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0,\end{cases}$ 则$\begin{cases}x_1>0,\\ x_2>0.\end{cases}$

又 $OA+OB=2\sqrt{3}$，∴$x_1+x_2=2\sqrt{3}$，∴$\dfrac{4}{a}=2\sqrt{3}$，$a=\dfrac{4}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}>1$，此时不合题意，舍去.

②当 $a<0$ 时，$\begin{cases}x_1+x_2<0,\\x_1x_2<0;\end{cases}$ 又 $x_1>x_2$，$\therefore x_1>0,x_2<0$.

由 $OA+OB=2\sqrt{3}$，$\therefore x_1-x_2=2\sqrt{3}$，$\therefore (x_1-x_2)^2=12$.

即 $(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=12$，$\frac{16}{a^2}-\frac{16}{a}=12$.

$3a^2+4a-4=0$，$a=\frac{2}{3}$ 或 $a=-2$.

经检验 $a=\frac{2}{3}$，$a=-2$ 都是方程的根，但 $a<0$，故舍去 $a=\frac{2}{3}$，取 $a=-2$.

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4}{-2}=-2,\\x_1-x_2=2\sqrt{3};\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=-1+\sqrt{3},\\x_2=-1-\sqrt{3}.\end{cases}$

则 $A(-1+\sqrt{3},0)$，$B(-1-\sqrt{3},0)$.

题 89 已知：方程 $x^2-3x+m+4=0$ 有两个整数根. 求证：

(1) 这两个根中，一个是奇数而另一个是偶数；

(2) m 是负的偶数；

证明 (1)设两个根为 x_1、x_2，则 $x_1+x_2=3$.

$\because 3$ 是奇数，$\therefore x_1$、x_2 必是一个奇数，一个偶数.

(2)根据韦达定理，得 $x_1\cdot x_2=m+4$.

$\because x_1$、x_2 一奇一偶，$\therefore x_1\cdot x_2=$ 是偶数，$\therefore m+4$ 是偶数，$\therefore m$ 是偶数.

又 $\because$ 方程有两个整数根，

$\therefore \Delta\geqslant 0$，即 $(-3)^2-4(m+4)\geqslant 0$，解得 $m\leqslant -\frac{7}{4}$，故 m 为负偶数.

题 90 已知：一元二次方程 $(k-1)x^2-px+k=0$ 有两个正整数根，且 k 为整数，求 $k^{kp}+(p^p+k^k)+(p+5k)$ 的值.

解 设方程的两个正整数根分别为 x_1、x_2. 则

$x_1+x_2=\frac{p}{k-1}$， ①

$x_1\cdot x_2=\frac{k}{k-1}$. ②

$\because x_1$、x_2 是正整数，$\therefore x_1\cdot x_2$ 是正整数，于是由②可知 $\frac{k}{k-1}$ 也是正整数，又 k 为整数，

$\therefore k-1=1$(否则，k 与 $k-1$ 互质，而 $\frac{k}{k-1}$ 就不可能是整数).

$\therefore k=2$. ③

把③代入②得，$x_1x_2=2$

$\therefore x_1=1,x_2=2$(或 $x_1=2,x_2=1$).

把上面的结果代入①，得，$1+2=\frac{p}{2-1}$，$\therefore p=3$.

$\therefore k^{kp}+(p^p+k^k)+(p+5k)=2^{2\times3}+(3^3+2^2)+(3+5\times2)=108.$

题91 已知:方程 $x^2+bx+c=0$ 及 $x^2+cx+b=0$ 分别各有两个整数根 x_1,x_2 和 x'_1,x'_2 且 $x_1\cdot x_2>0,x'_1\cdot x'_2>0$.求证:

(1) $x_1<0,x_2<0,x'_1<0,x'_2<0$;

(2) $b-1\leqslant c\leqslant b+1$;

(3) 求所有可能的 b、c 值.

证明 (1)假设 $x_1>0$,则由 $x_1x_2>0$ 知 $x_2>0$.对于两个已知方程,根据韦达定理,得,$x_1+x_2=-b=-x'_1x'_2>0$,$\therefore x'_1x'_2<0$,这与已知 $x'_1x'_2>0$ 矛盾,$\therefore x_1<0,x_2<0$.

同理,证得 $x'_1<0,x'_2<0$.

(2)根据韦达定理及 $x_1<0,x_2<0$,且 x_1、x_2 是整数,则

$c-(b-1)=x_1\cdot x_2+x_1+x_2+1=(x_1+1)(x_2+1)\geqslant0$,$\therefore c\geqslant b-1$.

对于方程 $x^2+cx+b=0$ 进行同样的讨论,得 $b\geqslant c-1$.

综合以上讨论结果有 $b-1\leqslant c\leqslant b+1$.

(3)根据(2)的结果可分下列情况讨论:

(i)当 $c=b+1$ 时,根据韦达定理,有

$x_1x_2=c=-x_1-x_2+1$.

从而 $(x_1+1)(x_2+1)=2$,由于 x_1,x_2 都是负整数,所以

$\begin{cases}x_1+1=-1,\\x_2+1=-2;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1+1=-2,\\x_2+1=-1.\end{cases}$

由此解得 $x_1=-2,x_2=-3$ 或 $x_1=-3,x_2=-2$.

$\therefore b=5,c=6$.经检验 $b=5,c=6$ 符合题意.

(ii)当 $c=b$ 时,有 $x_1x_2=c=-(x_1+x_2)$,从而 $(x_1+1)(x_2+1)=1$.因此,$x_1=x_2=-2$,故 $b=c=4$.经检验 $b=c=4$ 符合题意.

(iii)当 $c=b-1$ 时,$b=c+1$ 对方程 $x^2+cx+b=0$ 作与(i)类似的讨论,得 $b=6,c=5$.

综上所述得 b、c 三组值:$\begin{cases}b=5,\\c=6;\end{cases}$ $\begin{cases}b=6,\\c=5;\end{cases}$ $\begin{cases}b=4,\\c=4.\end{cases}$

题92 已知:方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两根之和为 S_1,两根平方和为 S_2,两根立方和为 S_3,试求 $aS_3+bS_2+cS_1$ 的值.

解 设 x_1、x_2 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的二根,则

$ax_1^2+bx_1+c=0$, ①

$ax_2^2+bx_2+c=0$. ②

①$\times x_1+$②$\times x_2$ 得 $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+ax_2^3+bx_2^2+cx_2=0$,

$a(x_1^3+x_2^3)+b(x_1^2+x_2^2)+c(x_1+x_2)=0$,$\therefore aS_3+bS_2+cS_1=0$.

题93 设方程 $x^2+3x+1=0$ 的两个根为 x_1、x_2,求 $x_1^7+x_2^7$ 的值.

解 $\because x_1$、x_2 是方程的二根,根据韦达定理,得

$x_1+x_2=-3, x_1\cdot x_2=1.$

$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-3)^2-2\times1=7.$

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=7^2-2\times1^2=47.$

$$x_1^6+x_2^6=(x_1^2)^3+(x_2^2)^3=(x_1^2+x_2^2)(x_1^4-x_1^2x_1^2+x_2^4)$$
$$=7\times(47-1)=7\times46.$$

$$x_1^7+x_2^7=(x_1+x_2)(x_1^6-x_1^5x_2+x_1^4x_2^2-x_1^3x_2^3+x_1^2x_2^4-x_1x_2^5+x_2^6)$$
$$=(x_1+x_2)[(x_1^6+x_2^6)-x_1x_2(x_1^4+x_2^4)+x_1^2x_2^2(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)]$$
$$=(-3)\times[7\times46-1\times47+(7-1)]$$
$$=-3\times281=-843.$$

题 94 已知实数 x、y、z 满足 $x=6-y, z^2=xy-9$，比较 x、y 大小关系.

解 由已知条件，得 $x+y=6, xy=z^2+9$.

$\therefore x$、y 是二次方程 $t^2-6t+(z^2+9)=0$ 的两个根，于是它的判别式

$\Delta=(-6)^2-4(z^2+9)=36-4z^2-36=-4z^2\geqslant0, \therefore z^2\leqslant0$,

又 $\because z^2\geqslant0, \therefore z^2=0$.

从而 $\Delta=0$，故上面关于 t 的方程有两个相等的实数根，即 $x=y$.

题 95 已知关于 x 的方程 $x^2-(a-1)x+a=0$ 的两根之比为 2∶3，求这两个根.

解 根据题意设此方程的二根为 $2k$、$3k$，则

$2k+3k=5k=a-1$, ①

$2k\cdot3k=6k^2=a$. ②

②－①得，$6k^2-5k-1=0$. $\therefore k_1=1, k_2=-\dfrac{1}{6}$.

$\therefore$原方程的两根是 2，3 或 $-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{2}$.

四、分式方程(组)和无理方程(组)的解法及应用

题 96 什么是分式方程？什么是无理方程？解分式方程和无理方程的主要方法是什么？

解 分式方程是指分母中含有未知数的方程，解分式方程的方法有两种：(1)去分母法；(2)换元法. 分式方程必须检验.

无理方程是指根号下含有未知数的方程，解无理方程的方法有两种：(1)平方法；(2)

换元法.无理方程必须检验.

题 97 方程 $3x+\frac{1}{x-6}=4$,$4x-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=2$,$\frac{x^2}{3+\sqrt{2}}-\frac{x}{4}=15$,$\frac{x-4}{5x-3}=0$ 中,分式方程的个数是( ).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解 根据分式方程的定义:分母中含有未知数的方程.得第一个方程和第四个方程是分式方程,故分式方程个数为 2.故选择 B.

题 98 方程 $x+\frac{x}{x-2}=\frac{-2}{2-x}$的解是( ).

A. 2　　B. -1　　C. -1 或 2　　D. 1 或 2

解 原方程就是 $x+\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}$.

方程两边都乘以$(x-2)$,约去分母后,得 $x(x-2)+x=2$.

整理得 $x^2-x-2=0$,解这个方程,得 $x_1=2$,$x_2=-1$.

检验:把 $x=2$ 代入$(x-2)$等于零,∴$x=2$ 是增根;把 $x=-1$ 代入 $x-2$ 不等于零,∴$x=-1$ 是原方程的根.

∴原方程的根是 $x=-1$.故选择 B.

题 99 方程$\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{x+1}-1$ 的解是( ).

A. 2　　B. 0　　C. -1　　D. 2,-1

解 原方程就是$\frac{2}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1+x}-1$.

方程两边都乘以$(1+x)(1-x)$,约去分母,得

$2=1-x-(1+x)(1-x)$.

整理后,得 $x^2-x-2=0$,解这个方程,得 $x_1=2$,$x_2=-1$.

检验:把 $x=2$ 代入$(1-x)(1+x)$中,不等于零,∴$x=2$ 是原方程的根;

把 $x=-1$ 代入$(1+x)(1-x)$中,等于零,∴$x=-1$ 是原方程的增根.

∴原方程的根是 $x=2$.故选择 A.

题 100 方程$\frac{2x^2-6x}{x-3}=x+5$ 的实根的个数是( ).

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 没有实数根

解 原方程两边都乘以 $x-3$,约去分母后,得

$2x^2-6x=(x+5)(x-3)$,

整理后,得 $x^2-8x+15=0$.

∵$\Delta=(-8)^2-4\times15=64-60=4>0$.

∴方程有两个不相等的实数根,$x_1=3$,$x_2=5$.

经检验,$x=3$ 是增根,$x=5$ 是原方程的根.故选择 C.

题 101 如果 $1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}=0$,那么$\frac{3}{x}$的值等于( ).

A. 1　　B. -1　　C. -2　　D. ± 1

解　原方程左边分解因式，得

$\left(1-\frac{3}{x}\right)^2=0$，$\therefore 1-\frac{3}{x}=0$，$\therefore \frac{3}{x}=1$. 故选择 A.

题 102　下列方程是无理方程的是(　　).

A. $x+\frac{2}{x}=0$　　B. $\sqrt{2}x+\sqrt{3}y=\sqrt{7}$

C. $x^2-(\sqrt{3}-1)x=1$　　D. $\sqrt{4x-3}=x$

解　根据定义:根号下含有未知数的方程叫做无理方程. 故选择 D.

题 103　方程 $1-\sqrt{3x+1}=4$ 的解是(　　).

A. $\frac{8}{3}$　　B. $-\frac{8}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. 无解

解　移项，得 $\sqrt{3x+1}=-3$，无解. 故选择 D.

题 104　方程 $\sqrt{x-1}-2=\sqrt{x+2}$ 的解是(　　).

A. $\frac{5}{2}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{17}{16}$　　D. 无解

解　原方程两边平方，得

$x-1-4\sqrt{x-1}+4=x+2$，$4\sqrt{x-1}=1$.

两边再平方，得 $16(x-1)=1$. 解这个方程，得 $x=\frac{17}{16}$.

检验:把 $x=\frac{17}{16}$ 代入原方程，

左边 $=\sqrt{\frac{17}{16}-1}-2=\sqrt{\frac{1}{16}}-2=\frac{1}{4}-2=-\frac{7}{4}$，

右边 $=\sqrt{x+2}=\sqrt{\frac{17}{16}+2}=\frac{7}{4}$，$\because$ 左边 $\neq$ 右边，$\therefore x=\frac{17}{16}$ 是增根.

故选择 D.

题 105　用换元法解方程 $x^2-3x-\sqrt{x^2-3x+5}=1$，如果设 $y=\sqrt{x^2-3x+5}$，那么原方程可化为(　　).

A. $y^2-y+4=0$　　B. $y^2-y-1=0$

C. $y^2-y-6=0$　　D. $y^2-y+6=0$

解　原方程变形，得　$(x^2-3x+5)-\sqrt{x^2-3x+5}-6=0$.

设 $\sqrt{x^2-3x+5}=y$，则 $x^2-3x+5=y^2$，原方程化为:$y^2-y-6=0$.

故选择 C.

题 106　满足 $\sqrt{5-x}=x\sqrt{5-x}$ 的 x 的值有(　　).

A. 3 个　　B. 2 个　　C. 1 个　　D. 无限多个

解　原方程两边平方，得　$5-x=x^2(5-x)$.　$\therefore (5-x)(1-x^2)=0$.

解这个方程，得 $x_1=5, x_2=1, x_3=-1$.

经检验，$x=-1$ 是增根. ∴原方程的根是 $x_1=5, x_2=1$.

故选择 B.

题 107　方程 $1-\sqrt{3x}=6x$ 的根是(　　).

A. 整数　　B. 分数　　C. 无理数　　D. 负数

解　移项，得 $1-6x=\sqrt{3x}$.

两边平方，得 $1-12x+36x^2=3x$.

整理后，得 $36x^2-15x+1=0$.

解这个方程，得 $x_1=\frac{1}{3}, x_2=\frac{1}{12}$.

经检验，$x_1=\frac{1}{3}$是增根. ∴原方程的根是 $x=\frac{1}{12}$.

选择 B.

题 108　解下列各分式方程(用去分母法)：

(1) $\frac{x+4}{x^2+2x}-\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x}+1$;　　(2) $\frac{1}{2x^2-3}-8x^2+12=0$;

(3) $\frac{2x}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{3}$;　　(4) $\frac{3x-1}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}=2$.

解　(1) 方程两边都乘以 $x(x+2)$，约去分母，得

$x+4-x=2(x+2)+x(x+2)$.

整理后，得 $x^2+4x=0$.

解这个方程，得 $x_1=0, x_2=-4$.

检验：当 $x_1=0$ 时，$x(x+2)=0\times(0+2)=0$，$\therefore x=0$ 是增根；

当 $x_2=-4$ 时，$x(x+2)=-4\times(-4+2)\neq 0$，$\therefore x=-4$ 是原方程的根.

所以原方程的根是 $x=-4$.

(2) 方程两边都乘以 $2x^2-3$，约去分母，得

$1-(8x^2-12)(2x^2-3)=0$.

整理后，得 $16x^4-48x^2+35=0$.

分解因式，得 $(4x^2-7)(4x^2-5)=0$. $\therefore 4x^2-7=0$ 或 $4x^2-5=0$.

解得：$x_1=\frac{\sqrt{7}}{2}, x_2=-\frac{\sqrt{7}}{2}, x_3=\frac{\sqrt{5}}{2}, x_4=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

经检验，它们都是原方程的根.

(3) 原方程就是 $\frac{2x}{(x+2)(x-2)}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3}$.

方程两边都乘以 $3(x+2)(x-2)$，约去分母，得

$6x-3(x+2)=(x+2)(x-2)$.

整理后，得 $x^2-3x+2=0$.

解这个方程，得 $x_1=1, x_2=2$.

检验：当 $x=1$ 时，$3(x+2)(x-2)=3(1+2)(1-2)\neq 0$，

$\therefore x=1$ 是原方程的根；

当 $x=2$ 时，$3(x+2)(x-2)=3(2+2)(2-2)=0$，$\therefore x=2$ 是增根.

所以原方程的根是 $x=1$.

(4) 方程两边都乘以 $(x+1)(x-1)$，约去分母，得

$3x-1-x(x+1)=2(x+1)(x-1)$.

整理后，得 $3x^2-2x-1=0$.

解这个方程，得 $x_1=1, x_2=-\frac{1}{3}$.

经检验，$x=1$ 是增根，所以原方程的解是 $x=-\frac{1}{3}$.

题 109 解下列各分式方程(用换元法)：

(1) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-5\left(\frac{x}{x-1}\right)+6=0$；

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0$；

(3) $\frac{x^2-6}{x-3}+\frac{10x-30}{x^2-6}=7$；

(4) $\frac{1}{x^2+2x-1}+\frac{1}{x^2+2x}=\frac{5}{2x^2+4x}$；

(5) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$.

解 (1)设 $\frac{x}{x-1}=y$，则原方程变形为

$y^2-5y+6=0$. 解得 $y_1=2, y_2=3$.

当 $y_1=2$ 时，$\frac{x}{x-1}=2$，解得 $x=2$；当 $y_2=3$ 时，$\frac{x}{x-1}=3$，解得 $x=\frac{3}{2}$.

经检验，$x_1=2, x_2=\frac{3}{2}$ 都是原方程的根.

(2)设 $x+\frac{1}{x}=y$，则原方程变为

$y^2-3y+2=0$. 解这个方程，得 $y_1=1, y_2=2$.

当 $y_1=1$ 时，$x+\frac{1}{x}=1$，$x^2-x+1=0$ 无实根；

当 $y_2=2$ 时，$x+\frac{1}{x}=2$，$x^2-2x+1=0$ 解得 $x_1=x_2=1$.

经检验，$x=1$ 是原方程的根.

(3)原方程可化为$\frac{x^2-6}{x-3}+\frac{10(x-3)}{x^2-6}=7$.

设$\frac{x^2-6}{x-3}=y$,则$y+\frac{10}{y}=7$.

整理后,得$y^2-7y+10=0$.解得$y_1=2,y_2=5$.

当$y_1=2$时,$\frac{x^2-6}{x-3}=2$,解得$x_1=0,x_2=2$;

当$y_2=5$时,$\frac{x^2-6}{x-3}=5$,此方程无解.

经检验,$x_1=0,x_2=2$都是原方程的解.

(4)设$x^2+2x=y$,则原方程可化为

$\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y}=\frac{5}{2y}$.

去分母,得$2y+2y-2=5y-5$. ∴$y=3$.

当$y=3$时,$x^2+2x=3$,

∴$x^2+2x-3=0$,$(x+3)(x-1)=0$,∴$x_1=-3,x_2=1$.

经检验,$x_1=-3,x_2=1$都是原方程的根.

(5)原方程可变为$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$.

设$x+\frac{1}{x}=y$,则有$2y^2-3y-5=0$.

解这个方程,得$y_1=-1,y_2=\frac{5}{2}$.

当$y_1=-1$时,$x+\frac{1}{x}=-1$,∴$x^2+x+1=0$,无实根;

当$y_2=\frac{5}{2}$时,$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$,∴$2x^2-5x+2=0$,解得$x_1=2,x_2=\frac{1}{2}$.

经检验,无增根.∴原方程的根是$x_1=2,x_2=\frac{1}{2}$.

题110 解下列各无理方程(用平方法):

(1)$x-\sqrt{1-x}=1$;　　(2)$x^2+\sqrt{x^2-1}=3$;

(3)$\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$;　　(4)$\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}=2$.

解 (1)移项,得$\sqrt{1-x}=x-1$.

两边平方,得$1-x=(x-1)^2$.

整理后,得$x^2-x=0$. ∴$x_1=0,x_2=1$.

检验:当$x_1=0$时,左边≠右边,∴$x_1=0$是增根;

当$x_2=1$时,左边=右边,∴$x_2=1$是原方程的根.

∴原方程的根是$x=1$.

(2)移项,得 $\sqrt{x^2-1}=3-x^2$.

两边平方,得 $x^2-1=(3-x^2)^2$.

整理后,得 $x^4-7x^2+10=0$,

$\therefore x^2=2$ 或 $x^2=5$. $\therefore x=\pm\sqrt{2}$ 或 $x=\pm\sqrt{5}$.

经检验,$x=\pm\sqrt{5}$ 是增根.

$\therefore$原方程的根是 $x_1=\sqrt{2}$,$x_2=-\sqrt{2}$.

(3)原方程两边平方,得 $x-\sqrt{1-x}=1$,即 $x-1=\sqrt{1-x}$.

两边再平方,得$(x-1)^2=1-x$.

整理后,得 $x^2-x=0$,$\therefore x_1=0$,$x_2=1$.

检验:把 $x_1=0$ 代入原方程,左边$=\sqrt{0-\sqrt{1-0}}=\sqrt{-1}$无意义,

$\therefore x_1=0$ 是增根;

把 $x_2=1$ 代入原方程得,左边=右边,$\therefore x_2=1$ 是原方程的根.

$\therefore$原方程的根是 $x=1$.

(4)移项,得 $\sqrt{x+8}-2=\sqrt{5x+20}$

两边平方,得 $x+8-4\sqrt{x+8}+4=5x+20$,即$-\sqrt{x+8}=x+2$.

两边再平方,得 $x+8=(x+2)^2$,即 $x^2+3x-4=0$. $\therefore x_1=1$,$x_2=-4$.

经检验,$x_1=1$ 是增根.

$\therefore$原方程的根是 $x=-4$.

题 111 解下列各无理方程(用换元法):

(1) $x^2-\sqrt{x^2-2}=4$;

(2) $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$;

(3) $x^2+3x+\sqrt{x^2+3x}=6$;

(4) $x^2-\sqrt{x^2-3x+5}=3x+1$;

(5) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}=\dfrac{5}{2}$;

(6) $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$;

(7) $x^2+\sqrt{2x^2-3x+5}=\dfrac{3}{2}(x+1)$;

(8) $\sqrt{(x-1)(x-4)}+\sqrt{(x-2)(x-3)}=\sqrt{2}$.

解 (1)原方程变形得$(x^2-2)-\sqrt{x^2-2}-2=0$.

设 $\sqrt{x^2-2}=y$,则 $x^2-2=y^2$,于是上面方程变为 $y^2-y-2=0$.

解得 $y_1=-1, y_2=2$.

当 $y_1=-1$ 时，$\sqrt{x^2-2}=-1$. ∴此方程无解；

当 $y_2=2$ 时，$\sqrt{x^2-2}=2$. 整理得 $x^2=6$，∴$x_1=\sqrt{6}, x_2=-\sqrt{6}$.

经检验，$x_1=\sqrt{6}, x_2=-\sqrt{6}$ 都是原方程的根.

∴原方程的根是 $x_1=\sqrt{6}, x_2=-\sqrt{6}$.

(2)原方程变形为 $2(x^2-2x+6)+3\sqrt{x^2-2x+6}-27=0$.

设 $\sqrt{x^2-2x+6}=y$，则 $x^2-2x+6=y^2$，上面方程变为

$2y^2+3y-27=0$.　解得 $y_1=-\frac{9}{2}, y_2=3$.

当 $y_1=-\frac{9}{2}$ 时，$\sqrt{x^2-2x+6}=-\frac{9}{2}$，无解；

当 $y_2=3$ 时，$\sqrt{x^2-2x+6}=3$，即 $x^2-2x-3=0$.

解得 $x_1=3, x_2=-1$.

经检验，$x_1=3, x_2=-1$ 都是原方程的根.

∴原方程的根是 $x_1=3, x_2=-1$.

(3)设 $\sqrt{x^2+3x}=y$，则 $x^2+3x=y^2$，原方程变为

$y^2+y-6=0$.

解得 $y_1=-3, y_2=2$.

当 $y_1=-3$ 时，$\sqrt{x^2+3x}=-3$，此方程无解；

当 $y_2=2$ 时，$\sqrt{x^2+3x}=2$，即 $x^2+3x-4=0$，∴$x_1=-4, x_2=1$.

经检验，$x_1=-4, x_2=1$ 都是原方程的根.

∴原方程的根是 $x_1=-4, x_2=1$.

(4)原方程变形为 $(x^2-3x+5)-\sqrt{x^2-3x+5}-6=0$.

设 $\sqrt{x^2-3x+5}=y$，则 $x^2-3x+5=y^2$，于是上面方程变为

$y^2-y-6=0$. 解得 $y_1=3, y_2=-2$.

当 $y_1=3$ 时，$\sqrt{x^2-3x+5}=3$，即 $x^2-3x-4=0$，解得 $x_1=4, x_2=-1$；

当 $y_2=-2$ 时，$\sqrt{x^2-3x+5}=-2$，∴此方程无解.

经检验，$x_1=4, x_2=-1$；都是原方程的根.

∴原方程的根是 $x_1=4, x_2=-1$.

(5)设 $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=y$，则 $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}=\frac{1}{y}$. 于是原方程化为

$y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$.　解得 $y_1=\frac{1}{2}, y_2=2$.

当 $y_1=\frac{1}{2}$ 时，$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=\frac{1}{2}$，即 $3x=-9$，$\therefore x=-3$；

当 $y_2=2$ 时，$\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=2$，即 $3x=6$，$\therefore x=2$.

经检验，$x_1=-3$，$x_2=2$ 都是原方程的根.

$\therefore$原方程的根是 $x_1=-3$，$x_2=2$.

(6)原方程变形为 $3(x^2+5x+1)+2\sqrt{x^2+5x+1}-5=0$.

设 $\sqrt{x^2+5x+1}=y$，则 $x^2+5x+1=y^2$，所以原方程变为

$3y^2+2y-5=0$.　解得 $y_1=-\frac{5}{3}$，$y_2=1$.

当 $y_1=-\frac{5}{3}$ 时，$\sqrt{x^2+5x+1}=-\frac{5}{3}$，$\therefore$此方程无解；

当 $y_2=1$ 时，$\sqrt{x^2+5x+1}=1$，即 $x^2+5x=0$，$\therefore x_1=0$，$x_2=-5$.

经检验，$x_1=0$，$x_2=-5$ 都是原方程的根.

$\therefore$原方程的根是 $x_1=0$，$x_2=-5$.

(7)将原方程整理，得 $(2x^2-3x+5)+2\sqrt{2x^2-3x+5}-8=0$.

设 $\sqrt{2x^2-3x+5}=y$，则原方程变为 $y^2+2y-8=0$.

解这个方程，得 $y_1=-4$，$y_2=2$.

当 $y_1=-4$ 时，方程 $\sqrt{2x^2-3x+5}=-4$ 无解；

当 $y_2=2$ 时，方程 $\sqrt{2x^2-3x+5}=2$，即 $2x^2-3x+5=4$，

$\therefore 2x^2-3x+1=0$. 解这个方程，得 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$.

经检验，$x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$ 都是原方程的根.

$\therefore$原方程的根是 $x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$.

(8)原方程变形为 $\sqrt{x^2-5x+4}+\sqrt{x^2-5x+6}=\sqrt{2}$.

设 $x^2-5x+4=y$，则 $x^2-5x+6=y+2$.

于是方程变形为 $\sqrt{y}+\sqrt{y+2}=\sqrt{2}$.

移项并两边平方，得 $\sqrt{2y}=0$，$\therefore y=0$，$\therefore x^2-5x+4=0$.

解得 $x_1=1$，$x_2=4$.

经检验 $x_1=1$，$x_2=4$ 都是原方程的根.

$\therefore$原方程的根是 $x_1=1$，$x_2=4$.

题 112　解方程 $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+7}{x+6}=\frac{x+3}{x+2}+\frac{x+6}{x+5}$.

解 原方程变为

$1+\frac{1}{x+1}+1+\frac{1}{x+6}=1+\frac{1}{x+2}+1+\frac{1}{x+5}$,

$\therefore \frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}$,

通分,得$\frac{2x+7}{(x+1)(x+6)}=\frac{2x+7}{(x+2)(x+5)}$,

若 $2x+7\neq 0$,则$(x+1)(x+6)=(x+2)(x+5)$,此时方程无解;

若 $2x+7=0$,则 $x=-\frac{7}{2}$.

经检验 $x=-\frac{7}{2}$是原方程的解.

题 113 解方程 $\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0$.

解 设 $x^2+2x-8=y$,则原方程可化为

$\frac{1}{y+9x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y-15x}=0$.

整理后,得 $y^2-4xy-45x^2=0$. 解得 $y=9x$ 或 $y=-5x$.

$\therefore x^2+2x-8=9x$ 或 $x^2+2x-8=-5x$.

解得 $x_1=8, x_2=-1, x_3=-8, x_4=1$.

经检验,它们都是原方程的根.

$\therefore$原方程的根是 $x_1=8, x_2=-1, x_3=-8, x_4=1$.

题 114 解关于 x 的方程 $x+\frac{1}{x}=c+\frac{1}{c}(c\neq 0)$.

解 由观察可得 $x_1=c, x_2=\frac{1}{c}$.

经检验,它们都是原方程的根.

小结 一般地,方程 $x+\frac{k}{x}=c+\frac{k}{c}(c\neq 0, k\neq 0)$的解为 $x_1=c, x_2=\frac{1}{c}$.

题 115 解方程 $\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{3x}=\frac{5}{2}$.

解 原方程可变形为$\frac{3x}{x^2-1}+\frac{x^2-1}{3x}=2+\frac{1}{2}$.

$\therefore \frac{3x}{x^2-1}=2$ 或$\frac{3x}{x^2-1}=\frac{1}{2}$.

解上面两个方程,得 $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=2, x_3=3+\sqrt{10}, x_4=3-\sqrt{10}$.

经检验,它们都是原方程的根.

$\therefore$原方程的根是 $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=2, x_3=3+\sqrt{10}, x_4=3-\sqrt{10}$.

题 116 解方程 $4(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2})=x+y+z+9$.

解 原方程可化为

$(x-4\sqrt{x}+4)+(y-1-4\sqrt{y-1}+4)+(z-2-4\sqrt{z-2}+4)=0.$

$\therefore(\sqrt{x}-2)^2+(\sqrt{y-1}-2)^2+(\sqrt{z-2}-2)^2=0,$

$\therefore\sqrt{x}-2=0,\sqrt{y-1}-2=0,\sqrt{z-2}-2=0.$

解得 $x=4,y=5,z=6.$

经检验,$x=4,y=5,z=6$ 是原方程的解.

题117 解方程 $x^2+10(x-1)\sqrt{x}+14x+1=0.$

解 原方程可变形为$(x-1)^2+2x+10(x-1)\sqrt{x}+14x=0.$

$\therefore(x-1)^2+10(x-1)\sqrt{x}+16(\sqrt{x})^2=0,$

$[(x-1)+2\sqrt{x}][(x-1)+8\sqrt{x}]=0,$

$\therefore x-1+2\sqrt{x}=0$ 或 $x-1+8\sqrt{x}=0.$

解得 $\sqrt{x}=-1\pm\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{x}=-4\pm\sqrt{17}.$

舍去负值,得 $\sqrt{x}=-1+\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{x}=-4+\sqrt{17},$

$\therefore x_1=3-2\sqrt{2},x_2=33-8\sqrt{17}.$

经检验,$x_1=3-2\sqrt{2},x_2=33-8\sqrt{17}$都是原方程的根.

题118 解方程$\sqrt{1+\frac{9}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+9}}=\frac{5}{2}$. 如果有一个实根,用这个根和它的相反数为两根作一个一元二次方程;如果有两个实根,分别用这两个实根的倒数为根作一个一元二次方程.

解 设 $y=\sqrt{1+\frac{9}{x}}$,则原方程化为 $y+\frac{1}{y}=\frac{5}{2}$,即 $2y^2-5y+2=0.$

解得 $y_1=2,y_2=\frac{1}{2}.$

当 $y=2$ 时,$\sqrt{1+\frac{9}{x}}=2$,解得 $x=3$;

当 $y=\frac{1}{2}$时,$\sqrt{1+\frac{9}{x}}=\frac{1}{2}$,解得 $x=-12.$

经检验 $x=3,x=-12$ 都是原方程的根.

$\therefore$所求一元二次方程为 $z^2-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)z+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{12}\right)=0,$

即 $z^2-\frac{1}{4}z-\frac{1}{36}=0$,也就是 $36z^2-9z-1=0.$

题119 关于 x 的方程 $x^2+2x+2\sqrt{x^2+2x+2p}-p^2=0$,其中 p 是实数.

(1)若方程没有实数根,求 p 的范围;

(2)若 $p>0$,问 p 为何值时,方程有两个相等的实数根?并求出这两根.

解 (1)令 $\sqrt{x^2+2x+2p}=y$ ①

则原方程变为 $y^2+2y-(p^2+2p)=0$.

$\because \Delta=4+4(p^2+2p)=4(p^2+2p+1)=4(p+1)^2\geqslant 0$,

$\therefore y=\dfrac{-2\pm\sqrt{4(p+1)^2}}{2}=-1\pm(p+1)$.

即 $y_1=p$,$y_2=-2-p$.

若原方程没有实数根,只需 $\begin{cases}p<0,\\-2-p<0,\end{cases}$

解这个不等式组,得 $-2<p<0$.

(2)$\because p>0$,把 $y_1=p$ 代入①,得 $\sqrt{x^2+2x+2p}=p$. ②

而 $y_2=-2-p<0$,舍去.

将②式平方,整理,得 $x^2+2x-(p^2-2p)=0$. ③

令 $\Delta=4+4(p^2-2p)=4(p^2-2p+1)=4(p-1)^2=0$.

解得 $p=1$.

当 $p=1$ 时,原方程有两个相等的实数根.

把 $p=1$ 代入③,得 $x^2+2x+1=0$,$\therefore x_1=x_2=-1$.

经检验,当 $p=1$ 时,$x_1=x_2=-1$ 是原方程的根.

题 120 求适合方程 $\sqrt{x^2-2xy+y^2}+3x^2+6xz+2y+y^2+3z^2+1=0$ 的 x、y、z 的值.

解 原方程化为 $\sqrt{(x-y)^2}+3(x+z)^2+(y+1)^2=0$,

$\therefore |x-y|+3(x+z)^2+(y+1)^2=0$,则有

$\begin{cases}x-y=0,\\x+z=0,\\y+1=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\\z=1.\end{cases}$

经检验,$x=-1$、$y=-1$、$z=1$ 是原方程的解.

$\therefore x$、y、z 的值分别为 -1、-1、1.

题 121 解方程 $2x^2-4x+x\sqrt{2x^2-5x+3}=-2$.

解 设 $\sqrt{2x^2-5x+3}=y$,则 $2x^2-5x+3=y^2$,$\therefore 2x^2-4x=y^2+x-3$.

原方程可化为 $y^2+x-3+xy=-2$,即 $y^2+x+xy-1=0$.

分解因式,得 $(y+1)(y-1+x)=0$,$\therefore y+1=0$ 或 $y-1+x=0$.

$\therefore y=-1$ 或 $y=1-x$.

当 $y=-1$ 时,$\sqrt{2x^2-5x+3}=-1$,此方程无解;

当 $y=1-x$ 时,$\sqrt{2x^2-5x+3}=1-x$. 整理得 $x^2-3x+2=0$,

$\therefore x_1=1, x_2=2$.

经检验，$x_2=2$ 是增根. ∴原方程的根是 $x=1$.

题 122 解下列各方程组：

(1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ xy=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

解 (1)设 $\dfrac{1}{x}=m$，$\dfrac{1}{y}=n$，则原方程组变为

$$\begin{cases} m+n=5, & ① \\ m^2+n^2=13. & ② \end{cases}$$

由①，得 $m=5-n$. ③

把③代入②，得 $(5-n)^2+n^2=13$.

整理，得 $n^2-5n+6=0$. 解这个方程，得 $n_1=3$，$n_2=2$.

把 $n_1=3$，$n_2=2$ 分别代入③，得 $m_1=2$，$m_2=3$.

$\therefore \begin{cases} m_1=2, \\ n_1=3; \end{cases} \begin{cases} m_2=3, \\ n_2=2. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=2, \\ \dfrac{1}{y}=3; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{1}{x}=3, \\ \dfrac{1}{y}=2. \end{cases}$

解上面两个方程组，得原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}, \\ y_1=\dfrac{1}{3}; \end{cases} \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{3}, \\ y_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

经检验，它们都是原方程组的解.

∴原方程组的解为 $\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{2}, \\ y_1=\dfrac{1}{3}; \end{cases} \begin{cases} x_2=\dfrac{1}{3}, \\ y_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

(2) $\because xy=\dfrac{1}{6}$，$\therefore \dfrac{1}{xy}=6$. 原方程组可化为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5, \\ \dfrac{1}{xy}=6. \end{cases}$$

设 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{1}{y}$ 是一元二次方程 $z^2-5z+6=0$ 的两个根，

解这个方程，得 $z_1=2$，$z_2=3$.

即$\begin{cases}\frac{1}{x_1}=2,\\ \frac{1}{y_1}=3;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{1}{x_2}=3,\\ \frac{1}{y_2}=2.\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\ y_1=\frac{1}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{1}{3},\\ y_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$

经检验,都是原方程组的解.

∴原方程组的解为:$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2},\\ y_1=\frac{1}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{1}{3},\\ y_2=\frac{1}{2}.\end{cases}$

题 123 求方程组

$\begin{cases}x\sqrt{yz}+y\sqrt{xz}=39-xy,\\ y\sqrt{xz}+z\sqrt{xy}=52-yz,\\ x\sqrt{yz}+z\sqrt{xy}=78-xz\end{cases}$的正整数解.

解 设$\sqrt{xy}=v$,$\sqrt{yz}=u$,$\sqrt{xz}=w$,则$vu=y\sqrt{xz}$,$uw=z\sqrt{xy}$,

$vw=x\sqrt{yz}$,于是原方程组可化为:

$$\begin{cases}vw+vu+v^2=39, & ①\\ vu+uw+u^2=52, & ②\\ vw+uw+w^2=78. & ③\end{cases}$$

①+②+③,得 $(v+u+w)^2=169$.

∴$v+u+w=13$. ④

①÷④,得 $v=3$,

②÷④,得 $u=4$,

③÷④,得 $w=6$.

$$∴\begin{cases}xy=9, & ⑤\\ yz=16, & ⑥\\ zx=36. & ⑦\end{cases}$$

⑤×⑥×⑦,得$(xyz)^2=9\times16\times36$.∴$xyz=3\times4\times6$. ⑧

⑧÷⑤得 $z=8$,

⑧÷⑥得 $x=\frac{9}{2}$,

⑧÷⑦得 $y=2$.

∴经检验$\begin{cases}x=\frac{9}{2},\\ y=2,\\ z=8\end{cases}$是原方程组的解.

$\therefore$原方程组的解为$\begin{cases} x=\dfrac{9}{2}, \\ y=2, \\ z=8. \end{cases}$

题 124 解方程组$\begin{cases} \dfrac{4x^2}{1+4x^2}=y, \\ \dfrac{4y^2}{1+4y^2}=z, \\ \dfrac{4z^2}{1+4z^2}=x. \end{cases}$

解 显然 $x=y=z=0$ 是它的一组解；

当 $xyz\neq 0$ 时，取倒数，原方程组可化为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4x^2}+1=\dfrac{1}{y}, & ① \\ \dfrac{1}{4y^2}+1=\dfrac{1}{z}, & ② \\ \dfrac{1}{4z^2}+1=\dfrac{1}{x}. & ③ \end{cases}$$

①+②+③，得 $\dfrac{1}{4x^2}+\dfrac{1}{4y^2}+\dfrac{1}{4z^2}+1+1+1=\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}$，

$\therefore \dfrac{1}{4x^2}-\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{1}{4y^2}-\dfrac{1}{y}+1+\dfrac{1}{4z^2}-\dfrac{1}{z}+1=0$，

即$\left(\dfrac{1}{2x}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2y}-1\right)^2+\left(\dfrac{1}{2z}-1\right)^2=0$.

$\therefore \dfrac{1}{2x}=1, \dfrac{1}{2y}=1, \dfrac{1}{2z}=1, \therefore x=y=z=\dfrac{1}{2}$.

经检验，它们都是原方程组的解.

$\therefore$原方程组的解为$\begin{cases} x_1=0, \\ y_1=0, \\ z_1=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=\dfrac{1}{2}, \\ y_2=\dfrac{1}{2}, \\ z_2=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

题 125 农机厂职工到距工厂 15 千米的生产队检修农机. 一部分人骑自行车先走，$\dfrac{2}{3}$小时后，其余的人乘汽车出发，结果他们同时到达. 已知汽车的速度是自行车速度的 3 倍，求两种车的速度.

解 设自行车的速度为每小时 x 千米，那么汽车的速度为每小时 $3x$ 千米，根据题意，得

$\dfrac{15}{3x}=\dfrac{15}{x}-\dfrac{2}{3}$. 整理，得$\dfrac{10}{x}=\dfrac{2}{3}$. 解这个方程，得 $x=15$.

经检验,$x=15$ 是原方程的根. 当 $x=15$ 时,$3x=45$.

答 自行车的速度是每小时 15 千米,汽车的速度是每小时 45 千米.

题 126 A、B 两地相距 106 千米,甲乙二人骑自行车分别从 A、B 两地相向而行. 甲比乙早出发 2 小时,乙比甲每小时多行驶 2 千米,相遇时甲比乙多行驶 6 千米. 求:(1)相遇时甲、乙二人各行驶多少千米? (2)甲乙二人的速度各是多少?

解 (1)设相遇时,乙行驶 x 千米,则甲行驶$(x+6)$千米. 根据题意,得

$x+x+6=106$.

解这个方程,得 $x=50$. $\therefore x+6=56$.

(2)设甲的速度为每小时 y 千米,则乙的速度为每小时$(y+2)$千米. 根据题意,得

$\frac{56}{y}-2=\frac{50}{y+2}$.

整理得,$y^2-y-56=0$. 解这个方程,得 $y_1=8, y_2=-7$.

经检验,$y_1=8, y_2=-7$ 都是原方程的根.

当 $y_2=-7$ 时,$y+2=-5$. 因为行驶速度不为负,所以只能取 $y=8$.

$y=8, y+2=10$.

答 (1)相遇时甲行驶 56 千米,乙行驶 50 千米. (2)甲的速度为每小时 8 千米,乙的速度为每小时 10 千米.

题 127 小丁和小王二人同时从甲地出发,步行 15 千米到乙地,小丁比小王每小时多走 1 千米,结果小丁比小王早到半小时. 小丁和小王每小时各走多少千米?

解 设小王每小时走 x 千米,则小丁每小时走$(x+1)$千米. 根据题意,得

$\frac{15}{x}=\frac{15}{x+1}+\frac{1}{2}$.

整理得,$x^2+x-30=0$. 解这个方程,得 $x_1=5, x_2=-6$.

经检验,$x_1=5, x_2=-6$ 都是原方程的根. 但 $x_2=-6$ 不合题意,舍去.

$\therefore$只取 $x=5$,此时 $x+1=6$.

答 小王每小时走 5 千米,小丁每小时走 6 千米.

题 128 A、B 两地相距 10 千米,甲步行从 A 地前往 B 地,$1\frac{1}{2}$小时后乙骑车也从 A 地前往 B 地,结果甲、乙二人同时到达 B 地. 如果乙骑车每小时所走的距离比甲每小时所走距离的 2 倍还多 2 千米,求甲乙两人的速度各是多少.

解 设甲每小时走 x 千米,则乙每小时走$(2x+2)$千米. 根据题意,得

$\frac{10}{x}-\frac{10}{2x+2}=\frac{3}{2}$.

整理得 $3x^2-7x-20=0$. 解这个方程,得 $x_1=4, x_2=-\frac{5}{3}$.

经检验,$x_1=4, x_2=-\frac{5}{3}$都是原方程的根. 但 $x_2=-\frac{5}{3}$不合题意,舍去. 所以只取 $x=$

4，此时 $2x+2=10$.

答 甲的速度是每小时 4 千米，乙的速度是每小时 10 千米.

题 129 甲、乙两人同时从 A、B 两地相向而行，10 分钟后在距 A 地 800 米处第一次相遇，然后各自按原方向继续前进，甲到 B 地、乙到 A 地都立即转身返回，他们第二次相遇在距 B 地 600 米处，求 A、B 两地距离和乙的速度.

解 设 A、B 两地的距离为 x 米，则甲的速度为$\frac{800}{10}$米/分，乙的速度为$\frac{x-800}{10}$米/分.根据题意，得

$$\frac{x-800+600}{\frac{800}{10}}=\frac{800+x-600}{\frac{x-800}{10}}.$$

整理，得$\frac{x-200}{800}=\frac{x+200}{x-800}$，

$\therefore x^2-1800x=0$，解得 $x_1=1800$，或 $x_2=0$.

检验知 $x_1=1800$，$x_2=0$ 是原方程的根，但 $x_2=0$ 不合题意，舍去.

$\therefore x=1800$，乙的速度为$\frac{1800-800}{10}=100$(米/分).

答 A、B 两地的距离为 1800 米，乙的速度为 100 米/分.

题 130 甲、乙两人分别从相距 27 千米的 A、B 两地同时出发，相向而行，3 小时相遇，相遇后两人各用原来速度继续前进，甲到达 B 地比乙到达 A 地早 1 小时 21 分，求两人的速度.

解 设甲的速度为每小时 x 千米，因为两人 3 小时相遇，所以乙的速度为每小时$(9-x)$千米，根据题意，得

$$\frac{27}{9-x}-\frac{27}{x}=1\frac{21}{60}.$$

整理得，$x^2+31x-180=0$. 解这个方程，得 $x_1=5$，$x_2=-36$.

经检验，$x_1=5$，$x_2=-36$ 都是原方程的根. 但 $x_2=-36$ 不合题意，舍去. 所以只取 $x=5$，此时 $9-x=4$.

答 甲的速度为每小时 5 千米，乙的速度为每小时 4 千米.

题 131 一轮船沿河航行于相距 48 千米的两码头间，往返一次共需 10 小时(不计到达码头后停船的时间). 如果轮船在静水中的速度是每小时行驶 10 千米，求水流的速度.

解 设水流速度为每小时 x 千米. 根据题意，得

$$\frac{48}{10-x}+\frac{48}{10+x}=10.$$

整理得，$x^2-4=0$. 解这个方程得 $x_1=2$，$x_2=-2$.

经检验，$x_1=2$，$x_2=-2$ 都是原方程的根. 但 $x_2=-2$ 不合题意，舍去. 所以只取 $x=2$.

答 水流速度是每小时 2 千米.

题 132 一小艇顺流下行 36 千米到目的地所用的时间比它逆流回航到出发地所用的时间要少 1 小时 30 分. 已知小艇在静水中的速度是每小时 10 千米,求水流速度.

解 设水流速度为每小时 x 千米. 根据题意,得

$$\frac{36}{10-x}-\frac{36}{10+x}=\frac{3}{2}.$$

去分母并整理,得 $x^2+48x-100=0$.

解这个方程,得 $x_1=2, x_2=-50$.

经检验,$x_1=2, x_2=-50$ 都是原方程的根. 但 $x_2=-50$ 不合题意,舍去. 所以只取 $x=2$.

答 水流速度为每小时 2 千米.

题 133 某校学生为"希望工程"捐款,甲、乙两班的捐款都是 360 元,已知甲班比乙班多 5 人,乙班比甲班平均每人多捐 1 元,乙班平均每人捐款多少元?

解 设乙班平均每人捐款 x 元,则甲班平均每人捐款$(x-1)$元,根据题意,得

$$\frac{360}{x-1}-\frac{360}{x}=5.$$

$\therefore x^2-x-72=0$,解得 $x_1=9$,或 $x_2=-8$.

经检验 $x_1=9, x_2=-8$ 都是原方程的根,但 $x_2=-8$ 不合题意,舍去. $\therefore x=9$.

答 乙班平均每人捐款 9 元.

题 134 甲乙两个工程队合作一项工程,乙队单独做一天后,由甲、乙两队合做两天就完成了全部工程. 已知甲队单独做所需的天数是乙队单独做所需天数的$\frac{2}{3}$,求甲、乙两队单独做各需多少天?

解 设乙队单独做 x 天完成,那么甲队单独做$\frac{2}{3}x$ 天完成. 根据题意,得

$$\frac{1}{x}+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{3}x}\right)=1.$$

整理变形,得$\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=1$. 解这个方程,得 $x=6$.

经检验,$x=6$ 是原方程的根. 此时$\frac{2}{3}x=\frac{2}{3}\times 6=4$.

答 甲队单独做 4 天完成,乙队单独做 6 天完成.

题 135 甲乙两个工程队合做一项工程,6 天可以完成;如果单独工作,甲队比乙队少用 5 天完成. 两队单独工作各需多少天完成?

解 设甲队单独工作需 x 天完成,则乙队单独工作需$(x+5)$天完成. 根据题意,得

$$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=1.$$

去分母并整理，得 $x^2-7x-30=0$. 解这个方程，得 $x_1=10, x_2=-3$.

经检验，$x_1=10, x_2=-3$ 都是原方程的根. 但 $x_2=-3$ 不合题意，舍去. 所以只取 $x=10$，此时 $x+5=10+5=15$.

答　甲队单独工作需 10 天完成，乙队单独工作需 15 天完成.

题 136　甲乙两组工人合做某项工作，10 天以后，因甲组另有任务，乙组再单独做 2 天才完成. 如果单独完成这项工作，甲组比乙组可以快 4 天，求各组单独完成这项工作所需要的天数.

解　设甲组单独做需要 x 天，乙组单独做需要 $(x+4)$ 天. 根据题意，得

$$10\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\frac{2}{x+4}=1.$$

去分母并整理，得 $x^2-18x-40=0$. 解这个方程，得 $x_1=20, x_2=-2$.

经检验，$x_1=20, x_2=-2$ 都是原方程的根. 但 $x_2=-2$ 不合题意，舍去. 所以只取 $x=20$，此时 $x+4=20+4=24$.

答　甲组需要 20 天做完，乙组需要 24 天做完.

题 137　某工厂贮存 30 吨煤，由于改进炉灶和烧煤技术，每天能节约 1 吨煤，使贮存的煤比原计划多用 $1\frac{1}{2}$ 天，贮存的煤原计划用多少天？每天烧多少吨？

解　设原计划每天烧 x 吨煤，则实际每天烧 $(x-1)$ 吨. 根据题意，得

$$\frac{30}{x}=\frac{30}{x-1}-1.5.$$

去分母并整理，得 $x^2-x-20=0$. 解这个方程，得 $x_1=5, x_2=-4$.

经检验，$x_1=5, x_2=-4$ 都是原方程的根. 但 $x_2=-4$ 不合题意，舍去. 所以只取 $x=5$，此时 $\frac{30}{x}=\frac{30}{5}=6$.

答　贮存的煤原计划用 6 天，每天烧 5 吨.

题 138　某车间加工 70 个大型零件，在加工完成 30 个之后，由于改进了操作方法，每天多加工 10 个零件，先后共用 5 天完成了任务，求改进操作方法后每天加工多少个零件.

解　设改进操作方法后，每天加工 x 个零件，则原来每天加工 $(x-10)$ 个. 根据题意，得

$$\frac{30}{x-10}+\frac{70-30}{x}=5.$$

去分母并整理，得 $x^2-24x+80=0$. 解这个方程，得 $x_1=20, x_2=4$.

经检验，$x_1=20, x_2=4$ 都是原方程的根. 但 $x_2=4$ 不合题意，舍去. 所以只取 $x=20$.

答　改进操作方法后每天加工 20 个零件.

题 139　一批物资共有 400 吨，要求在规定时间内运到，由于合理调度车辆，每天比

原计划多运 10 吨,因此提前 2 天完成任务,实际运送这批物资用了多少天?

解 设实际运送物资用了 x 天,则原计划用 $(x+2)$ 天.根据题意,得

$$\frac{400}{x}=\frac{400}{x+2}+10.$$

去分母并整理,得 $x^2+2x-80=0$.解这个方程,得 $x_1=8,x_2=-10$.

经检验,$x_1=8,x_2=-10$ 都是原方程的根.但 $x_2=-10$ 不合题意,舍去.所以只取 $x=8$.

答 实际运送这批物资用了 8 天.

题 140 某人承包植树 240 棵的任务,计划若干天完成,植树两天后,由于阴雨天气,平均每天少植树 8 棵,因此延缓了 4 天完成,求原计划完成的天数.

解 设原计划 x 天完成任务,则原计划每天植树 $\frac{240}{x}$ 棵.根据题意,得

$$\frac{240-2\times\frac{240}{x}}{\frac{240}{x}-8}+2=x+4.$$

整理得,$x^2+2x-120=0$.解这个方程,得 $x_1=10,x_2=-12$.

经检验,$x_1=10,x_2=-12$ 都是原方程的根.但 $x_2=-12$ 不合题意,舍去.所以只取 $x=10$.

答 原计划 10 天完成任务.

题 141 商场销售某种商品,一月份销售了若干件,共获利润 30000 元.二月份把这种商品的单价降低了 0.4 元,但销售量比一月份增加了 5000 件,从而所获利润比一月份多 2000 元,调价前每件商品的利润为多少元?

解 设调价前每件商品的利润为 x 元,则一、二月份销售这种商品的件数分别为 $\frac{30000}{x}$、$\frac{32000}{x-0.4}$,根据题意,得

$$\frac{32000}{x-0.4}-\frac{30000}{x}=5000,$$ 整理,得 $x_1=2,x_2=-\frac{6}{5}$.

经检验 $x_1=2,x_2=-\frac{6}{5}$ 都是原方程的根,但负数不合题意,所以只取 $x=2$.

答 调价前每件商品的利润为 2 元.

题 142 一个水池有甲乙两个进水管,单独开放甲管注满水池比单独开放乙管注满水池少用 10 小时,如果两管同时开放,12 小时可把水池注满.若单独开放一个水管,各需要多少小时才能把水池注满?

解 设单独开放乙管注满水池需 x 小时,则单独开放甲管注满水池需 $(x-10)$ 小时,根据题意,得

$$\frac{1}{x-10}+\frac{1}{x}=\frac{1}{12}.$$

去分母整理，得 $x^2-34x+120=0$. 解这个方程，得 $x_1=30, x_2=4$.

经检验，$x_1=30, x_2=4$ 都是原方程的根. 但 $x_2=4$ 不合题意，舍去. 所以只取 $x=30$，此时 $x-10=30-10=20$.

答 单独开放一个水管注满水池，甲管需要 20 小时，乙管需要 30 小时.

题 143 A、B 两地间的路程为 120 千米. 甲乘机动车，乙骑自行车，分别从 A、B 两地同时出发，相向而行. 3 小时相遇后，各以原速度继续行驶，甲到达 B 地后立即返回，返回的速度是原速度的 2 倍，结果甲、乙二人同时到达 A 地，求甲的原速度和乙的速度.

解 设甲的原速度为 x 千米/时，乙的速度为 y 千米/时. 根据题意，得

$$\begin{cases}3(x+y)=120,\\ \dfrac{3y}{x}+\dfrac{120}{2x}=\dfrac{3x}{y}.\end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=24,\\ y=16.\end{cases}$ 经检验，$\begin{cases}x=24,\\ y=16\end{cases}$ 是原方程组的解.

答 甲的速度是 24 千米/时，乙的速度是 16 千米/时.

题 144 甲、乙二人分别从 A、B 两地同时同向出发，甲经过 B 地后，再经过 3 小时 12 分，在 C 地追上乙，这时两人所走的路程的和为 36 千米，而 A、C 两地的距离等于乙走 5 小时的路程，求 A、B 两地的距离.

解 设甲的速度为 x 千米/时，乙的速度为 y 千米/时. 根据题意，得

$$\begin{cases}3\dfrac{1}{5}x+5y=36,\\ \dfrac{3\frac{1}{5}x}{y}=\dfrac{5y}{x}.\end{cases}$$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x_1=5,\\ y_1=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-45,\\ y_2=36.\end{cases}$ （不合题意，舍去）

经检验，是原方程组的解. 此时 $AB=5y-3\dfrac{1}{5}x=20-16=4$.

答 A、B 两地的距离是 4 千米.

题 145 有一项工程，甲队单独做比甲、乙两队合作完工的天数多 5 天，如果甲乙两队先合作 4 天，再由乙队单独做 3 天后，才完成工程的一半，问甲、乙单独做，完成此项工程各需多少天?

解 设单独完成此项工程，甲需 x 天，乙需 y 天. 根据题意，得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{x-5},\\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{y}=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

解这个方程组,得$\begin{cases}x_1=15,\\y_1=30;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=\dfrac{14}{5}.\end{cases}$ (不合题意,舍去)

经检验,$\begin{cases}x=15,\\y=30\end{cases}$是原方程组的解.

答 单独完成此项工程,甲需15天,乙需30天.

题146 一项工程,甲单独做比甲、乙两人合做多用4天,乙单独做比甲、乙两人合做多用9天,问乙单独做需要几天?

解 设甲、乙单独做这项工程各需x天、y天完成,则甲、乙两人合做需要$\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$天完成.根据题意,得

$$\begin{cases}x-\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=4, & ①\\ y-\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=9. & ②\end{cases}$$

②-①,得$y-x=5$,即$x=y-5$. ③

把③代入②,得$y-\dfrac{1}{\frac{1}{y-5}+\frac{1}{y}}=9$.

去分母并整理,得$y^2-18y+45=0$.

解这个方程,得$y_1=15$,$y_2=3$(不合题意,舍去).

答 乙单独做这项工程需要15天完成.

题147 某项工作,甲、乙两人合作,6天可以完成.如果共同做了4天后,剩余工作由乙单独完成,乙完成剩余工作需要的时间比甲一人完成全部工作的时间少5天.问单独完成全部工作,甲、乙各需要多少天?

解 设甲单独完成全部工作要x天,乙单独完成全部工作要y天.根据题意,得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}, & ①\\ 4\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{x-5}{y}=1. & ②\end{cases}$$

由①得$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}$和$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{x}$分别代入②式得

$\dfrac{4}{6}+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{x}\right)(x-5)=1$.

整理得:$x^2-13x+30=0$.

解这个方程,得$x=10$或$x=3$(不合题意,舍去)

把 $x=10$ 代入①,得 $y=15$.

经检验,$\begin{cases}x=10,\\y=15\end{cases}$是原方程组的解.

答 甲单独完成全部工作要10天,乙要15天.

五、二元二次方程组的解法及应用

题148 方程组$\begin{cases}x^2+y^2=13,\\x+y=5\end{cases}$的解是(　　).

A. $\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=-3.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=-2.\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=2.\end{cases}$

C. $\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=3.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=-2.\end{cases}$　　D. $\begin{cases}x_1=2,\\y_1=-3.\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=2.\end{cases}$

解 $\begin{cases}x^2+y^2=13, & ①\\x+y=5. & ②\end{cases}$

由②得 $y=5-x$.　　③

把③代入①整理,得 $x^2-5x+6=0$.解这个方程得 $x_1=2,x_2=3$.

当 $x_1=2$ 时,$y=5-x=5-2=3$;

当 $x_2=3$ 时,$y=5-x=5-3=2$.

∴原方程组的解为$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=2.\end{cases}$故选择B.

题149 解下列各方程组:

(1)$\begin{cases}2x^2-y^2+x-2y-7=0, & ①\\x-y-1=0. & ②\end{cases}$　　(2)$\begin{cases}x^2+y^2=13, & ①\\x-y+1=0. & ②\end{cases}$

(3)$\begin{cases}y^2=2x, & ①\\x^2+y^2=3. & ②\end{cases}$　　(4)$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=4, & ①\\x^2-xy-y^2=0. & ②\end{cases}$

解 (1) 由②,得 $y=x-1$,　　③

把③代入①,整理,得

$2x^2-(x-1)^2+x-2(x-1)-7=0$,∴$x^2+x-6=0$.

解这个方程,得　$x_1=2,x_2=-3$.

把 $x_1=2$ 代入③,得　$y_1=1$;

把 $x_2=-3$ 代入③,得　$y_2=-4$.

∴原方程组的解是$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=-4.\end{cases}$

(2) 由②,得 $y=x+1$, ③

把③代入①,得 $x^2+(x+1)^2=13$.

整理,得 $x^2+x-6=0$.

解这个方程,得 $x_1=2, x_2=-3$.

把 $x_1=2$ 代入③,得 $y_1=3$;

把 $x_2=-3$ 代入③,得 $y_2=-2$.

∴原方程组的解是$\begin{cases}x_1=2,\\y_1=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-3,\\y_2=-2.\end{cases}$

(3) 把①代入②,得 $x^2+2x=3$,即 $x^2+2x-3=0$.

解这个方程,得 $x_1=-3, x_2=1$.

把 $x_1=-3$ 代入①,得 $y^2=-6$,无解;

把 $x_2=1$ 代入①,得 $y^2=2$,∴$y=\pm\sqrt{2}$.

∴原方程组的解是$\begin{cases}x_1=1,\\y_1=\sqrt{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=-\sqrt{2}.\end{cases}$

(4)由①,得 $x+y=\pm2$.

因此,原方程组可化为下面两个方程组:

$\begin{cases}x^2-xy-y^2=0,\\x+y=2;\end{cases}$ (Ⅰ) $\begin{cases}x^2-xy-y^2=0,\\x+y=-2.\end{cases}$ (Ⅱ)

解(Ⅰ)得$\begin{cases}x_1=-1+\sqrt{5},\\y_1=3-\sqrt{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1-\sqrt{5},\\y_2=3+\sqrt{5}.\end{cases}$

解(Ⅱ)得$\begin{cases}x_3=1+\sqrt{5},\\y_3=-3-\sqrt{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=1-\sqrt{5},\\y_4=-3+\sqrt{5}.\end{cases}$

∴原方程组的解为:

$\begin{cases}x_1=-1+\sqrt{5},\\y_1=3-\sqrt{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-1-\sqrt{5},\\y_2=3+\sqrt{5}.\end{cases}$

$\begin{cases}x_3=1+\sqrt{5},\\y_3=-3-\sqrt{5};\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=1-\sqrt{5},\\y_4=-3+\sqrt{5}.\end{cases}$

题 150 关于 x、y 的方程组

$\begin{cases}x^2+y^2=25, & ①\\x-y=k. & ②\end{cases}$

(1)当 k 取什么值时,方程组有实数解;

(2)在以上 k 的取值范围内，k 取最大整数时，求方程组的解.

解 (1)由②，得 $y=x-k$.

代入①，得 $x^2+(x-k)^2=25$，$\therefore 2x^2-2kx+k^2-25=0$.

$\therefore \Delta=4k^2-4\times2\times(k^2-25)=4(50-k^2)$.

$\Delta\geqslant0$，则 $4(50-k^2)\geqslant0$，$\therefore -5\sqrt{2}\leqslant k\leqslant5\sqrt{2}$.

当 $-5\sqrt{2}\leqslant k\leqslant5\sqrt{2}$ 时，这个方程组有实数解.

(2)在 $-5\sqrt{2}\leqslant k\leqslant5\sqrt{2}$ 中，k 取最大值，$k=7$.

$\therefore \begin{cases}x^2+y^2=25,\\x-y=7.\end{cases}$

$\therefore x^2-7x+12=0$，$x_1=3$，$x_2=4$.

$\therefore y_1=-4$，$y_2=-3$.

$\therefore$ 这个方程组的解为 $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=-4;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=4,\\y_2=-3.\end{cases}$

题 151 已知方程组 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=2x+n\end{cases}$ 有两个实数解 $\begin{cases}x=x_1,\\y=y_1\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x=x_2,\\y=y_2,\end{cases}$ 且 $x_1x_2\neq0$，$x_1\neq x_2$，设 $m=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

(1)求 n 的取值范围；

(2)试用关于 n 的代数式表示出 m；

(3)是否存在使 m 等于 1 的 n 的值？若存在，求出这样的所有 n 的值；若不存在，请说明理由.

解 (1)把 $y=2x+n$ 代入 $y^2=4x$，整理，得 $4x^2+4(n-1)x+n^2=0$.

则 x_1、x_2 是这个关于 x 的一元二次方程的两个不等的实数根.

$\because x_1\neq x_2$，$x_1\cdot x_2\neq0$，$\therefore \Delta=[4(n-1)]^2-4\times4n^2>0$，且 $n^2\neq0$，

$\therefore n<\dfrac{1}{2}$，且 $n\neq0$.

$\therefore n$ 的取值范围是 $n<\dfrac{1}{2}$，且 $n\neq0$.

(2)$\because x_1$、x_2 是关于 x 的一元二次方程 $4x^2+4(n-1)x+n^2=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=1-n$，$x_1x_2=\dfrac{n^2}{4}$.

$\therefore m=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{1-n}{\frac{n^2}{4}}$，$\therefore m=\dfrac{4(1-n)}{n^2}$.

(3)当 $m=1$ 时，$\dfrac{4(1-n)}{n^2}=1$，则 $n^2+4n-4=0$，解得 $n_1=-2+2\sqrt{2}$，$n_2=-2-2\sqrt{2}$.

经检验知，当 $n_1=-2+2\sqrt{2}$ 和 $n_2=-2-2\sqrt{2}$ 时，m 的值都为 1.

$\because -2+2\sqrt{2}>\frac{1}{2}$，$\therefore -2+2\sqrt{2}$ 不在 n 的取值范围内，舍去.

而 $-2-2\sqrt{2}<0<\frac{1}{2}$，$\therefore -2+2\sqrt{2}$ 在 n 的取值范围内，

$\therefore$ 使 $m=1$ 的 n 的值存在，是 $n=-2-2\sqrt{2}$.

题 152 已知：x、y、$z>0$，且满足方程组 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=9, & ① \\ y^2+yz+z^2=4, & ② \\ x^2+xz+z^2=1. & ③ \end{cases}$

求 $x+y+z$ 的值.

解 ①+②+③，得 $2(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=14$.

①−②得，$x+y+z=\frac{5}{x-z}$，

②−③得，$x+y+z=\frac{3}{y-x}$，

①−③得，$x+y+z=\frac{8}{y-z}$.

所以 $(x+y+z)^2=\frac{25}{(x-z)^2}=\frac{9}{(y-x)^2}=\frac{64}{(y-z)^2}$

$=\frac{98}{(x-z)^2+(y-x)^2+(y-z)^2}=\frac{49}{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}$

$=\frac{49}{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)}=\frac{49}{14-(x+y+z)^2}$.

$\therefore (x+y+z)^4-14(x+y+z)^2+49=0$.

$\therefore [(x+y+z)^2-7]^2=0$，$(x+y+z)^2=7$，

$\because x$、y、$z>0$，$\therefore x+y+z=\sqrt{7}$.

题 153 某厂今年一月份生产甲型机床 64 台，乙型机床若干台，从二月份起，甲型机床的增长率逐月相同，乙型机床逐月增加 6 台，已知二月份生产的甲型机床是乙型机床的 4 倍；三月份甲、乙型机床共生产 105 台. 求甲型机床的月增长率及一月份生产乙型机床的台数.

解 设甲型机床的月增长率为 x，一月份生产乙型机床 y 台. 根据题意，得

$\begin{cases} 64(1+x)=4(y+6), & ① \\ 64(1+x)^2+(y+12)=105. & ② \end{cases}$

由①得，$y=16x+10$. ③

把③代入②，得 $64(1+x)^2+16x+22=105$.

整理，得 $64x^2+144x-19=0$.

解这个方程，得 $x_1=\frac{1}{8}$，$x_2=-\frac{19}{8}$（不合题意，舍去）.

把 $x=\frac{1}{8}$ 代入③得 $y=16x+10=16\times\frac{1}{8}+10=12$.

∴原方程组的解为 $\begin{cases}x=\frac{1}{8}=12.5\%,\\ y=12.\end{cases}$

答 甲型机床的月增长率为 12.5%，一月份生产乙型机床 12 台.

题 154 客车和货车同时分别从甲、乙两城沿同一公路相向而行，相遇时货车比客车多行了 120 千米. 相遇后，客车再经过 9 小时到达乙城，货车再经过 4 小时到达甲城.

求：(1)客车、货车的速度；

(2)甲、乙两城间的路程.

解 设客车、货车的速度分别为 x 千米/时、y 千米/时，根据题意，得

$\begin{cases}9x-4y=120,\\ \frac{4y}{x}=\frac{9x}{y}.\end{cases}$ 则 $\begin{cases}9x-4y=120,\\ 4y^2-9x^2=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=40,\\ y_1=60;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=8,\\ y_2=-12.\end{cases}$

经检验 $\begin{cases}x_1=40,\\ y_1=60;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=8,\\ y_2=-12\end{cases}$ 都是原方程的解，但 $\begin{cases}x_2=8,\\ y_2=-12\end{cases}$ 不合题意.

$9x+4y=9\times40+4\times60=600$.

答 客车、货车的速度分别为 40 千米/时、60 千米/时，甲、乙两城间的路程为 600 千米.

第十二章　函数及其图像

一、平面直角坐标系

题 1　试述有关坐标平面的知识.

答　坐标平面被坐标轴分成四个部分,从右上部分开始按逆时针方向依次叫做第一、二、三、四象限,但坐标轴不属于任何象限.各象限内点的符号规律依次是:(+,+)、(−,+)、(−,−)、(+,−).

题 2　写出坐标轴上的点的坐标规律.

答　平面直角坐标系内,对于横轴上的点,它的纵坐标 $y=0$;对于纵轴上的点,它的横坐标 $x=0$;坐标原点:$x=0,y=0$.

题 3　写出任意点 $P(a,b)$ 关于 x 轴、y 轴、原点的对称点的坐标.

答　任意点 $P(a,b)$ 关于 x 轴对称点的坐标为 $P_1(a,-b)$;关于 y 轴的对称点坐标为 $P_2(-a,b)$;关于原点的对称点坐标为 $P_3(-a,-b)$.

题 4　点 $M(x,y)$ 的坐标满足 $xy=0$,则 M 在(　　).

A. 纵轴上　　　　B. 横轴上

C. 纵轴或横轴上　　　　D. 在一、三象限角平分线上

解　由 $xy=0$ 得 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x=0$、$y=0$,

∴在纵轴或横轴上.故选择 C.

题 5　点 $N(x,y)$ 的坐标满足 $xy<0$,则点 N 在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第一、三象限　　D. 第二、四象限

解　∵$xy<0$,∴x、y 异号,即 $x>0$ 时,$y<0$ 或 $x<0$ 时,$y>0$.前者在第四象限,后者在第二象限.故选择 D.

题 6　平行于 y 轴的直线上的任意两点坐标之间的关系是(　　).

A. 横坐标相等　　　　B. 横坐标与纵坐标都相等

C. 纵坐标相等　　　　D. 横坐标与纵坐标都不相等

解 选择 A.

题7 点 $A(-3,2)$关于原点的对称点 B,点 B 关于 x 轴的对称点是 C,则 C 点的坐标是(　　).

A. $(3,2)$　　B. $(-3,2)$　　C. $(3,-2)$　　D. $(-2,3)$

解 ∵点 $A(-3,2)$关于原点的对称点 B 坐标是$(3,-2)$;点 $B(3,-2)$关于 x 轴的对称点 C 的坐标是$(3,2)$. 故选择 A.

题8 $P(x,y)$在第二象限内,且$|x|=2$,$|y|=3$,则点 P 关于 x 轴对称的点的坐标是(　　).

A. $(-2,3)$　　B. $(-3,2)$　　C. $(3,-2)$　　D. $(-2,-3)$

解 ∵点 P 在第二象限,∴$x<0$,$y>0$,由$|x|=2$,$|y|=3$ 得 $x=-2$,$y=3$,∴点 $P(-2,3)$,∴P 关于 x 轴对称点的坐标是$(-2,-3)$. 故选择 D.

题9 如果 $A(a,b)$、$B(c,a)$表示同一点,则这一点在(　　).

A. 平行于 x 轴的直线上

B. 第一、三象限内两轴夹角平分线上

C. 平行于 y 轴的直线上



D. 第二、四象限内两轴夹角平分线上

解 若 $A(a,b)$、$B(c,a)$表示同一点,则 $a=c$,$b=a$,∴$a=b=c$. ∴这一点在 $y=x$ 上,即一、三象限内两轴夹角平分线上. 故选择 B.

题10 若点 $P(n,3-n)$是第二象限的点,则 n 满足(　　).

A. $n<0$　　B. $n>0$　　C. $0<n<3$　　D. $n<0$ 或 $n>0$

解 ∵点 $P(n,3-n)$在第二象限,∴$n<0$ 且 $3-n>0$,故选择 A.

题11 在第二、四象限内两轴夹角平分线上的点的横坐标和纵坐标之间的关系是(　　).

A. 相等　　B. 互为相反数　　C. 互为倒数　　D. 互为负倒数

解 ∵第二、四象限内两轴夹角平分线表示为 $y=-x$. 即横、纵坐标互为相反数. 故选择 B.

题12 点 $M(x,y)$的坐标满足$\frac{x}{y}=0$,那么 M 的可能位置是(　　).

A. x 轴上的点的全体　　B. 除去原点后 x 轴上的点的全体

C. y 轴上的点的全体　　D. 除去原点后 y 轴上的点的全体

解 ∵$\frac{x}{y}=0$,∴$x=0$ 且 $y\neq 0$.

∴M 点的可能位置是除去原点后的 y 轴全体. 故选择 D.

题13 已知点 $M(x,y)$是第一、三或第二、四象限内两轴夹角平分线上的点,那么(　　).

A. $x+y=0$　　B. $x-y=0$　　C. $x^2+y^2=0$　　D. $x^2-y^2=0$

解 根据题意,得 $x=y$ 或 $x=-y$,$\therefore x^2=y^2$,即 $x^2-y^2=0$. 故选择 D.

题 14 在平面直角坐标系中,第三象限的点 $P(a,-b)$($|a|\neq|b|$)到 x 轴的距离为 d,则( ).

A. $d=a$ B. $d=-a$ C. $d=b$ D. $d=-b$

解 $\because$ 点 $P(a,-b)$在第三象限,$\therefore a<0,-b<0$,$\therefore a<0,b>0$. $\therefore P$ 到 x 轴的距离为 $|-b|=|b|=b$,即 $d=b$. 故选择 C.

题 15 在直角坐标系中,坐标轴上到点 $P(-3,-4)$的距离等于 5 的点共有( ).

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

解 设此点为 Q,坐标为 $Q(x,0)$或 $Q(0,y)$. 根据题意,得 $\sqrt{(x+3)^2+4^2}=5$ 或 $\sqrt{3^2+(y+4)^2}=5$,解得 $x_1=0,x_2=-6$;$y_1=0,y_2=-8$. 又$\because Q$ 点在坐标轴上,$\therefore$点 $Q(0,0)$或$(0,-8)$或$(-6,0)$. 故选择 C.

题 16 已知:点 $P(3a-9,1-a)$是第三象限的整点(横、纵坐标均为整数),求这个点的坐标.

解 $\because P$ 在第三象限,$\therefore 3a-9<0$ 且 $1-a<0$,$\therefore 1<a<3$,

又$\because a$ 是整数,$\therefore a=2$,

$\therefore 3a-9=3\times2-9=-3,1-a=1-2=-1$,$\therefore$点 $P(-3,-1)$.

题 17 已知:点 $P(x,y)$到 $A(8,0)$和 $B(1,-3)$的距离相等,且 P 点到两坐标轴的距离也相等. 求点 P 的坐标.

解 根据题意,得

$$\begin{cases}\sqrt{(x-8)^2+y^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2},\\ |x|=|y|.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x_1=2.7,\\ y_1=2.7;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=6.75,\\ y_2=-6.75.\end{cases}$

$\therefore P_1(2.7,2.7),P_2(6.75,-6.75)$.

题 18 已知:点 $P(x,y)$的坐标满足方程$(x-2)^2+\sqrt{y+6}=0$,求点 P 关于原点的对称点的坐标.

解 $\because (x-2)^2+\sqrt{y+6}=0$,$\therefore x-2=0$ 且 $y+6=0$,

$\therefore x=2,y=-6$. $\therefore$点 $P(2,-6)$

$\therefore$点 $P(2,-6)$关于原点的对称点的坐标是$(-2,6)$.

二、函数及图像

题 19 什么是函数、常用的函数表示法是什么？画函数图象的一般步骤是什么？

解 函数定义：在一个变化过程中有两个变量 x 与 y，如果对于 x 的每一个值，y 都有唯一的值与它对应，那么就说 x 是自变量，y 是 x 的函数.

函数的表示方法：常用的是解析法、列表法、图像法三种.

图像的画法：画函数图像的最基本方法是描点法，步骤是已知解析式的前提下，通过列表、描点、连线画出函数的图像，但它所画的图像一般是近似的、部分的，点取得越多，图像越精确.

题 20 下列关系式中不是函数关系的是(　　).

A. $y=\pm\sqrt{x}\ (x>0)$　　B. $y=x(x>0)$

C. $y=-\sqrt{x}\ (x>0)$　　D. $y=\dfrac{2-x}{\sqrt{2-x^2}}(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2})$

解 对于 A 中的一个 x 值，y 有两个值与它对应，根据定义不是函数关系. 故选择 A.

题 21 在函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$中，自变量 x 的取值范围是(　　).

A. $x<-3$　　B. $x\leqslant-3$　　C. $x\leqslant3$　　D. $x>3$

解 根据题意，得$\begin{cases}x-3\geqslant0,\\ \sqrt{x-3}\neq0.\end{cases}$　解得 $x>3$. 故选择 D.

题 22 函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}$的自变量的取值范围是(　　).

A. $-2<x\leqslant2$　B. $-2\leqslant x\leqslant2$　C. $x\leqslant2$ 且 $x\neq2$　D. $-2<x<2$

解 根据题意，得

$\begin{cases}4-x^2\geqslant0,\\ x+2\neq0.\end{cases}$　解得$-2\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\neq2$，$\therefore -2<x\leqslant2$. 故选择 A.

题 23 在函数 $y=\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x^2-9}$中，自变量 x 的取值范围是(　　).

A. $x>-2$ 且 $x\neq-3$　　B. $x>-2$ 且 $x\neq3$

C. $x\geqslant-2$ 且 $x\neq\pm3$　　D. $x\geqslant-2$ 且 $x\neq3$

解 根据题意，得

$\begin{cases}x+2\geqslant0,\\ x^2-9\neq0.\end{cases}$　解得 $x\geqslant-2$ 且 $x\neq\pm3$，$\therefore x\geqslant-2$ 且 $x\neq3$. 故选择 D.

题24 函数 $y=\sqrt{5x-1}+\frac{1}{x-2}$ 的自变量 x 的取值范围是(　　).

A. $x\geqslant\frac{1}{5}$　　　　B. $x\neq2$ 的所有实数

C. $x\geqslant\frac{1}{5}$ 或 $x\neq2$ 的所有实数　　　　D. $x\geqslant\frac{1}{5}$ 且 $x\neq2$

解 根据题意,得

$\begin{cases}5x-1\geqslant0,\\x-2\neq0.\end{cases}$ 解得 $x\geqslant\frac{1}{5}$ 且 $x\neq2$. 故选择 D.

题25 求下列各函数中自变量 x 的取值范围:

(1) $y=\frac{x+1}{2-x}$;　　　　(2) $y=\frac{1}{x-\sqrt{2}}$;

(3) $y=\frac{x}{|x+1|-1}$;　　　　(4) $y=\frac{x+5}{7+2x}$.

解 (1) 由 $2-x\neq0$,得 $x\neq2$;

(2) 由 $x-\sqrt{2}\neq0$,得 $x\neq\sqrt{2}$;

(3) 由 $|x+1|-1\neq0$,得 $|x+1|\neq1$, $\therefore x+1\neq\pm1$, $\therefore x\neq0$ 且 $x\neq-2$;

(4) 由 $7+2x\neq0$,得 $2x\neq-7$, $\therefore x\neq-\frac{7}{2}$.

题26 求下列各函数中自变量 x 的取值范围:

(1) $y=\frac{x+1}{\sqrt{9-x^2}}$;　　　　(2) $y=\frac{6}{2-\sqrt{x-1}}$;

(3) $y=-\sqrt{6-x}$;　　　　(4) $y=\sqrt{x^2-x-6}$.

解 (1)由 $9-x^2\geqslant0$ 且 $\sqrt{9-x^2}\neq0$,得 $-3\leqslant x\leqslant3$ 且 $x\neq\pm3$,

$\therefore -3<x<3$;

(2)由 $x-1\geqslant0$ 且 $2-\sqrt{x-1}\neq0$,得 $x\geqslant1$ 且 $x\neq5$.

(3)由 $6-x\geqslant0$,得 $x\leqslant6$;

(4)由 $x^2-x-6\geqslant0$,得 $(x-3)(x+2)\geqslant0$, $\therefore x\geqslant3$ 或 $x\leqslant-2$.

题27 求下列各函数中自变量 x 的取值范围:

(1) $y=\frac{\sqrt{3-2x}}{x^2-5x-6}$;　　　　(2) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-2}$;

(3) $y=\sqrt{16-x^2}+x^0$;　　　　(4) $y=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{(2x-1)^{-1}}+\sqrt{3x+1}$.

解 (1) $\begin{cases}3-2x\geqslant0,\\x^2-5x-6\neq0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\leqslant\frac{3}{2},\\x\neq6 \text{ 且 } x\neq-1.\end{cases}$

$\therefore x$ 取值范围是 $x\leqslant\frac{3}{2}$ 且 $x\neq-1$.

(2) $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x^2-2\neq 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x\neq \pm\sqrt{2}. \end{cases}$

∴x 取值范围是 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq\sqrt{2}$.

(3) $\begin{cases} 16-x^2\geqslant 0, \\ x\neq 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -4\leqslant x\leqslant 4, \\ x\neq 0. \end{cases}$

∴$-4\leqslant x<0$ 和 $0<x\leqslant 4$.

(4) $\begin{cases} 2x-x^2\geqslant 0, \\ 3x+1\geqslant 0, \\ 2x-1\neq 0. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 2, \\ x\geqslant -\dfrac{1}{3}, \\ x\neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

∴$0\leqslant x<\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{2}<x\leqslant 2$.

题 28 x、y 之间的对应关系如下表：

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	10	5	2	1	2	5	10

你能根据函数的定义判别 y 是 x 的函数吗？x 是 y 的函数吗？

解 这里 x 的每一个值，y 都有唯一值和它对应，根据函数定义知 y 是 x 的函数；但对于 y 的值，x 有两个值与之对应，所以 x 不是 y 函数.

题 29 写出下列函数关系式，并指出式中的函数与自变量：

(1) 轮子每分钟旋转 60 转，求轮子旋转的转数 n 与时间 t(分)的关系；

(2) 油箱中有油 50 升，求用油时间 t(小时)与耗油量 q(升/时)的关系；

(3) 求等腰三角形的底角的度数 y 与顶角的度数 x 的关系；

(4) 弹簧原来的长度是 10 厘米，悬挂的重量每增加 1 千克，弹簧伸长 0.8 厘米，但悬挂的重量不得超过 15 千克，求弹簧的长度 h(厘米)与悬挂的重量 w(千克)的关系；

(5) 在边长为 12 厘米的正方形铁皮上剪下一个圆，求剩下铁皮的面积 S(厘米^2)与圆半径 r(厘米)的关系.

解 (1) $n=60t$. t 是自变量，n 是函数.

(2) $t=\dfrac{50}{q}$. q 是自变量，t 是函数.

(3) $y=90°-\dfrac{x}{2}$. x 是自变量，y 是函数.

(4) $h=10+0.8w(0\leqslant w\leqslant 15)$. w 是自变量，h 是函数.

(5) $S=12^2-\pi r^2=144-\pi r^2(0<r\leqslant 6)$. r 是自变量，S 是函数.

题30 求下列函数当 $x=4$ 时的函数值：

(1)$y=\frac{2x-1}{x-2}$； (2)$y=\frac{\sqrt{x-3}}{x+3}$.

解 当 $x=4$ 时：

(1) $y=\frac{2x-1}{x-2}=\frac{2\times 4-1}{4-2}=\frac{7}{2}$；

(2) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{x+3}=\frac{\sqrt{4-3}}{4+3}=\frac{1}{7}$.

题31 当 x 取什么值时，下列函数的函数值为 0?

(1)$y=x^2-4x-21$； (2)$y=\frac{|x|-3}{x^2+1}$.

解 (1)令 $y=0$，即 $x^2-4x-21=0$，$\therefore x_1=7$，$x_2=-3$.

$\therefore$当 $x=7$ 或 $x=-3$ 时，函数 $y=x^2-4x-21$ 的函数值为 0.

(2)令 $y=0$，即 $\frac{|x|-3}{x^2+1}=0$，$\therefore |x|=3$，$\therefore x_1=3$，$x_2=-3$.

$\therefore x=\pm 3$ 时，函数 $y=\frac{|x|-3}{x^2+1}$ 的值为 0.

题32 A 市和 B 市分别有某种机器 12 台和 6 台，现决定支援给 C 市 10 台、D 市 8 台，已知从 A 市调运一台机器到 C 市、D 市的运费分别为 4 百元和 8 百元；从 B 市调运一台机器到 C 市、D 市的运费分别为 3 百元和 5 百元.

(1)设 B 市运往 C 市机器 x 台，求总运费 W 关于 x 的函数关系式；

(2)若要求总运费不超过 9 千元，共有几种调运方案?

(3)求出总运费最低的调运方案，最低运费是多少元?

解 (1)设 B 市运往 C 市 x 台，则 B 市运往 D 市$(6-x)$台，A 市运往 C 市$(10-x)$台，运往 D 市$(12-10+x)$台. 则总运价(单位：百元)

$W=3x+5(6-x)+4(10-x)+8(2+x)=2x+86$，

$\therefore$所求函数解析式为 $W=2x+86$.

(2)由题意，得 $2x+86\leqslant 90$，$\therefore x\leqslant 2$，又 B 市有 6 台机器，$0\leqslant x\leqslant 6$，

$\therefore 0\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore x$ 可取 0、1、2 三个数.

所以要求总运费不超过 9 千元，共有三种调运方案.

(3)$\because 0\leqslant x\leqslant 2$，显然，$x=0$ 时，$W=86$ 为最小值.

此时调运方案是：B 市的 6 台机器都运到 D 市，A 市的 12 台机器 10 台运往 C 市，2 台运往 D 市，这时最低运费 8 千 6 百元.

题33 求函数 $y=x+\sqrt{1-2x}$的值的范围.

解 由 $y=x+\sqrt{1-2x}$，得 $y-x=\sqrt{1-2x}$. ①

把①的两边平方，再整理成一个关于 x 的一元二次方程得

$$x^2+2(1-y)x+y^2-1=0,\qquad ②$$

∵x 是实数，∴②的判别式

$\Delta=[2(1-y)]^2-4(y^2-1)\geqslant 0$. 解不等式得 $y\leqslant 1$.

所以函数的值的范围是 $y\leqslant 1$.

题 34 已知：$f(x)=x^2+1$，求 $f(x+1)$.

解 ∵$f(x)=x^2+1$，∴$f(x+1)=(x+1)^2+1=x^2+2x+2$.

题 35 已知：$f(x+1)=x^2+2x-1$，求 $f(x)$.

解 设 $x+1=t$，则 $x=t-1$.

∴$f(x+1)=f(t-1+1)=f(t)=(t-1)^2+2(t-1)-1=t^2-2$.

∴$f(x)=x^2-2$.

题 36 已知：$f(x-x^{-1})=x^2+x^{-2}$，求 $f(x+1)$.

解 $f(x-x^{-1})=f(x-\frac{1}{x})=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$. 令 $x-\frac{1}{x}=t$，

则 $f(t)=t^2+2$. 令 $t=x+1$.

$f(x+1)=(x+1)^2+2=x^2+2x+3$.

三、正比例函数、反比例函数和一次函数

题 37 简述正比例函数、反比例函数、一次函数的定义、自变量取值范围、图像及性质.

解 (1)函数 $y=kx$（k 是常数，$k\neq 0$）是正比例函数. 自变量 x 的取值范围是全体实数. 其图像是经过(0,0)和(1,k)两点的直线. 其性质是：① $k>0$ 时，图像在一、三象限内，y 的值随 x 的值增大而增大；② $k<0$ 时，图像在二、四象限内，y 的值随 x 的值增大而减小.

(2)函数 $y=\frac{k}{x}$（k 是常数，$k\neq 0$）是反比例函数. 自变量 x 的取值范围是 $x\neq 0$ 的全体实数. 其图像是关于原点对称的双曲线. 其性质是：① $k>0$ 时，图像在一、三象限内，在每个象限内，y 的值随 x 的值增大而减小；② $k<0$ 时，图像在二、四象限内，在每个象限内 y 随 x 增大而增大；③ 图像的两个分支都无限接近两坐标轴，但永远不能相交.

(3)函数 $y=kx+b$（k、b 是常数，$k\neq 0$）叫做一次函数. 自变量 x 的取值范围是全体实数. 其图像是经过(0,b)和($-\frac{b}{k}$,0)两点的直线. 其性质是：① $k>0$ 时，y 随 x 增大而增大；② $k<0$ 时，y 随 x 增大而减小.

题 38 已知 y 与 x 成正比例，如果 $x=2$ 时，$y=1$，那么 $x=3$ 时，y 等于(　　).

A. 1.5　　B. 2　　C. 3　　D. 6

解　∵y与x成正比例，设$y=kx$，把$x=2$，$y=1$代入，得$1=2k$，

∴$k=\frac{1}{2}$. ∴解析式为$y=\frac{1}{2}x$.

当$x=3$时，$y=\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}=1.5$. 故选择A.

(2) **题39**　在函数$y=(1+m)x\ \ (m\neq-1)$中，y随x增大而增大，那么(　　).

A. $m<0$　　B. $m>0$　　C. $m<-1$　　D. $m>-1$

解　∵y随x增大而增大，∴$1+m>0$，∴$m>-1$. 故选择D.

3 **题40**　在一次函数$y=kx+3$中，当$x=2$时，y的值为5，则k的值是(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 5　　D. -5

解　把$x=2$，$y=5$代入，得$5=2k+3$，∴$k=1$. 故选择B.

4 **题41**　如果$ab>0$，$bc<0$，则直线$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$不通过(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

解　∵$ab>0$，∴a、b同号，∴$\frac{a}{b}>0$，∴$-\frac{a}{b}<0$，∴图像过二、四象限；又$bc<0$，∴b、c异号，∴$\frac{c}{b}<0$，∴$-\frac{c}{b}>0$，∴图像又过第一象限. ∴图像过一、二、四象限，不过第三象限. 故选择C.

5 **题42**　要使直线$y=kx+b$在一、二、三象限内，k和b必须符合(　　).

A. $k>0,b<0$　　B. $k>0,b>0$　　C. $k<0,b<0$　　D. $k<0,b>0$

解　若直线过一、三象限，则$k>0$；又过二象限，则$b>0$，∴$k>0$，$b>0$. 故选择B.

6 **题43**　已知一次函数$y=2x^{m^2-2m-2}+m-2$的图像经过第一、二、三象限，则(　　).

A. $m=3$或$m=-1$　　B. $m=3$　　C. $m=-1$　　D. $m=1$

解　根据题意，得$m^2-2m-2=1$且$m-2>0$，∴$m_1=3$，$m_2=-1$且$m>2$，∴$m=3$. 故选择B.

7 **题44**　已知一次函数$y=kx-2$，如果y随x的增大而减小，则它的图像经过(　　).

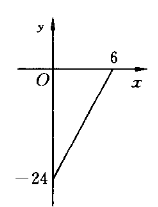
A. 第二、三、四象限　　B. 第一、二、三象限

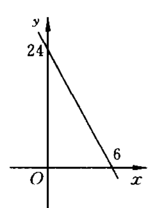
C. 第一、三、四象限　　D. 第一、二、四象限

解　∵一次函数$y=kx-2$中，y随x增大而减小，∴$k<0$，即过二、四象限，又∵$b=-2<0$，∴又过三象限，∴过二、三、四象限. 故选择A.

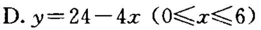
题45　拖拉机开始工作时，油箱中有油24升，如果每小时耗油4升，那么油箱中的剩余油量y(升)与工作时间x(时)之间的函数关系式和图像是(　　).

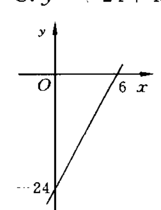
A. $y=4x-24\ (0\leqslant x\leqslant6)$　　B. $y=24-4x$





C. $y=-24+4x$


D. $y=24-4x$ ($0\leqslant x\leqslant 6$)



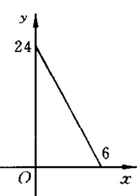


图 12 - 1

解 选择 D.

题 46 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点(2,3),那么 k 等于( ).

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 6 D. $\frac{1}{6}$

解 把 $x=2$,$y=3$ 代入,得 $3=\frac{k}{2}$,$\therefore k=6$. 故选择 C.

题 47 已知点(2,−6)在函数 $y=kx$ 的图像上,则函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过( ).

A. 第一、二象限 B. 第二、三象限

C. 第二、四象限 D. 第一、四象限

解 把 $x=2$,$y=-6$ 代入 $y=kx$ 中,得 $-6=2k$,$\therefore k=-3$. $\because k<0$,$\therefore$ 函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像在二、四象限. 故选择 C.

题 48 已知 y 与 $\sqrt{x}$ 成正比例,且 $x=4$ 时,$y=-\frac{1}{4}$,那么 y 与 x 之间的函数关系式是( ).

A. $y=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ B. $y=-\frac{\sqrt{x}}{8}$

C. $y=-\frac{1}{x}$ D. $y=-\frac{x}{16}$

解　设 $y=k\sqrt{x}$，把 $x=4$，$y=-\frac{1}{4}$ 代入，得 $-\frac{1}{4}=k\sqrt{4}$，

$\therefore k=-\frac{1}{8}$，$\therefore y$ 与 x 的关系式是 $y=-\frac{\sqrt{x}}{8}$. 故选择 B.

题 49　已知点 $P_1(a,b)$ 在函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的图像上，那么不在此图像上的点是（　　）.

A. $P_1(-a,-b)$　　　　B. $P_2(b,a)$

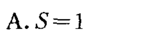
C. $P_3(-b,-a)$　　　　D. $P_4\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$

解　把 $x=a$，$y=b$ 代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，得 $b=\frac{k}{a}$，$\therefore k=ab$，$\therefore y=\frac{ab}{x}$.

经检验只有 $P_4\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$ 不满足解析式 $y=\frac{ab}{x}$，

$\therefore P_4$ 不在图像上. 故选择 D.

题 50　如图 12－2 所示，A、B 是函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图像上关于原点 O 对称的任意两点，AC 平行于 y 轴，BC 平行于 x 轴，$\triangle ABC$ 的面积为 S，则（　　）.

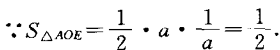


A. $S=1$　　　　B. $1<S<2$

C. $S=2$　　　　D. $S>2$

图 12－2

解　如图，设 AC 交 x 轴于 E 点，设 $A\left(a,\frac{1}{a}\right)$.



$\because S_{\triangle AOE}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$.

又 $\because S_{\triangle AOE}:S_{\triangle ABC}=1^2:2^2=1:4$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle AOE}=4\times\frac{1}{2}=2$. 故选择 C.

题 51　在同一坐标系中，函数 $y=-\frac{3}{2}x$ 与 $y=-\frac{3}{x}$ 的图像的交点在（　　）.

A. 第一、三象限　　　　B. 第二、四象限

C. 第一象限　　　　D. 第二象限

解　根据题意，得方程组

$$\begin{cases}y=-\frac{3}{2}x,\\ y=-\frac{3}{x}.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x_1=\sqrt{2},\\ y_1=-\frac{3}{2}\sqrt{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=-\sqrt{2},\\ y_2=\frac{3}{2}\sqrt{2}.\end{cases}$$

$\therefore$ 交点为 $\left(\sqrt{2},-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$、$\left(-\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ 分别在第四、二象限. 故选择 B.

题 52　如图 12－3 所示，直线 l 是一次函数 $y=kx+b$ 的图像，那么（　　）.

A. $k>0,b>0$　　　　B. $k>0,b<0$

C. $k<0,b>0$　　　　D. $k<0,b<0$

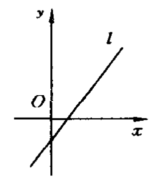


图 12 - 3

解 ∵l 过第一、三象限，∴$k>0$；又∵过第四象限，∴$b<0$. 故选择 B.

题 53 如图 12 - 4 所示，函数 $y=k(x+1)$ 与 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图像大致是(　　).

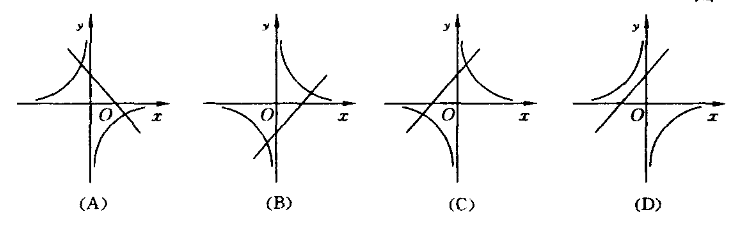


图 12 - 4

解 对于 $y=\frac{k}{x}$，若 $k>0$，∴图像位于第一、三象限，∴只可能选 B、C. 又∵当 $k>0$ 时，直线 $y=k(x+1)$ 一定过第一、二、三象限，∴C 对. 故选择 C.

题 54 如图 12 - 5 所示，函数 $y=\frac{k}{x}$ 与 $y=x-k(k\neq 0)$ 在同一直角坐标系中的图像只可能是(　　).

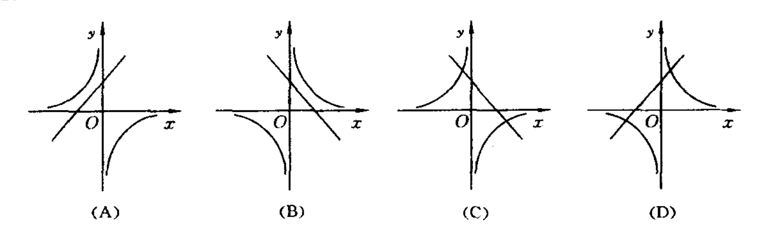


图 12 - 5

解 ∵$k\neq 0$，当 $k>0$ 时，对于 $y=\frac{k}{x}$，图像在第一、三象限，只有 B、D；而对于 $y=x-k$，其图像过第一、三、四象限，∴B、D 不可能；当 $k<0$ 时，对于 $y=\frac{k}{x}$，其图像在第二、四象限，只有 A、C，而对于 $y=x-k$，其图像过第一、二、三象限，∴C 不可能. 故选择 A.

题 55 如图 12 - 6 所示，如果 $k\cdot b<0$，且 $k<0$，那么函数 $y=kx+b$ 的图像大致是(　　).

解 ∵$k\cdot b<0$，∴k、b 异号，又 $k<0$，∴$b>0$. 对于 $y=kx+b$ 来说，当 $k<0$ 时，过第二、四象限，又∵$b>0$，∴还过第一象限. ∴图像过第一、二、四象限. 故选择 D.

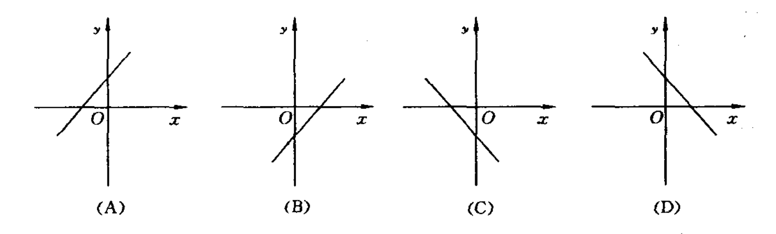


图 12 - 6

题 56 $y+1$ 与 z 成正比例，比例系数为 2；z 与 $x-1$ 成正比例. 当 $x=-1$时，$y=7$，那么 y 与 x 之间的函数关系式是(　　).

A. $y=2x+9$　　　　B. $y=-2x+5$

C. $y=4x+11$　　　　D. $y=-4x+3$

解　根据题意，设 $y+1=2z$，$z=k(x-1)$. 把 $x=-1$，$y=7$ 分别代入，得

$$\begin{cases}2z=7+1,\\ z=k(-1-1).\end{cases}\quad 解得\begin{cases}z=4,\\ k=-2.\end{cases}$$

$\therefore y=2k(x-1)-1=2\times(-2)(x-1)-1=-4x+3$. 故选择 D.

题 57 如图 12 - 7 所示，当 $x<0$ 时，函数 $y=x$ 和 $y=\dfrac{1}{x}$ 在同一坐标系中的大致图像是(　　).

解　∵直线 $y=x$ 过第一、三象限，而 $x<0$ 时，只在第三象限，B、D 可能；函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像在第一、三象限，而 $x<0$，∴只取第三象限的分支，∴D 不可能. 故选择 B.

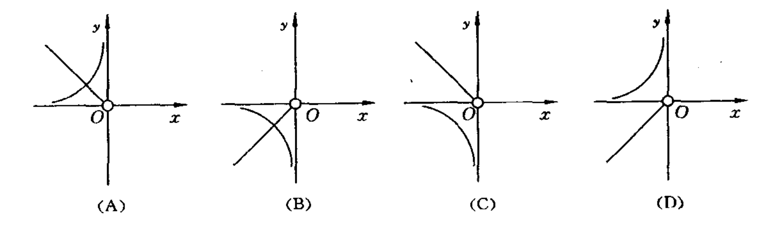


图 12 - 7

题 58 已知：y 与 x 成正比例，若 y 随 x 的增大而减小，且其图像经过 $A(3,-a)$和 $B(a,-1)$两点，求 y 与 x 之间的函数关系式.

解　设 $y=kx$，则 $k<0$. ∵直线过 $A(3,-a)$、$B(a,-1)$，所以

$$\begin{cases}-a=3k,\\ -1=ak.\end{cases}\quad 解得 k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}，\because k<0，\therefore 只取 k=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\therefore y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

题59 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过点(2,−3),求函数的解析式.

解 把 $x=2,y=-3$ 代入,得 $-3=\frac{k}{2}$,∴$k=-6$.

∴函数的解析式为 $y=-\frac{6}{x}$.

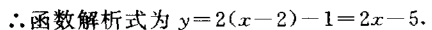
题60 已知一次函数的图像经过点 $A(2,0)$、$B(0,2)$,求函数解析式.

解 设 $y=kx+b$,∵过 $A(2,0)$、$B(0,2)$两点,∴有

$$\begin{cases}2k+b=0,\\b=2.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}\quad ∴解析式为\ y=-x+2.$$

题61 已知 $y+1$ 与 $x-2$ 成正比例,且当 $x=1$ 时,$y=-3$,写出 y 与 x 之间的函数关系式,并在坐标系中画出函数的图像.

解 设 $y+1=k(x-2)$,把 $x=1,y=-3$ 代入,得 $-3+1=k(1-2)$,解得 $k=2$,

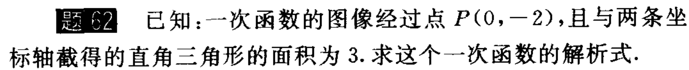


∴函数解析式为 $y=2(x-2)-1=2x-5$.

取 $x=0$,得 $y=-5$;取 $y=0$,得 $x=\frac{5}{2}$.

过点 $A(0,-5)$和 $B(\frac{5}{2},0)$画直线,如图 12 - 8 所示.

图 12 - 8



题62 已知:一次函数的图像经过点 $P(0,-2)$,且与两条坐标轴截得的直角三角形的面积为 3.求这个一次函数的解析式.

解 设这个一次函数的解析式为 $y=kx+b$.

由于函数图像过点 $P(0,-2)$,代入得 $-2=b$,即 $b=-2$,

∴这个一次函数的解析式为 $y=kx-2$.

令 $y=0$,得 $x=\frac{2}{k}$.即一次函数的图像与 x 轴交于点$(\frac{2}{k},0)$.

因为它与两条坐标轴所截得的直角三角形的面积为 3,所以

$$\frac{1}{2}\times|-2|\times|\frac{2}{k}|=3,|\frac{2}{k}|=3,∴k=\pm\frac{2}{3}.$$

∴这个一次函数的解析式为:$y=\frac{2}{3}x-2$ 或 $y=-\frac{2}{3}x-2$.

题63 已知点 P 的坐标是(5,0),点 $Q(x,y)$在直线 $y=x-8$ 上,且 $x\geqslant0,y<0$,求:

(1)$\triangle OPQ$ 的面积 S 与 x 之间的函数关系式;

(2)当 $x=2$ 时,$\triangle OPQ$ 的面积.

解 (1)$S=\frac{1}{2}\times5\times(-y)=\frac{1}{2}\times5\times(8-x)=-\frac{5}{2}x+20,(0\leqslant x\leqslant8)$.

(2)当 $x=2$ 时,$S=-\frac{5}{2}\times2+20=15$.

题64 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像与 x 轴及 y 轴的交点分别为 $A(x_1,0)$,$B(0,$

y_1)，且 $x_1>0,y_1>0,x_1+y_1=9,x_1\cdot y_1=18$. 求此一次函数的解析表达式，并画出图像.

解 根据已知条件，有方程组

$$\begin{cases}x_1+y_1=9,\\x_1\cdot y_1=18.\end{cases}$$

根据根与系数关系知，x_1、y_1 为一元二次方程 $z^2-9z+18=0$ 的两个根.

解得 $z_1=3,z_2=6$.

当 $x_1=3,y_1=6$ 时，把 $A(3,0)$、$B(0,6)$ 两点的坐标代入 $y=kx+b$ 中，有

$$\begin{cases}3k+b=0,\\b=6.\end{cases}\quad 解得\ k=-2.$$

此时，一次函数的解析式为 $y=-2x+6$.

当 $x_1=6,y_1=3$ 时，把 $A(6,0)$、$B(0,3)$ 两点的坐标代入 $y=kx+b$ 中，有

$$\begin{cases}6k+b=0,\\b=3.\end{cases}\quad 解得\ k=-\frac{1}{2}.$$

此时，一次函数的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$.

所求一次函数的解析式为 $y=-2x+6$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+3$. 图像如图 12 - 9 所示.

图 12 - 9

题 65 在直角坐标系内，一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过三点 $A(2,0)$、$B(0,2)$、$C(m,3)$. 求这个一次函数解析式并求 m 的值.

解 ∵$A(2,0)$、$B(0,2)$ 是直线 $y=kx+b$ 上的点，

$$\therefore\begin{cases}2k+b=0,\\b=2.\end{cases}解得\begin{cases}k=-1,\\b=2.\end{cases}$$

∴一次函数解析式为 $y=-x+2$.

∵一次函数 $y=-x+2$ 过 $C(m,3)$ 点，∴$-m+2=3$，∴$m=-1$.

题 66 如果反比例函数 $y=mx^{2m^2+3m-6}$ 的图像在第二、四象限，求 m 值.

解 根据题意，得 $2m^2+3m-6=-1$ 且 $m<0$，

∴$m_1=-\frac{5}{2}$，$m_2=1$ 且 $m<0$，∴$m_2=1$ 舍去.

∴m 的值是 $-\frac{5}{2}$.

题 67 已知直线 $y=kx+b$ 经过点$(-4,9)$和点$(6,3)$，求这个一次函数的解析式.

解 ∵点$(-4,9)$、$(6,3)$在直线 $y=kx+b$ 上，

$$\therefore\begin{cases}-4k+b=9,\\6k+b=3.\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases} k=\frac{-3}{5}, \\ b=\frac{33}{5}. \end{cases}$

∴这个一次函数的解析式为 $y=-\frac{3}{5}x+\frac{33}{5}$.

题68　已知一次函数 $y=(1-2m)x+m-1$，当 m 取何值时，函数 y 随着 x 的增大而减小，并且函数的图像经过第二、三、四象限？

解　根据题意，得

$\begin{cases} 1-2m<0, \\ m-1<0. \end{cases}$　解得 $\frac{1}{2}<m<1$.

∴当 $\frac{1}{2}<m<1$ 时，y 随 x 的增大而减小，且图像过第二、三、四象限.

题69　如图 12 - 10 所示，周长为 24 的凸五边形 $ABCDE$ 被对角线 BE 分为等腰三角形 ABE 及矩形 $BCDE$，且 $AB=AE=DE$. 设 AB 的长为 x，CD 的长为 y，求 y 与 x 之间的函数关系式，写出自变量 x 的取值范围，并在所给的坐标系中画出这个函数的图像.

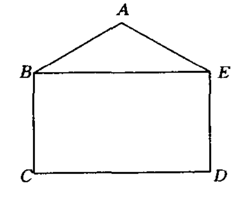


图 12 - 10

解　∵四边形 $BCDE$ 是矩形，

∴$BC=ED$，$BE=CD$.

∵$AB=AE=ED=x$，$CD=y$，∴$BC=x$，$BE=y$.

∵凸五边形 $ABCDE$ 的周长为 24，

∴$y=24-4x$.

∵$AB-AE<BE<AB+AE$，

∴$0<24-4x<2x$.

∴自变量 x 的取值范围是 $4<x<6$.

当 $x=4$ 时，$y=8$；当 $x=6$ 时，$y=0$，画出(4，8)，(6，0)两个空心点，连结线段，就是所求图像，如图 12 - 11 所示.

图 12 - 11

题70　如图 12 - 12 所示，已知直线 $y=kx+b$ 经过反比例函数 $y=\frac{-8}{x}$ 的图像上两点 A 和 B，A 点的横坐标和 B 点的纵坐标都是 2，求 k、b 的值.

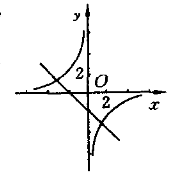


图 12 - 12

解　把 $x=2$ 代入 $y=\frac{-8}{x}$，得 $y=-4$，

∴点 A 的坐标为(2，−4).

把 $y=2$ 代入 $y=\frac{-8}{x}$，得 $x=-4$，

∴点 B 的坐标为(−4，2).

分别把 A 点、B 点坐标代入 $y=kx+b$，得

$\begin{cases}2k+b=-4,\\-4k+b=2.\end{cases}$ 解这个方程组，得 $\begin{cases}k=-1,\\b=-2.\end{cases}$

∴k、b 的值分别为 -1 和 -2.

题71 已知 y 与 $(x+2)$、$(x-4)$ 的积成正比例，当 $x=5$ 时，$y=3$；求 $x=12$ 时，y 的值.

解 设 $y=k(x+2)(x-4)$，把 $x=5$，$y=3$ 代入得 $3=k(5+2)(5-4)$，

∴$k=\frac{3}{7}$，∴$y=\frac{3}{7}(x+2)(x-4)$.

当 $x=12$ 时，$y=\frac{3}{7}(12+2)(12-4)=\frac{3}{7}\times14\times8=48$.

题72 求 k 为何值时，$y=\frac{k}{x}$ 的图像与 $y=-kx+4$ 的图像有两个不同的交点.

解 根据题意，得 $\begin{cases}y=\frac{k}{x},\\y=-kx+4.\end{cases}$

消去 y 得 $\frac{k}{x}=-kx+4$，

整理得 $kx^2-4x+k=0$，$\Delta=16-4k^2$.

∵当 $\Delta>0$ 时，此二直线有两个不同的交点，即 $16-4k^2>0$.

解得 $-2<k<2$.

∴当 $-2<k<2$ 时，$y=\frac{k}{x}$ 的图像与 $y=-kx+4$ 的图像有两个不同的交点.

题73 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 $A(0,1)$ 和点 $B(a,-3a)$，$a<0$，且点 B 在反比例函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图像上.

(1)求 a 的值；

(2)求一次函数的解析式，并画出它的图像；

(3)利用画出的图像，求当这个一次函数 y 的值在 $-1\leqslant y\leqslant3$ 范围内时，相应的 x 值的范围；

(4)如果 $P(m,y_1)$、$Q(m+1,y_2)$ 是这个一次函数图像上的两点，试比较 y_1 与 y_2 的大小.

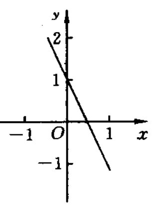
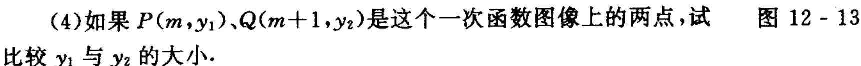


图 12 - 13


解 (1)根据题意，得 $-3a=-\frac{3}{a}$，解得 $a=\pm1$，∵$a<0$，∴$a=-1$.

(2)由(1)可知 B 点的坐标为 $(-1,3)$.

∵A、B 在直线 $y=kx+b$ 上，

∴$\begin{cases}b=1,\\-k+b=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=1,\\k=-2.\end{cases}$

∴一次函数的解析式为 $y=-2x+1$，描点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$、$(0,1)$，画出图像，如图 12 - 13 所

示.

(3)当 $y=-1$ 时，$-1=-2x+1$，$x=1$；

当 $y=3$ 时，$3=-2x+1$，$x=-1$.

$\therefore$ 当 $-1\leqslant y\leqslant 3$ 时，$-1\leqslant x\leqslant 1$.

(4)$\because k=-2<0$，$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，

$\because m<m+1$，$\therefore y_1>y_2$.

题 74 已知一个正比例函数和一个一次函数的图像交于点 $A(1,4)$，且一次函数的图像与 x 轴交于 $B(3,0)$ 点.

(1)求两个函数的解析式；

(2)画出它们的图像；

(3)求$\triangle AOB$ 中最大角的正弦值.

图 12 - 14

解 (1)设两个函数的解析式分别为 $y=k_1x$，$y=k_2x+b$.

$\because y=k_1x$ 过点 $A(1,4)$，$\therefore 4=k_1$，$\therefore y=4x$；

$y=k_2x+b$ 过点 $A(1,4)$ 和点 $B(3,0)$，

$\therefore \begin{cases}4=k_2+b,\\0=3k_2+b.\end{cases}$ 解这个方程组，得 $\begin{cases}b=6,\\k_2=-2.\end{cases}$ $\therefore y=-2x+6$.

(2)画出过(0,0)、(1,4)两点的直线，即 $y=4x$ 的图像(如图 12 - 14 所示)；画出过(1,4)、(3,0)两点的直线，即 $y=-2x+6$ 的图像(如图 12 - 14 所示).

(3)$\because OB=|3|=3$，$OA=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$，

$AB=\sqrt{(3-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$，

$\triangle AOB$ 中 AB 边最长，$\therefore$ 它所对的角最大，即$\angle AOB$ 最大.

过 A 作 $AC\perp x$ 轴，点 C 坐标为(1,0)，$\therefore OC=1$，$AC=4$，

根据勾股定理，得 $OA=\sqrt{OC^2+AC^2}=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$.

$\text{Rt}\triangle AOB$ 中，$\sin AOC=\dfrac{AC}{OA}=\dfrac{4}{\sqrt{17}}=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

题 75 已知：如图 12 - 15，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=7$，P 是 BC 边上与 B 点不重合的动点，过点 P 的直线交 CD 的延长线于 R，交 AD 于 Q(Q 与 D 不重合)，且$\angle RPC=45°$. 设 $BP=x$，梯形 $ABPQ$ 的面积为 y，求 y 与 x 之间的函数关系，并求出自变量的取值范围.

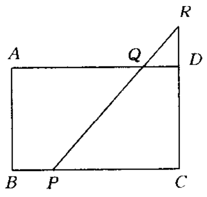


图 12 - 15

解 由已知得，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=BC=7$，$AB=DC=4$.

$\because \angle C=90°$，$\angle RPC=45°$，

$\therefore \angle R=45°=\angle RPC$，$\therefore PC=RC$.

$\because BP=x,\therefore PC=7-x.$

$\because AD/\!/BC,\therefore QD=RD=RC-DC=7-x-4=3-x,$

$\therefore AQ=AD-QD=7-(3-x)=4+x.$

$\therefore S_{梯形ABPQ}=\frac{1}{2}(AQ+BP)\cdot AB.$

$\because y=4x+8.$

当 Q 与 D 重合时，$PC=DC=4,BP=3.$

$\because P$ 与 B 不重合，Q 与 D 不重合，

$\therefore$ 自变量 x 的取值范围是 $0<x<3.$

题 76 已知：如图 12 - 16 所示，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AB=CD$. 设梯形的周长为 16cm，底角 B 为 30°，高 AH 为 $x$cm，中位线 EF 的长为 $y$cm. 用解析式表示梯形中位线长 y 与 x 的函数关系，并求自变量 x 的取值范围.

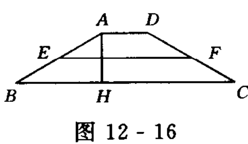


图 12 - 16

解 在 Rt$\triangle ABH$ 中，$\angle B=30^\circ,AH=x,\therefore AB=2AH=2x.$

由梯形中位线性质知，$EF=\frac{1}{2}(AD+BC).$

$\because AB=CD,\therefore y=\frac{1}{2}(16-2AB)=8-2x.$

显然 $x>0$，当 A、D 两点重合时，梯形 $ABCD$ 变为等腰三角形，此时，在 Rt$\triangle ABH$ 中，有 $BC=16-4x,BH=8-2x,$

则 $(2x)^2=x^2+(8-2x)^2,x^2-32x+64=0.$

解得 $x=16\pm8\sqrt{3}$，而 $x=16+8\sqrt{3}$ 不合题意，舍去.

$\therefore x=16-8\sqrt{3}$. 因此 $0<x<16-8\sqrt{3}$.

$\therefore y=-2x+8,\ (0<x<16-8\sqrt{3}).$

题 77 在坐标平面内，求直线 $x-4y+12=0$ 在 y 轴上的截距是多少？

解 令 $x=0$，得 $-4y+12=0,\therefore y=3.$ 即在 y 轴上的截距是 3.

题 78 已知：$y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，并且 $x=1$ 时，$y=4$；$x=2$ 时，$y=5$. 求 $x=4$ 时，y 的值.

解 根据题意，设 $y_1=k_1x,y_2=\frac{k_2}{x}$，则 $y=y_1+y_2=k_1x+\frac{k_2}{x}.$

把 $x=1,y=4;x=2,y=5$ 分别代入上式，得

$$\begin{cases}k_1+k_2=4,\\2k_1+\frac{k_2}{2}=5.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k_1=2,\\k_2=2.\end{cases}$$

$\therefore$ 函数关系式为 $y=2x+\frac{2}{x}.$

把 $x=4$ 代入，$y=2x+\frac{2}{x}=2\times4+\frac{2}{4}=8\frac{1}{2}.$

题79 有两条直线 $l_1: y_1=ax+b$ 和 $l_2: y_2=cx+5$. 学生甲解出它们的交点为(3,−2),学生乙因把 c 抄错而解出它们的交点为$(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$,试求出这两条直线的函数表达式.

解 根据题意,点(3,−2),在直线 l_2 上,

$\therefore -2=3c+5,\quad \therefore c=-\frac{7}{3}, \therefore y_2=-\frac{7}{3}x+5.$

又∵点(3,−2)和$(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$在直线 l_1 上,

$\therefore \begin{cases}-2=3a+b,\\ \frac{1}{4}=\frac{3}{4}a+b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1.\end{cases}$ $\therefore y_1=-x+1.$

题80 已知 z 与 $y-\sqrt{3}$ 成正比例,x 与 $\frac{\sqrt{6}}{z}$ 成反比例.

(1)证明:y 是 x 的一次函数;

(2)如果这个一次函数的图像经过点$(-2,3\sqrt{3})$,并且与 x、y 轴分别相交于 A、B 两点,求 A、B 两点的坐标.

解 (1)∵z 与 $y-\sqrt{3}$ 成正比例,

$\therefore z=k_1(y-\sqrt{3})(k_1\neq 0).$ ①

又∵x 与 $\frac{\sqrt{6}}{z}$ 成反比例,

$\therefore x=\frac{k_2}{\frac{\sqrt{6}}{z}}(k_2\neq 0)$,由 $k_2\neq 0$ 得

$z=\frac{\sqrt{6}x}{k_2}.$ ②

由①、②式消去 z,得 $\frac{\sqrt{6}x}{k_2}=k_1(y-\sqrt{3}).$

$\because k_1\neq 0,$

∴上式变形得

$y=\frac{\sqrt{6}}{k_1k_2}x+\sqrt{3}.$ ③

③式具有 $y=kx+b$ 的形式,所以 y 是 x 的一次函数.

(2)∵一次函数 $y=\frac{\sqrt{6}}{k_1k_2}x+\sqrt{3}$ 的图像经过点$(-2,3\sqrt{3})$.

$\therefore 3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{6}}{k_1k_2}\cdot(-2)+\sqrt{3}$,解得 $k_1k_2=-\sqrt{2}.$

把 $k_1k_2=-\sqrt{2}$ 代入③式,得过点$(-2,3\sqrt{3})$的一次函数是

$$y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}.$$

当 $x=0$ 时，$y=\sqrt{3}$，即 $B(0,\sqrt{3})$；

当 $y=0$ 时，$x=1$，即 $A(1,0)$.

题 81 已知一个正比例函数和一个一次函数，它们的图像都经过点 $P(-2,1)$，且一次函数的图像在 y 轴上的截距为 3.

(1)求这两个函数的解析式；

(2)在同一坐标系内，分别画出这两个函数的图像；

(3)求这两个函数的图像与 y 轴围成的三角形的面积.

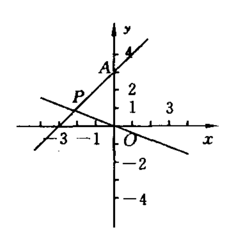


图 12 - 17

解 (1)设正比例函数和一次函数的解析式分别为 $y=k_1x$ 和 $y=k_2x+b$.

由 $y=k_1x$ 过点 $(-2,1)$，得 $1=-2k_1$，$\therefore k_1=-\frac{1}{2}$.

由 $y=k_2x+b$ 过点 $(-2,1)$、$(0,3)$，得 $1=(-2)k_2+3$，$\therefore k_2=1$.

所以正比例函数和一次函数的解析式分别为

$$y=-\frac{1}{2}x \text{ 和 } y=x+3.$$

(2)过 $O(0,0)$，$P(-2,1)$两点画一条直线，即得函数 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图像；

取 $x=0$，$y=3$，经过点 $A(0,3)$和点 $P(-2,1)$画一条直线，即得函数 $y=x+3$ 的图像（如图 12 - 17 所示）.

(3)直线 $y=x+3$ 与 y 轴相交于点 A，则两函数的图像与 y 轴围成的三角形为 $\triangle AOP$. 由图像，得

$$S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\times3\times2=3.$$

题 82 已知一次函数 $y=-x+8$ 和反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$.

(1)k 满足什么条件时，这两个函数在同一直角坐标系中的图像有两个交点；

(2)设(1)中的两个交点为 A、B，试比较$\angle AOB$ 与 90°角的大小.

解 (1)由$\begin{cases}y=-x+8,\\ y=\frac{k}{x}.\end{cases}$

得 $x^2-8x+k=0$.

$\because \Delta=(-8)^2-4k>0$，$k<16$ 时，方程 $x^2-8x+k=0$ 有两个不相等的实数根.

$\therefore$当 $k<16$ 且 $k\neq0$ 时，所给两个函数的图像有两个交点.

(2)$\because y=-x+8$ 的图像经过第一、二、四象限，

$\therefore$当 $0<k<16$ 时，双曲线两分支分别在第一、三象限，这两个函数图像的两个交点 A 和 B 在第一象限.

$\therefore \angle AOB<\angle xOy$,即$\angle AOB<90°$.

当$k<0$时,双曲线两分支分别在第二、四象限,这两个函数图像的两个交点A和B分别在第二、四象限.

$\therefore \angle AOB>\angle xOy$,即$\angle AOB>90°$.

题83 已知点$M(2,2)$、$N(-4,-1)$的坐标能满足一次函数$y=ax+b$和反比例函数$y=\frac{k}{x}$的关系式.

(1)求这两个函数的解析表达式;

(2)求N到M的距离.

解 (1)把$M(2,2)$,$N(-4,-1)$两点坐标代入函数$y=ax+b$中,得

$$\begin{cases}2=2a+b,\\-1=-4a+b.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=1.\end{cases}$$

$\therefore$一次函数的解析式为$y=\frac{1}{2}x+1$.

把$M(2,2)$的坐标代入$y=\frac{k}{x}$,得$2=\frac{k}{2}$,$\therefore k=4$.

$\therefore$反比例函数的解析式为$y=\frac{4}{x}$.

(2)$|MN|=\sqrt{(2+4)^2+(2+1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

题84 已知一次函数的图像经过点$(2,2)$,它与两坐标轴所围成的三角形的面积等于1,求这个一次函数的解析式.

解 设这个一次函数解析式为$y=kx+b$,它与y轴交点为A,与x轴交点为B,则$A(0,b)$,$B\left(-\frac{b}{k},0\right)$.

点$(2,2)$在$y=kx+b$上,则$2k+b=2$,$k=\frac{2-b}{2}$.

又$\triangle ABO$的面积等于1,$\therefore \frac{1}{2}|b|\cdot\left|-\frac{b}{k}\right|=1$,

$\therefore \left|\frac{b^2}{\frac{2-b}{2}}\right|=2$,$b^2=\pm(2-b)$.

当$b^2+b-2=0$时,$b=-2$,$b=1$;当$b^2-b+2=0$时,$\Delta<0$,无解.

$\therefore$当$b=-2$时,$k=2$,$y=2x-2$;当$b=1$时,$k=\frac{1}{2}$,$y=\frac{1}{2}x+1$.

题85 已知函数$y=y_1+y_2$,且$y_1=2x+m$和$y_2=\frac{1}{m-1}x+3$的图像的交点的纵坐标是4.

求:(1)y关于x的函数关系式;

(2)函数y的图像与x轴所夹锐角的余弦值.

解 (1)∵$y_1=2x+m$ 和 $y_2=\frac{1}{m-1}x+3$ 图像的交点的纵坐标是 4，

$$\therefore\begin{cases}4=2x+m,\\ \frac{1}{m-1}x+3=4.\end{cases}$$

消去 x，解得 $m=2$.

$\therefore y_1=2x+2, y_2=x+3$.

$\therefore y=y_1+y_2=(2x+2)+(x+3)=3x+5$.

(2)设 $y=3x+5$ 的图像与 x 轴所夹锐角为 α，此锐角与 $y=3x$ 的图像与 x 轴所夹锐角相同.

在 $y=3x$ 上取一点 $x=1, y=3$，

则点(1,3)与原点距离为 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$.

$\therefore \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

答：y 关于 x 的函数关系式为 $y=3x+5$. 函数 y 的图像与 x 轴所夹锐角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

题 86 如图 12 - 18，已知：$A(1,0)$、$B(0,1)$、$C(-1,0)$，直线 PC 交 y 轴于 D，交直线 AB 于 $P(x,y)$，设△BPD 面积为 y，试用 x 表示△BDP 的面积.

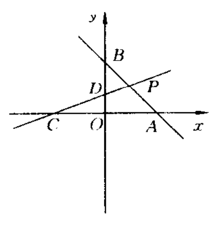


图 12 - 18

解 过 $A(1,0)$、$B(0,1)$ 两点的直线解析式为

$y=-x+1$.

因为点 P 在 AB 上，则 $P(x,-x+1)$.

过 PC 两点的直线解析式为 $y=kx+b$，点 C 在直线上，$-k+b=0$，

$\therefore k=b, y=bx+b, b=\frac{y}{x+1}$.

$\therefore D$ 点坐标为$(0,b)$.

$S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}BD\cdot P_x=\frac{1}{2}(1-b)x$，

$\therefore \frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{x+1}\right)x=y, y=\frac{x^2+x}{3x+2}$.

题 87 已知 $y-(m-3)$ 与 x(m 是常数)成正比例，且 $x=6$ 时，$y=1$，$x=-4$ 时，$y=-4$.

(1)求 y 与 x 之间的函数关系式；

(2)在直角坐标系中，画出这个函数的图像；

(3)求出这个函数的图像与坐标轴的两个交点之间的距离.

解 (1)$\because y-(m-3)$与x成正比例，

$\therefore$可设$y-(m-3)=kx$，即$y=kx+m-3$.

把$x=6,y=1$及$x=-4,y=-4$分别代入上式，并整理，得

$$\begin{cases}6k+m=4,\\-4k+m=-1.\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\m=1.\end{cases}$

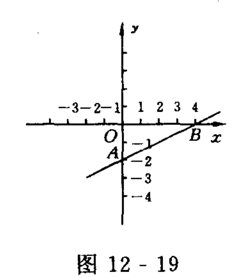


图 12 - 19

故所求函数关系式为$y=\frac{1}{2}x-2$.

(2)取$x=0,y=-2$；取$y=0$，得$\frac{1}{2}x-2=0$，$\therefore x=4$. 经过点$A(0,-2)$与点$B(4,0)$画直线，它就是函数$y=\frac{1}{2}x-2$的图像，如图 12 - 19 所示.

(3)$|AB|=\sqrt{(0-4)^2+(-2)^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}$.

题88 已知正比例函数$y=k_1x$与一次函数$y=k_2x+b$的图像如图 12 - 20 所示，它们的交点A的坐标是$(-3,4)$，且$OB=\frac{3}{5}OA$. 求：

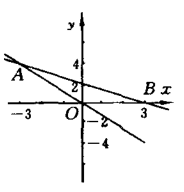


图 12 - 20

(1)正比例函数和一次函数的解析式；

(2)$\triangle AOB$的面积.

解 (1)把$A(-3,4)$的坐标代入$y=k_1x$，得$4=-3k_1$，$\therefore k_1=-\frac{4}{3}$.

$\therefore$正比例函数的解析式为$y=-\frac{4}{3}x$.

$\because OA=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，

$\therefore OB=\frac{3}{5}OA=3$，

$\therefore B$点坐标为$(3,0)$.

把$A(-3,4)$、$B(3,0)$两点坐标代入$y=k_2x+b$中，得

$$\begin{cases}4=-3k_2+b,\\0=3k_2+b.\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases}k_2=-\dfrac{2}{3},\\b=2.\end{cases}$

$\therefore$一次函数的解析式为$y=-\frac{2}{3}x+2$.

(2)$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OB\cdot|y_A|=\frac{1}{2}\times3\times4=6$.

答:一次函数解析式为 $y=-\frac{2}{3}x+2$,△AOB 的面积为 6.

题 89 如图 12-21,Rt△ABC 中,$\angle ACB=90°$,$AC=20$,$BC=15$,M 为 AB 的中点,CM 为中线,P 为 CM 上一点(不与 C、M 重合),设 $CP=x$,试用 x 表示△APB 的面积 y.

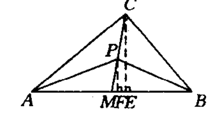


图 12-21

解 $AB=25$,$CM=\frac{25}{2}$.

作 $CE\perp AB$ 于 E,$CE\cdot AB=AC\cdot BC$,

$\therefore CE=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{20\times15}{25}=12$.

过 P 点作 $PF\perp AB$ 于 F,$\frac{CE}{PF}=\frac{CM}{PM}$,

$\therefore \frac{12}{PF}=\frac{\frac{25}{2}}{\frac{25}{2}-x}$,

$\therefore PF=-\frac{24}{25}x+12$.

$\therefore S_{\triangle APB}=\frac{1}{2}AB\cdot PF=\frac{25}{2}\left(-\frac{24}{25}x+12\right)=-12x+150$,$(0<x<\frac{25}{2})$.

题 90 一根弹簧的原长是 12 厘米,它挂的重量不能超过 15 千克,并且每挂重 1 千克就伸长 $\frac{1}{2}$ 厘米.写出挂重后的弹簧长度 y(厘米)与挂重 x(千克)之间的函数关系式,并在坐标系中画出它的图像.

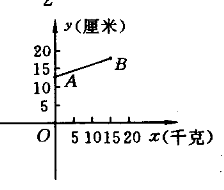


图 12-22

解 根据题意,得 y 与 x 之间的函数关系式为

$$y=\frac{1}{2}x+12 \quad (0\leqslant x\leqslant15).$$

令 $x=0$,$y=12$;令 $x=15$,$y=19.5$,连结 $A(0,12)$、$B(15,19.5)$两点即为函数图像(如图 12-22 所示).

题 91 拖拉机油箱中有油 40 千克,每小时耗油量一定,如果工作 3 小时的剩油量为 25 千克.

(1)从拖拉机开始工作时起,将剩油量 y(千克)表示成工作时间 x(小时)的函数,写出自变量 x 的取值范围,并画出图像;

(2)求当工作时间从 2 到 6(小时)时,剩油量 y(千克)的范围.

解 (1)设每小时耗油量为 k 千克,根据题意,得 $y=40-kx$.

把 $x=3$,$y=25$ 代入上式,得 $25=40-3k$,$\therefore k=5$.

$\therefore y$ 与 x 之间函数关系式为 $y=-5x+40$(或 $y=40-5x$).

自变量取值范围 $0\leqslant x\leqslant8$.

取 $x=0$,得 $y=40$;取 $x=8$,得 $y=0$.连结 $A(0,40)$与 $B(8,0)$所成线段 AB 即为所求

的图像(如图 12 - 23 所示).

(2)当 $x=2$ 时，$y=40-2\times5=30$；当 $x=6$ 时，$y=40-6\times5=10$.

$\therefore$ 当 $2\leqslant x\leqslant6$ 时，$10\leqslant y\leqslant30$.

即工作时间从 2 到 6 小时，剩油量的范围是 $10\leqslant y\leqslant30$.

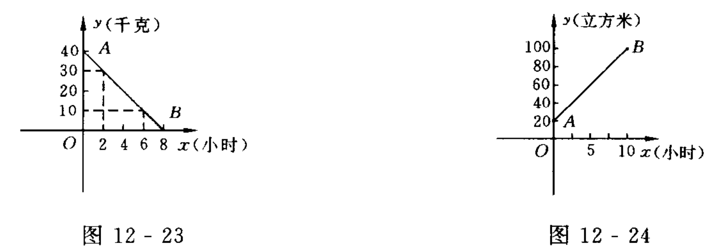


图 12 - 23　　图 12 - 24

题 92 一水池的容积是 100 立方米，现存水 20 立方米，今要灌满水池，已知进水管的流量是每小时 8 立方米. 写出水池的水量 V(立方米)与进水时间 t(小时)之间的函数关系式，并画它的图像.

解 根据题意，得 V 与 t 的函数关系式为

$$V=8t+20.\quad(0\leqslant t\leqslant10)$$

取 $t=0$，得 $V=20$；取 $t=10$，得 $V=100$. 连结 $A(0,20)$、$B(10,100)$两点线段即为所求图像(如图 12 - 24 所示).

题 93 某单位计划组织员工到 H 地旅游，人数估计在 10～25 人之间. 甲、乙两旅行社的服务质量相同，且组织到 H 地旅游的价格都是每人 200 元，该单位联系时，甲旅行社表示可给予每位游客七五折优惠，乙旅行社表示可先免去一位游客的旅游费用，其余游客八折优惠. 问该单位应怎样选择，使其支付的旅游费用较少？

解 设该单位到 H 地旅游人数为 x，$10\leqslant x\leqslant25$，选择甲旅行社时，所需的费用为 y_1 元；选择乙旅行社时，所需的费用为 y_2 元，则有

$y_1=200\times0.75x$，即 $y_1=150x$，

$y_2=200\times0.8(x-1)$，即 $y_2=160x-160$.

(1)若 $y_1=y_2$，解得 $x=16$.

(2)若 $y_2>y_1$，解得 $x>16$.

(3)若 $y_2<y_1$，解得 $x<16$.

所以当人数为 16 人时，选择甲、乙两家旅行社支付的总费用是一样的；当人数在 17～25 人之间时，选择甲旅行社所支付的总费用较少；当人数在 10～15 人之间时，选择乙旅行社所支付的总费用较少.

题 94 如图 12 - 25，直线 $y=-\dfrac{4}{3}x+4$ 与 x 轴交于 A，与 y 轴交于 B，过 $D(2,0)$作直线 $y=-\dfrac{4}{3}x+4$ 的垂线交 AB 于 E，交 y 轴于 C.

求 $S_{\triangle OCE}$.

解 由 $y=-\frac{4}{3}x+4$ 可得 $A(3,0)$、$B(0,4)$.

$\because \angle ODC+\angle OCD=90°, \angle OBE+\angle OCD=90°$,

$\therefore \angle ODC=\angle OBE, \angle DOC=\angle BOA$.

$\therefore \triangle BOA \backsim \triangle DOC, \frac{BO}{AO}=\frac{OD}{OC}$,

$\frac{4}{3}=\frac{2}{OC}, OC=\frac{3}{2}, \therefore C(0,-\frac{3}{2})$.

图 12 - 25

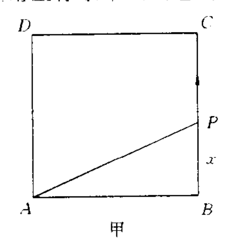
若过 C、D 两点的直线解析式为 $y=kx+b$,

则 $\begin{cases} b=-\frac{3}{2}, \\ 2k+b=0. \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} b=-\frac{3}{2}, \\ k=\frac{3}{4}. \end{cases}$ $\therefore y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$.

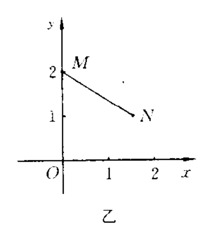
$\therefore \begin{cases} y=-\frac{4}{3}x+4, \\ y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}. \end{cases}$ 则 E 点坐标为 $\left(\frac{66}{25},\frac{12}{25}\right)$.

$\therefore S_{\triangle OCE}=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{66}{25}=\frac{99}{50}$.

题95 如图 12 - 26 甲所示,在边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 的一边 BC 上,有一点 P 从点 B 运动到点 C,设 $PB=x$,图形 $APCD$ 的面积为 y,写出 y 与自变量 x 的函数关系式,并在直角坐标系中画出它的图像.



甲



乙

图 12 - 26

解 $\because$ 正方形 $ABCD$ 的面积等于 $(\sqrt{2})^2=2$,

三角形 ABP 的面积等于 $\frac{1}{2}AB\cdot BP=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,

又 $S_{APCD}=S_{正方形}-S_{\triangle ABP}$,

$\therefore y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2, (0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$.

取 $x=0$，得 $y=2$；取 $x=\sqrt{2}$，得 $y=1$；描出点 $M(0,2)$ 和点 $N(\sqrt{2},1)$，然后连成线段 MN，这条线段就是所求的函数图像，如图 12 - 26 乙所示.

题 96 已知一次函数 $y=ax+b$ 的图像经过点 $A(2,0)$ 与点 $B(0,4)$.

(1)求一次函数的解析式，并在直角坐标系内画出这个函数的图像；

(2)如果(1)中所求函数 y 的值在 $-4\leqslant y\leqslant 4$ 范围内，求相应的 x 值在什么范围内；

(3)设一次函数 $y=mx+n$ 的图像经过第二、三、四象限，且图像与两坐标轴围成的直角三角形中有一个锐角为 30°，若这个直角三角形的面积是 $\triangle AOB$（O 为原点）面积的 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 倍，试求 m 与 n 的值.

解 (1)∵函数 $y=ax+b$ 的图像经过 $A(2,0)$、$B(0,4)$ 两点，

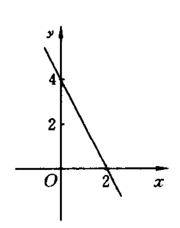


图 12 - 27

$\therefore \begin{cases}0=2a+b,\\4=b.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=4.\end{cases}$

∴函数解析式为 $y=-2x+4$，图像如图 12 - 27 所示.

(2)由 $-4\leqslant y\leqslant 4$，得 $-4\leqslant -2x+4\leqslant 4$.

即 $\begin{cases}-2x+4\geqslant -4,\\-2x+4\leqslant 4.\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x\leqslant 4,\\x\geqslant 0.\end{cases}$

$\therefore 0\leqslant x\leqslant 4$，即自变量 x 的取值范围为 $0\leqslant x\leqslant 4$.

(3)∵ $y=mx+n$ 的图像经过第二、三、四象限，$\therefore m<0, n<0$.

令 $y=0$，得 $x=-\frac{n}{m}$；令 $x=0$，得 $y=n$.

∴直线 $y=mx+n$ 与 x 轴交于 $C(-\frac{n}{m},0)$，与 y 轴交于 $D(0,n)$.

$\because S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$，$\therefore S_{\triangle COD}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\times 4=6\sqrt{3}$.

即 $\frac{1}{2}\left|-\frac{n}{m}\right|\cdot|n|=6\sqrt{3}$，$-\frac{n^2}{m}=12\sqrt{3}$，$\therefore n^2=-12\sqrt{3}m$.

根据题意，$\angle OCD=30°$，或 $\angle ODC=30°$.

当 $\angle OCD=30°$ 时，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，$\mathrm{tg}\angle OCD=\mathrm{tg}30°=\frac{OD}{OC}=\frac{-n}{\frac{n}{m}}=-m$，

$\therefore -m=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

则 $n^2=12$，$n<0$，$n=-2\sqrt{3}$.

$\therefore m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$n=-2\sqrt{3}$.

当 $\angle ODC=30°$ 时，

在 Rt$\triangle OCD$ 中，$\operatorname{tg}\angle ODC=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{CO}{OD}=\frac{\frac{n}{m}}{-n}=-\frac{1}{m}$，

$\therefore -\frac{1}{m}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$m=-\sqrt{3}$.

则 $n^2=36$，$n<0$，$n=-6$，$\therefore m=-\sqrt{3}$，$n=-6$.

题 97 已知，如图 12 - 28 所示，公路上有 A、B、C 三个站，一辆汽车在上午 8 时从离 A 站 10 千米的 P 地出发向 C 站匀速前进，15 分钟后离 A 站 20 千米.

图 12 - 28

(1)设出发 x 小时后，汽车离 A 站 y 千米，写出 y 与 x 之间的函数关系式.

(2)当汽车行驶到离 A 站 150 千米的 B 站时，接到通知要在中午 12 点前赶到 B 站 30 千米的 C 站，汽车若按原速度能否按时到达？若能，是在几点几分到达；若不能，车速最少应提高到多少？

解 (1)汽车匀速前进的速度为$(20-10)\div\frac{15}{60}=40$(千米/小时)，

$\therefore y=40x+10$.

(2)当 $y=150+30=180$ 千米时，$40x+10=180$，解得 $x=4.25$(小时).

而 $8+4.25=12.25$，因此汽车若按原速行驶不能按时到达.

当 $y=150$ 时，$40x+10=150$，解得 $x=3.5$(小时).

设汽车按时到达 C 站，车速最少应提高到每小时 v 千米，依题意$[(12-8)-3.5]v=30$，$\therefore v=60$(千米/小时).

答：车速最少应提高到每小时 60 千米.

题 98 已知：关于 x 的方程 $x^2-2x+k=0$ 有实数根 x_1、x_2，且 $y=x_1^3+x_2^3$，试问：y 值是否有最大值或最小值？若有，试求出其值，若没有，请说明理由.

解 $\because x^2-2x+k=0$ 有实数根，

$\therefore \Delta=2^2-4k\geqslant 0$，$\therefore k\leqslant 1$.

$\because x_1+x_2=2$，$x_1x_2=k$，

$$\begin{aligned}\therefore y&=x_1^3+x_2^3\\&=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_2x_2]\\&=2(4-3k)=8-6k.\end{aligned}$$

即 $y=8-6k$，这是 y 关于 k 的一次函数，y 的值随 k 的增大而减小，所以当 $k=1$ 时，$y=2$ 是最小值.

题 99 如图 12 - 29 所示，已知四边形 $AODB$ 是边长为 2 的正方形，C 为 BD 的中点，以 O 为原点，OA、OD 所在直线为坐标轴建立直角坐标系，使 D、A 分别在 x 轴、y 轴的正半轴上.

(1)求直线 AC 的解析式；

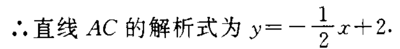
(2)若 $EC\perp AC$ 于 C,交 x 轴于点 E,连结 AE. 求证:$\angle 1=\angle 2$.

图 12 - 29

解 (1)由正方形边长为 2,可得 $A(0,2)$、$C(2,1)$.

设直线 AC 的解析式为 $y=kx+b$.

$\therefore \begin{cases} b=2, \\ 2k+b=1, \end{cases} \begin{cases} b=2, \\ k=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$



$\therefore$直线 AC 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

(2)设 AC 交 x 轴于 F.

$\because \angle BCA=\angle FCD$,$BC=CD$,$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABC\cong \mathrm{Rt}\triangle FDC$.

$\therefore \angle AFO=\angle 2$,$AC=CF$.

又$\because EC\perp AC$,$\therefore AE=EF$,$\therefore \angle 1=\angle AFO$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.

题 100 如图 12 - 30,在直角坐标系 xOy 中,一次函数 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{3}x+\sqrt{2}$ 的图像与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B,点 C 的坐标是(1,0),点 D 在 x 轴上,且$\angle BCD$ 和$\angle ABD$ 是两个相等的钝角,求图像经过 B、D 两点的一次函数的解析式.

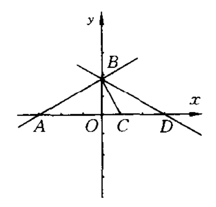


图 12 - 30

解 $\because$点 A、B 是直线与坐标轴的交点,

$\therefore$点 A、B 的坐标分别为$(-3,0)$、$(0,\sqrt{2})$.

$\because$点 C 的坐标是(1,0),$\therefore AC=4$.

$\because$点 D 在 x 轴上,$\angle BCD$ 是钝角,

$\therefore$点 D 在点 C 的右边.

$\because \angle BCD=\angle ABD$,$\angle BDC=\angle ADB$,

$\therefore \triangle BCD\backsim\triangle ABD$,

$\therefore \dfrac{CD}{BD}=\dfrac{BD}{AD}$,$\therefore \dfrac{CD}{BD}=\dfrac{BD}{AC+CD}$,$\therefore BD^2=CD\cdot(4+CD)$.

$\because BD^2=BO^2+OD^2$,$\therefore 2+(1+CD)^2=4\cdot CD+CD^2$,

$\therefore CD=\dfrac{3}{2}$,$\therefore$点 D 的坐标为$(\dfrac{5}{2},0)$,

$\therefore$所求一次函数的解析式为 $y=-\dfrac{2\sqrt{2}}{5}x+\sqrt{2}$.

题 101 如图 12 - 31,在直角坐标系内,$l\perp x$ 轴,垂足为 $M(4,0)$,A 点坐标为$(-2,0)$,过 A 点的直线交 y 轴于 P,交 l 于 N,若梯形 $OMNP$ 的面积为 16,求直线 AN 的解析式.

解 设 P 点坐标为$(0,b)$.

$\because \triangle AOP\backsim\triangle AMN$,

$\therefore \frac{AO}{OP}=\frac{AM}{MN}, \frac{2}{b}=\frac{6}{MN}, MN=3b, \therefore N(4,3b).$

$S_{梯形OMNP}=\frac{1}{2}(|b|+3|b|)\times 4=16, |b|=2.$

$\therefore b=\pm 2.$

$\therefore AN$ 的解析式为 $y=x+2$,(点 P 在 x 轴上方);或 $y=-x-2$,(点 P 在 x 轴下方).

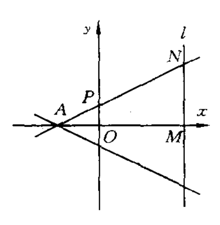
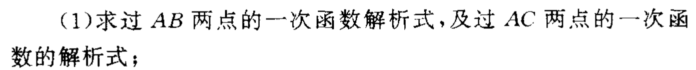


图 12 - 31

题 102　已知,如图 12 - 32 所示,在 y 轴上有一点 $A(0,6)$,在 x 轴上有两点 $B(6,0)$,$C(5,0)$.



(1)求过 AB 两点的一次函数解析式,及过 AC 两点的一次函数的解析式;

(2)有一正比例函数 $y=kx(k>0)$ 与直线 AB 交于 E,与直线 AC 交于 F,若 $\triangle AEF$ 的面积是四边形 $EFCB$ 面积的一半,求正比例函数 $y=kx$ 的解析式,并求 E、F 两点的坐标.

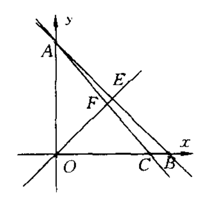


图 12 - 32

解　(1)直线 AB 的解析式为 $y=-x+6$,直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{6}{5}x+6$.

(2)由 $\begin{cases} y=-x+6, \\ y=kx, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\frac{6}{1+k}, \\ y=\frac{6k}{1+k}, \end{cases}$

$\therefore E$ 点坐标为 $(\frac{6}{1+k}, \frac{6k}{1+k})$.

解 $\begin{cases} y=-\frac{6}{5}x+6, \\ y=kx, \end{cases}$ 得 $F(\frac{30}{5k+6}, \frac{30k}{5k+6})$.

$S_{\triangle ACB}=3, S_{\triangle AEF}=1.$

$S_{\triangle AOE}-S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}\times 6\times \frac{6}{1+k}-\frac{1}{2}\times 6\times \frac{30}{5k+6}=1,$

解得 $k=\frac{4}{5}, k=-3$,而 $k>0$,$\therefore k=\frac{4}{5}, y=\frac{4}{5}x$.

$\therefore E(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}), F(3, \frac{12}{5}).$

题 103　已知,如图 12 - 33 所示,$A(1,0)$、$B(0,1)$,直线 OC 交 AB 于 C,若 $\angle COA=\alpha$,$\triangle AOC$ 面积为 S_1,$\triangle BOC$ 面积为 S_2,求证:$\text{tg}\alpha=\frac{S_1}{S_2}$.

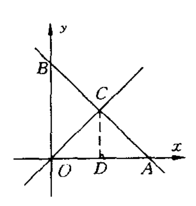


图 12 - 33

解　过 C 作 $CD\perp OA$ 于 D,

则 $\text{tg}\alpha=\frac{CD}{OD}$,又 $S_1=\frac{1}{2}OA\cdot CD, S_2=\frac{1}{2}OB\cdot OD$,且 $OA=OB$

$=1$,

$$\therefore \text{tg}\alpha=\frac{CD}{OD}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot CD}{\frac{1}{2}OB\cdot OD}=\frac{S_1}{S_2}.$$

题 104 已知,如图 12-34 所示,反比例函数 $y=-\frac{8}{x}$ 与一次函数 $y=-x+2$ 的图像交于 A、B 两点.

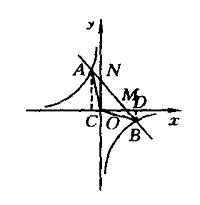


图 12-34

求:(1)A、B 两点的坐标;

(2)$\triangle AOB$ 的面积.

解 (1)由 $\begin{cases}y=-\frac{8}{x},\\ y=-x+2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=-2;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\ y=4.\end{cases}$

$\therefore A(-2,4)$、$B(4,-2)$.

(2)$y=-x+2$,当 $y=0$ 时,$x=2$,$M(2,0)$,

$\therefore OM=2$.

作 $AC\perp x$ 轴于 C,$BD\perp x$ 轴于 D.

$\because AC=4, BD=2$,

$\therefore S_{\triangle OMB}=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot BD=\frac{1}{2}\times2\times2=2$,

$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot AC=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.

$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OMB}+S_{\triangle OAM}=2+4=6$.

题 105 已知,如图 12-35 所示,直线 PA 是一次函数 $y=x+n(n>0)$ 的图像,直线 PB 是一次函数 $y=-2x+m(m>n)$ 的图像.

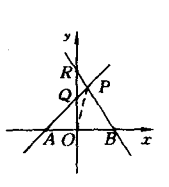


图 12-35

(1)用 m、n 表示出 A、B、P 点的坐标;

(2)若点 Q 是 PA 与 y 轴的交点,且四边形 $PQOB$ 的面积是 $\frac{5}{6}$,$AB=2$,试求 P 点的坐标,并写出直线 PA 与 PB 的解析式.

解 (1)由已知 PA:$y=x+n(n>0)$,则 $y=0$ 时,$x=-n$,

$\therefore A(-n,0)$. 同理 $B(\frac{m}{2},0)$.

$\because P$ 是直线 PA 与 PB 的交点,

$\therefore$ 由解析式 $y=x+n$ 与 $y=-2x+m$ 可求得 $x=\frac{m-n}{3}$,$y=\frac{m+2n}{3}$,即有 $P(\frac{m-n}{3},\frac{m+2n}{3})$.

(2)连结 PO,则有

$S_{\triangle POB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m+2n}{3}=\frac{m^2+2mn}{12}$,

$S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{m-n}{3}=\frac{mn-n^2}{6}$.

由已知 $S_{四边形PQOB}=S_{\triangle POB}+S_{\triangle POQ}=\frac{5}{6}$，$AB=2$，

$\therefore\begin{cases}\frac{m^2+2mn}{12}+\frac{mn-n^2}{6}=\frac{5}{6},\\ \frac{m}{2}+n=2.\end{cases}$ 整理，得 $\begin{cases}m^2+4mn-2n^2=10,\\ m+2n=4.\end{cases}$

解得 $n=\pm1$，但 $n=-1$ 不合要求，舍去，$\therefore n=1,m=2$.

由(1)可得 $P(\frac{1}{3},\frac{4}{3})$，$\therefore PA:y=x+1$，$PB:y=-2x+2$.

题 106　已知，一次函数 $y=mx+4$ 具有性质：y 随 x 的增大而减小，又直线 $y=mx+4$ 分别与直线 $x=1$，$x=4$ 相交于点 A、D，且点 A 在第一象限内，直线 $x=1$，$x=4$ 分别与 x 轴相交于点 B、C，如图 12 - 36 所示.

图 12 - 36

(1)要使四边形 $ABCD$ 为凸四边形，试求 m 的取值范围；

(2)已知四边形 $ABCD$ 为凸四边形，直线 $y=mx+4$ 与 x 轴相交于点 E，当 $\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}$ 时，求这个一次函数的解析式；

(3)在(2)的条件下，设直线 $y=mx+4$ 与 y 轴相交于点 F. 求证：点 D 是 $\triangle EOF$ 的外心.

解　(1)$\because y$ 随 x 的增大而减小，$\therefore m<0$.　①

$\because$ 直线 $y=mx+4$ 与直线 $x=1$，$x=4$ 分别相交于点 A、D，

$\therefore$ 解方程组 $\begin{cases}y=mx+4,\\ x=1;\end{cases}$ $\begin{cases}y=mx+4,\\ x=4.\end{cases}$

$\therefore A(1,m+4)$，$D(4,4m+4)$.

$\because A$ 在第一象限内，$\therefore m+4>0$，$m>-4$.　②

$\because ABCD$ 为凸四边形，$\therefore$ 点 D 在第一象限内，

$\therefore 4m+4>0$，$m>-1$.　③

由①、②、③得 m 的取值范围是 $-1<m<0$.

(2)$\because$ 四边形 $ABCD$ 为凸四边形，

$\therefore m+4>0$，$4m+4>0$，$AB=m+4$，$DC=4m+4$.

$\because AB\perp Ox$，$DC\perp Ox$，$\therefore AB/\!/DC$，$\therefore\frac{DC}{AB}=\frac{ED}{EA}$，

又 $\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}$，$\therefore\frac{4m+4}{m+4}=\frac{4}{7}$，解得 $m=-\frac{1}{2}$.

此时一次函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.　④

(3)由④可得此直线与 x 轴、y 轴的交点坐标为 $E(8,0)$、$F(0,4)$.

∵点 $C(4,0)$，∴$OC=EC$，∴点 C 是线段 OE 的中点.
在 Rt△EOF 中，$DC/\!/OF$，∴D 为 FE 的中点，
∴点 D 是 Rt△EOF 的外心.

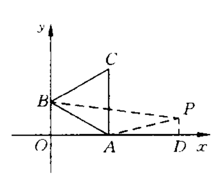


图 12 - 37

题 107　已知，如图 12 - 37 所示，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 和 x 轴、y 轴分别交于点 A、点 B，以线段 AB 为边在第一象限内作等边三角形 ABC，如果在第一象限内有一点 $P(m,\frac{1}{2})$，且△ABP 的面积与△ABC 的面积相等，求 m 的值.

解　∵直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 A、点 B，

∴取 $x=0$，得 $y=1$；取 $y=0$，得 $x=\sqrt{3}$.
∴点 A、点 B 的坐标分别为 $A(\sqrt{3},0)$、$B(0,1)$.
∴$OA=\sqrt{3}$，$OB=1$.
在 Rt△ABO 中，由勾股定理，得 $AB=\sqrt{AO^2+OB^2}=2$.
∵△ABC 为等边三角形，∴$AB=AC=2$，$\angle BAC=60°$.
∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin60°=\frac{1}{2}\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.
∵$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}$，∴$S_{\triangle ABP}=\sqrt{3}$.
作 $PD\perp Ox$ 于 D，∴$DP/\!/Oy$，∴四边形 $BODP$ 为直角梯形.
令 $OD=m$，则 $AD=OD-OA=m-\sqrt{3}$，
∴$S_{梯形BODP}=\frac{1}{2}(OB+DP)\cdot OD=\frac{1}{2}\times(1+\frac{1}{2})m=\frac{3}{4}m$.
∵$S_{梯形BODP}=S_{\triangle BOA}+S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APD}$，
∴$\frac{3}{4}m=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times(m-\sqrt{3})\times\frac{1}{2}$，
解得 $m=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

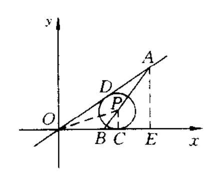


图 12 - 38

题 108　已知，直线 $y=2x-10$ 与直线 $y=\frac{3}{4}x$ 交于点 A，与 x 轴交于点 B. ⊙P 的圆心点 P 在直线 $y=2x-10$ 上，并且⊙P 与直线 $y=\frac{3}{4}x$ 相切于 D，与 x 轴的正方向切于点 C.
求：(1)$\angle ABC$ 的正弦、余弦值；
(2)△ABO 的面积；
(3)⊙P 的圆心点 P 的坐标和⊙P 的面积.

解 (1)$\begin{cases} y=2x-10, \\ y=\dfrac{3}{4}x, \end{cases}$ 解得 $x=8,y=6$，∴点 A 的坐标为$(8,6)$.

在 $y=2x-10$ 中，令 $y=0,x=5$，则点 B 的坐标为$(5,0)$.

∴$BE=3,AE=6$，则 $AB=3\sqrt{5}$.

$$\therefore \sin ABC=\frac{AE}{AB}=\frac{6}{3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos ABC=\frac{BE}{AB}=\frac{3}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(2)$\triangle ABO$ 的面积为$\frac{1}{2}\times OB\times AE=\frac{1}{2}\times 5\times 6=15$.

(3)若$\odot P$ 的半径为 r，连结 OP，且由 $A(8,6)$可得 $OA=10$，

∵$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle BOP}$，

∴$15=\frac{1}{2}r\cdot OA+\frac{1}{2}r\cdot OB$，$15=\frac{1}{2}r\times 10+\frac{1}{2}r\times 5$，∴$r=2$.

P 在直线 $y=2x-10$ 上，∴$2=2x-10$，$x=6$.

点 P 坐标为$(6,2)$，$\odot P$ 的面积为 4π.

题 109 已知直角坐标系内有一条直线和一条曲线，这条直线和 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B，且 $OA=OB=1$，这条曲线是函数 $y=\frac{1}{2x}$的图像在第一象限内的一个分支，点 P 是这条曲线上任意一点，它的坐标是(a,b)，由点 P 向 x 轴、y 轴所作的垂线 PM、PN(点 M、N 为垂足)，分别与直线 AB 相交于点 E 和点 F.

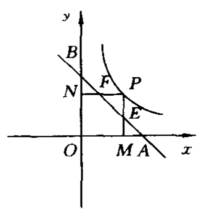


图 12-39

(1)设交点 E、F 都在线段 AB 上，分别求出 E、F 的坐标；

(2)求$\triangle OEF$ 的面积(用 a、b 的代数式表示)；

(3)$\triangle AOF$ 与$\triangle BOE$ 是否一定相似，如果一定相似，请予以证明；如果不一定相似或者一定不相似，请简要说明理由.

(4)当点 P 在曲线上移动时，$\triangle OEF$ 随之变动，指出在$\triangle OEF$ 的三个内角中，大小始终保持不变的那个角的大小，并证明你的结论.

解 (1)直线 AB：$y=-x+1$.

点 E 的横坐标为 a，则 $E(a,1-a)$；点 F 的纵坐标为 b，则 $F(1-b,b)$.

(2)当 PM、PN 与线段 A、B 都相交时，

$$\begin{aligned} S_{\triangle EOF}&=S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AOE}-S_{\triangle BOF} \\ &=\frac{1}{2}\times 1\times 1-\frac{1}{2}\times 1\times(1-a)-\frac{1}{2}\times 1\times(1-b) \\ &=\frac{a+b-1}{2}. \end{aligned}$$

当 PM、PN 中一条与线段 AB 相交，另一条与线段 AB 的延长线相交时，

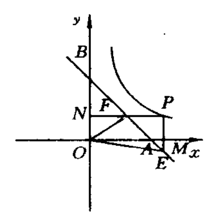
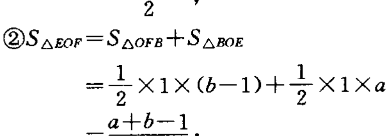


图 12 - 40

① $S_{\triangle EOF}=S_{\triangle FOA}+S_{\triangle AOE}$

$=\frac{1}{2}\times1\times b+\frac{1}{2}\times1\times(a-1)$

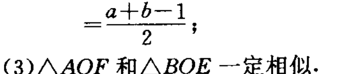
$=\frac{a+b-1}{2}$；



② $S_{\triangle EOF}=S_{\triangle OFB}+S_{\triangle BOE}$

$=\frac{1}{2}\times1\times(b-1)+\frac{1}{2}\times1\times a$

$=\frac{a+b-1}{2}$；



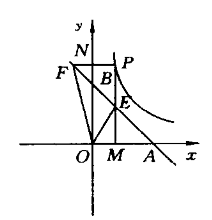


图 12 - 41

(3) $\triangle AOF$ 和 $\triangle BOE$ 一定相似.

$\because OA=OB=1$，$\angle OAF=\angle EBO$，

$BE=\sqrt{(0-a)^2+(1-1+a)^2}=\sqrt{2}a$，

$AF=\sqrt{(1-1+b)^2+(0-b)^2}=\sqrt{2}b$，

而 P 是 $y=\frac{1}{2x}$ 上一点，$\therefore b=\frac{1}{2a}$，$2ab=1$.

$\therefore \sqrt{2}a\cdot\sqrt{2}b=1\times1$，$\therefore \frac{AF}{OB}=\frac{OA}{BE}$，$\therefore \triangle AOF\backsim\triangle BEO$.



(4) $\angle EOF=45°$.

$\because \triangle AOF\backsim\triangle BEO$，$\therefore \angle AFO=\angle BOE$，$\angle AFO=\angle B+\angle BOF$，

$\angle BOE=\angle BOF+\angle EOF$，$\therefore \angle EOF=\angle B=45°$.

四、二次函数及最大、最小值

题 110 什么是二次函数？二次函数有哪些主要性质？

解 (1)函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 叫作二次函数；自变量 x 的取值范围是全体实数；其图像是以 $x=-\frac{b}{2a}$ 为对称轴，以 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 为顶点的抛物线；其性质是：① 当 $a>0$ 时，开口向上，最低点是顶点，此时函数有最小值；② 当 $a<0$ 时，开口向下，最高点是顶点，此时函数有最大值.

(2)二次函数有三种形式：

①一般式 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$；

② 顶点式 $y=a(x-h)^2+k$；

③两点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

(3)抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$,当 $b^2-4ac>0$ 时,它与 x 轴有两个不同交点为 $(x_1,0)$和$(x_2,0)$,其中 x_1,x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根;当$b^2=4ac$时,它与 x 轴只有一个交点$(-\frac{b}{2a},0)$;当 $b^2-4ac<0$ 时,,它与 x 轴没有交点.

(4)形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的抛物线顶点是(h,k),对称轴是直线 $x=h$. 此形式可以通过二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的配方得到.

(5)用描点法作二次函数的图像时,应先求出顶点的坐标,列表时把顶点坐标写在中间,两边可等间隔地取自变量的值和算出对应的函数值,必要时,还要求出图像与坐标轴的交点,这样可使图像画得较精确完整.

题 111 对称轴平行于 y 轴的抛物线的顶点为点(2,3),且抛物线经过点(3,1),那么这条抛物线的解析式是(　　).

A. $y=-2x^2+8x+3$　　B. $y=-2x^2-8x+3$

C. $y=-2x^2+8x-5$　　D. $y=-2x^2-8x-5$

解 设函数解析式为 $y=a(x-2)^2+3$,又∵过点(3,1),

∴$1=a(3-2)^2+3$,∴$a=-2$.

∴解析式为 $y=-2(x-2)^2+3=-2x^2+8x-5$. 故选择 C.

题 112 如果抛物线的顶点坐标是(3,−1),在 y 轴上的截距是−4,则它的解析式是(　　).

A. $y=\frac{1}{3}x^2-2x-4$　　B. $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-4$

C. $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2-1$　　D. $y=-x^2+6x-12$

解 设解析式为 $y=a(x-3)^2-1$,又在 y 轴截距是−4,即过(0,−4)点,

∴$-4=a(0-3)^2-1$,　∴$a=-\frac{1}{3}$.

∴函数解析式为 $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-1=-\frac{1}{3}x^2+2x-4$. 故选择 B.

题 113 函数 $y=-2(x-1)^2-1$ 的图像可由函数 $y=-2(x+2)^2+3$ 的图像平移得到,那么平移的步骤是(　　).

A. 右移三个单位,下移四个单位

B. 右移三个单位,上移四个单位

C. 左移三个单位,下移四个单位

D. 左移四个单位

解 根据题意,得 $2+a=-1,3+b=-1$. 解得 $a=-3,b=-4$.

∴应该是右移三个单位,下移四个单位. 故选择 A.

题 114 若将抛物线 $y=2x^2-4x-5$ 向左又向上都平移 4 个单位，则新图像的函数解析式是(　　).

A. $y=2(x+3)^2-11$　　B. $y=2(x+3)^2-3$

C. $y=2(x-5)^2-11$　　D. $y=2(x-5)^2-3$

解 $y=2x^2-4x-5=2(x^2-2x)-5=2(x^2-2x+1)-2-5$

$=2(x-1)^2-7.$

∴移动后解析式为 $y=2(x-1+4)^2-7+4=2(x+3)^2-3$. 故选择 B.

题 115 把二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{1}{2}$ 的图像向上平移 3 个单位，再向右平移 4 个单位，则两次平移后的图像的解析式是(　　).

A. $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+7$　　B. $y=-\frac{1}{2}(x+7)^2+7$

C. $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+4$　　D. $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

解 将函数变为顶点式 $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+4$. 根据题意，移动后解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x+3-4)^2+4+3=y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+7$. 故选择 A.

题 116 抛物线 $y=x^2-bx+8$ 的顶点在 x 轴上，则 b 值一定为(　　).

A. $4\sqrt{2}$　　B. $-4\sqrt{2}$

C. $2\sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{2}$ 或 $-4\sqrt{2}$

解 $y=x^2-bx+8=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+8-\frac{b^2}{4}$，∴顶点为 $\left(\frac{b}{2},8-\frac{b^2}{4}\right)$.

∵顶点在 x 轴上，∴$8-\frac{b^2}{4}=0$，∴$b=\pm4\sqrt{2}$. 故选择 D.

题 117 抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ 的顶点在 x 轴上方的条件是(　　).

A. $b^2-4ac<0$　　B. $b^2-4ac>0$　　C. $b^2-4ac\geqslant0$　　D. $c<0$

解 ∵$a>0$，∴抛物线开口向上. 若顶点在 x 轴上方，即抛物线与 x 轴没有交点，∴$\Delta=b^2-4ac<0$.

故选择 A.

题 118 抛物线 $y=-2x^2-x+1$ 的顶点在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

解 ∵$-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times(-2)}=-\frac{1}{4}$，

$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-2)\times1-(-1)^2}{4\times(-2)}=\frac{-9}{-8}=\frac{9}{8}$，

∴顶点为 $\left(-\frac{1}{4},\frac{9}{8}\right)$. 而 $-\frac{1}{4}<0,\frac{9}{8}>0$，∴顶点在第二象限. 故选择 B.

题 119 设 $ab<0$，且 $\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2>c$，则函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的顶点一定位于(　　).

A. 第一象限　　B. 第四象限　　C. 第一或第四象限　　D. 无法确定

解 $\because ab<0$，$\therefore a$、b 异号，$\therefore \frac{b}{2a}<0$，$\therefore -\frac{b}{2a}>0$；

由 $\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2>c$，得 $\frac{b^2}{4a}-c>0$，即 $\frac{4ac-b^2}{4a}<0$，而顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. $\therefore$ 顶点在第四象限. 故选择 B.

题 120 抛物线 $y=x^2-2mx+(m+2)$ 的顶点坐标在第三象限，则 m 的取值范围为(　　).

A. $m<-1$ 或 $m>2$　　B. $m<0$ 或 $m>-1$

C. $-1<m<0$　　D. $m<-1$

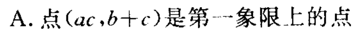
解 $y=x^2-2mx+(m+2)=(x-m)^2+m+2-m^2$，

$\therefore$ 顶点为 $(m,-m^2+m+2)$.

$\because$ 顶点在第三象限，$\therefore m<0$，且 $-m^2+m+2<0$，解得 $m<-1$.

故选择 D.

题 121 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像如图 12 - 42 所示，则下列结论中正确的是(　　).



A. 点 $(ac,b+c)$ 是第一象限上的点

B. 点 $(a+b,ab)$ 是第一象限点

C. 点 $(a+b,ac)$ 是第一象限的点

D. 点 $(ab,-b+c)$ 是第一象限的点

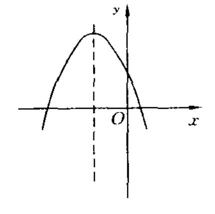


图 12 - 42

解 $\because$ 抛物线开口向下，$\therefore a<0$；

又 $-\frac{b}{2a}<0$，$\therefore b<0$；

由图像与 y 轴交点在 x 轴上方知 $c>0$.

$\therefore ab>0$，$-b+c>0$，即点 $(ab,-b+c)$ 在第一象限. 故选择 D.

题 122 二次函数 (1) $y=3x^2$；(2) $y=\frac{2}{3}x^2$；(3) $y=\frac{4}{3}x^2$ 的图像的开口大小顺序应为(　　).

A. (1)>(2)>(3)　　B. (1)>(3)>(2)

C. (2)>(3)>(1)　　D. (2)>(1)>(3)

解 抛物线开口大小，只与 $|a|$ 的大小有关，$|a|$ 的值越小，开口越大；$|a|$ 的值越大，开口越小. 这里 $3>\frac{4}{3}>\frac{2}{3}$，$\therefore$ (2) 的开口最大，(1) 最小. 故选择 C.

题 123 在同一个坐标系内，函数 $y=ax^2+b$ 与 $y=ax+b$ $(ab\neq 0)$ 的图像大致是(　　).

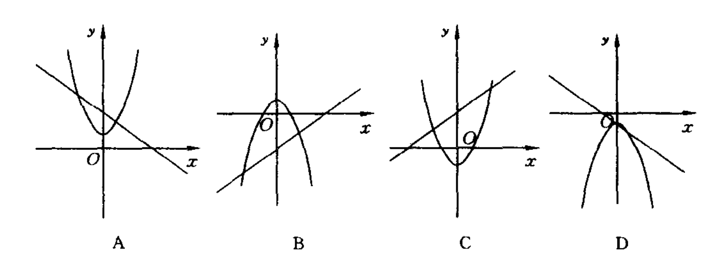


图 12 - 43

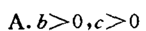
解 $\because ab \neq 0$，$\therefore a \neq 0, b \neq 0$.

(1)$a>0$ 时，抛物线开口向上，对一次函数来说 y 随 x 的增大而增大，$\therefore$A 不可能.

(2)$a<0$ 时，抛物线开口向下，对一次函数来说随 x 的增大而减小，$\therefore$B 不可能.

又由解析式 $y=ax^2+b$ 与 $y=ax+b$ 知，与 y 轴交点相同，$\therefore$C 不可能.

故选择 D.

 如果二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$的图像如图 12 - 44 所示，那么(　　).

A. $b>0, c>0$　　B. $b>0, c<0$

C. $b<0, c>0$　　D. $b<0, c<0$

图 12 - 44

解 $\because -\frac{b}{2a}>0$，而 $a<0$，$\therefore b>0$；

由抛物线与 y 轴交点在 x 轴上方知 $c>0$. 故选择 A.

题 125 如图 12 - 45 所示，满足 $a<0$、$b>0$ 的函数 $y=ax^2+bx$ 的图像是(　　).

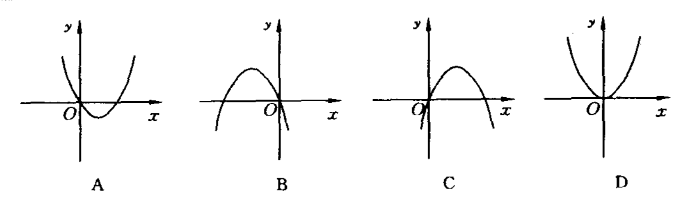


图 12 - 45

解 $\because a<0$，$\therefore$抛物线开口应向下，A、D 不可能，又$\because b>0$，$\therefore -\frac{b}{2a}>0$，$\therefore$对称轴应在 y 轴右侧，$\therefore$B 不可能. 故选择 C.

题 126 如图 12 - 46 所示，函数 $y=ax^2+c$ 与函数 $y=\frac{ac}{x}$ $(ac \neq 0)$在同一坐标系中的大致图象是(　　).

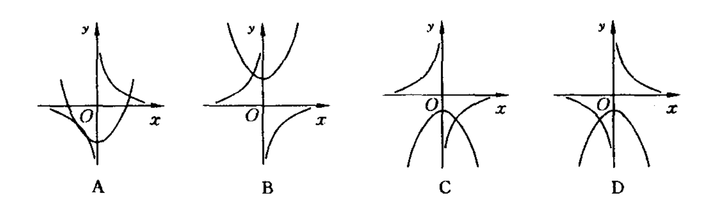


图 12 - 46

解　$\because ac\neq0$，$\therefore$有 $ac>0$ 和 $ac<0$ 两种情况. 当 $ac>0$ 时：

(1)$a>0$，$c>0$ 时，开口向上且抛物线与 y 轴交点在 x 轴上方，$\therefore$A 不可能；对于 $y=\frac{ac}{x}$ 的两个分支位于一、三象限，$\therefore$B 不可能；

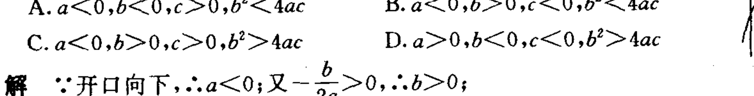
(2)$a<0$，$c<0$ 时，开口向下，且抛物线与 y 轴交点在 x 轴下方，对于反比例函数 $y=\frac{ac}{x}$ 的图像位于一、三象限，$\therefore$C 不可能.

当 $ac<0$ 时，各种情况都不可能. 故选择 D.

题 127　图 12 - 47 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的图像，则完全符合条件的是下列的(　　).



A. $a<0,b<0,c>0,b^2<4ac$　　B. $a<0,b>0,c<0,b^2<4ac$



C. $a<0,b>0,c>0,b^2>4ac$　　D. $a>0,b<0,c<0,b^2>4ac$

解　$\because$开口向下，$\therefore a<0$；又 $-\frac{b}{2a}>0$，$\therefore b>0$；

$\because$抛物线与 y 轴交点在 y 轴负半轴上，$\therefore c<0$，

又$\because$抛物线与 x 轴没有交点，

$\therefore b^2-4ac<0$，即 $b^2<4ac$. 故选择 B.

图 12 - 47

题 128　抛物线 $y=ax^2-bx+c$ 的顶点 P 是直线 $x=0$ 与 $y=0$ 的交点，则 a、b、c 的取值分别为(　　).

A. $a\neq0,b=0,c=0$　　B. $a\neq0,b\neq0,c=0$

C. $a\neq0,b=0,c\neq0$　　D. $a=0,b\neq0,c\neq0$

解　$\because$抛物线的顶点 P 为 $\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，而 P 是 $x=0$ 与 $y=0$ 的交点，

$\therefore -\frac{b}{2a}=0$ 且 $\frac{4ac-b^2}{4a}=0$，$\therefore b=0$ 且 $c=0$，而 $a\neq0$. 故选择 A.

题 129　在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=2x+3$ 相交于两点 A、B，已知点 A 的坐标是$(-1,1)$，则点 B 坐标为(　　).

A. $(1,5)$　　B. $(3,9)$

C. $(-3,-3)$　　D. $(-1,1)$

解 ∵抛物线 $y=ax^2$ 过 $A(-1,1)$点，

∴$1=a(-1)^2$，∴$a=1$. ∴$y=x^2$.

∴有$\begin{cases}y=x^2,\\y=2x+3.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=1;\end{cases}$$\begin{cases}x_2=3,\\y_2=9.\end{cases}$

∴B 点坐标为(3,9). 故选择 B.

题 130 若对任何实数 x，二次函数 $y=(m-1)x^2$ 的值总是非正数，则 m 的取值范围是(　　).

A. $m\leqslant1$　　B. $m\geqslant1$　　C. $m<1$　　D. $m>1$

解 根据题意，得

$\begin{cases}m-1\neq0,\\m-1\leqslant0.\end{cases}$ 解得 $m<1$. 故选择 C.

题 131 抛物线 $y=x^2-x+1$ 与 x 轴的交点个数是(　　).

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无法确定

解 ∵$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=1-4=-3<0$，∴与 x 轴没有交点.

故选择 A.

题 132 直线 $y=3x-3$ 与抛物线 $y=x^2-x+1$ 的交点的个数是(　　).

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 无法确定

解 把 $y=3x-3$ 代入 $y=x^2-x+1$ 中，整理后得：$x^2-4x+4=0$.

这里 $\Delta=(-4)^2-4\times1\times4=16-16=0$. ∴直线与抛物线只有一个交点. 故选择 B.

题 133 如图 12 - 48，二次函数 $y=ax^2+bx+c$，若 $a>0$，$\Delta=0$ 时，则它的图像大致是(　　).

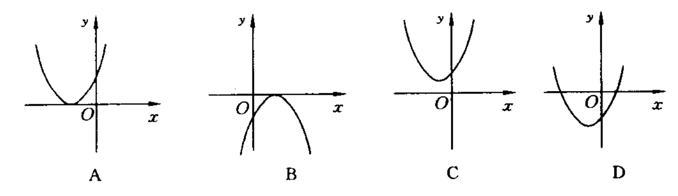
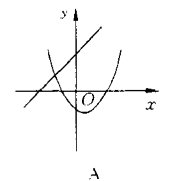


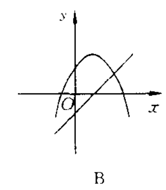
图 12 - 48

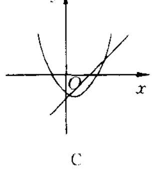
解 ∵$a>0$，∴抛物线开口向上，又 $\Delta=0$，∴与 x 轴只有一个交点. 故选择 A.

题 134 如图 12 - 49，当 $b<0$ 时，一次函数 $y=ax+b$ 和二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 在同一坐标系中的图像大致是(　　).

解 ∵$b<0$，∴直线与 y 轴的交点在原点的下方，故可排除 A 和 D；在 B 和 C 中，直线 $y=ax+b$ 的 $a>0$，C 中二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 $a>0$. 故选择 C.


A


B


C

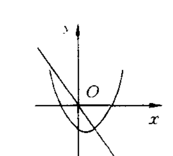

D

图 12 - 49

题 135 当 $m<-1$ 时，二次函数 $y=mx^2+2x-1$ 的图像(　　).

A. 与 x 轴有两个交点　　　　B. 与 x 轴只有一个交点

C. 在 x 轴上方　　　　　　　D. 在 x 轴的下方

解 $\Delta=4+4m$，当 $m<-1$ 时，$\Delta<0$，∴开口向下，与 x 轴无交点.

故选择 D.

题 136 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过 $A(-3,0)$、$B(1,0)$、$C(0,-3)$三点.

(1)求这个二次函数的解析式；

(2)求这个二次函数的顶点坐标和对称轴.

解 (1)把 $A(-3,0)$、$B(1,0)$、$C(0,-3)$三点的坐标分别代入 $y=ax^2+bx+c$ 中，得

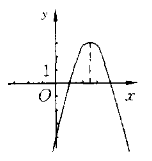
$$\begin{cases}9a-3b+c=0,\\ a+b+c=0,\\ c=-3.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=1,\\ b=2,\\ c=-3.\end{cases}$$

∴二次函数的解析式为 $y=x^2+2x-3$.

(2)$y=x^2+2x-3=(x^2+2x+1)-1-3=(x+1)^2-4$.

∴二次函数的顶点是$(-1,-4)$，对称轴是 $x=-1$.

题 137 已知二次函数的图像过点$(4,0)$、$(1,0)$和$(0,-4)$，求这个函数的解析式，并在坐标系中画出图像(草图).


图 12 - 50

解 设解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

∵图像过点$(4,0)$、$(1,0)$和$(0,-4)$，

$$\therefore\begin{cases}16a+4b+c=0,\\ a+b+c=0,\\ c=-4.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-1,\\ b=5,\\ c=-4.\end{cases}$$

∴所求二次函数的解析式为 $y=-x^2+5x-4$.

图像如图 12 - 50 所示.

题 138 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过一次函数 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 的图像与 x 轴、y 轴的交点，并且经过点$(1,1)$. 求这个二次函数的解析式，并把解析式化成 $y=a$

$(x+h)^2+k$ 的形式.

解 由 $y=-\frac{3}{2}x+3$,取 $x=0$,得 $y=3$;取 $y=0$,得 $x=2$.

∴二次函数的图像经过(0,3)、(2,0)、(1,1)三点.

$$\therefore\begin{cases}c=3,\\4a+2b+c=0,\\a+b+c=1.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-\frac{5}{2},\\c=3.\end{cases}$$

∴二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$,即 $y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$.

题 139 已知关于 x 的二次函数,$x=-1$ 时函数值是 1,且它的图像经过点 $A(1,-1)$、$B(0,1)$两点,求这个二次函数的表达式,并写出函数图像的顶点坐标和对称轴.

解 设这个二次函数为 $y=ax^2+bx+c$,则由已知得:

$$\begin{cases}a-b+c=1,\\a+b+c=-1,\\c=1.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=-1,\\b=-1,\\c=1.\end{cases}$$

∴所求二次函数为 $y=-x^2-x+1$.

此时 $-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times(-1)}=-\frac{1}{2}$;$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\times(-1)\times1-(-1)^2}{4\times(-1)}=\frac{5}{4}$.

∴函数图像的顶点为$\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right)$,对称轴是 $x=-\frac{1}{2}$.

题 140 对称轴是 $x=-1$ 的抛物线过点 $A(1,4)$、$B(-2,1)$,求这条抛物线.

解 设此抛物线为 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$,

∵此抛物线的对称轴为 $x=-1$,且过点 $A(1,4)$、$B(-2,1)$,

$$\therefore\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-1,\\a+b+c=4,\\4a-2b+c=1.\end{cases}\quad 解这个方程组,得\begin{cases}a=1,\\b=2,\\c=1.\end{cases}$$

∴所求抛物线为 $y=x^2+2x+1$.

题 141 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$的顶点坐标为(4,2),点(2,0)在该抛物线上,求这条抛物线.

解 根据题意,得

$$\begin{cases}-\frac{b}{2a}=4,\\\frac{4ac-b^2}{4a}=2,\\4a+2b+c=0.\end{cases}\quad 解这个方程组,得\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=4,\\c=-6.\end{cases}$$

从而所求抛物线为 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-6$.

题 142 已知：如图 12-51，Rt△OAB 的斜边 OA 在 x 轴正半轴上，直角顶点 B 在第一象限，$OA=5$，$OB=\sqrt{5}$．(1)求 A、B 两点的坐标；(2)求经过 O、A、B 三点且对称轴平行于 y 轴的抛物线的解析式，并确定抛物线顶点的坐标．

图 12-51

解 (1)∵OA 在 x 轴正半轴上，且 $OA=5$，∴A 点坐标为 $(5,0)$．

过 B 作 $BD\perp OA$ 于 D，则△BOD∽△AOB，

$\therefore \frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OB}$，$\therefore OD=\frac{OB^2}{OA}=\frac{(\sqrt{5})^2}{5}=1$．

在 Rt△ODB 中，由勾股定理，得 $BD=\sqrt{OB^2-OD^2}=2$．

∴B 点坐标为 $(1,2)$．

(2)因为抛物线经过 $O(0,0)$、$A(5,0)$ 两点，

∴可设其解析式为 $y=ax(x-5)$．

又∵抛物线过点 $B(1,2)$，

$\therefore 2=a(1-5)\times 1$，$\therefore a=-\frac{1}{2}$．

故所求抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{2}x(x-5)$，

即 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x$．

配方得 $y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{8}$，

∴抛物线顶点坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{25}{8}\right)$．

题 143 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=-1$，与 x 轴交于 A、B，顶点为 M，且 $S_{\triangle AMB}=2\sqrt{2}$，求抛物线的解析式．

解 ∵$AB=\sqrt{b^2-4c}$，M 点的纵坐标为 $\frac{4c-b^2}{4}$，

$$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\cdot\left|\frac{4c-b^2}{4}\right|=2\sqrt{2} \qquad ①$$

又抛物线的对称轴为 $x=-1$，

$$\therefore -\frac{b}{2}=-1. \qquad ②$$

由②，得 $b=2$．

代入①，得 $\frac{1}{2}\sqrt{4-4c}\cdot\left|\frac{4c-4}{4}\right|=2\sqrt{2}$，

$\sqrt{1-c}\cdot|c-1|=2\sqrt{2}$，$(1-c)(c-1)^2=8$，

$\therefore 1-c=2$，$c=-1$．

则二次函数的解析式为 $y=x^2+2x-1$.

题 144 已知:抛物线 $y=x^2+(m-4)x-m$ 与 x 轴的两个交点 A、B 关于 y 轴对称.求:

(1)这条抛物线; (2)A、B 两点间距离.

解 (1)∵抛物线 $y=x^2+(m-4)x-m$ 关于 y 轴对称,

∴$m-4=0$, ∴$m=4$.

∴抛物线为 $y=x^2-4$.

(2)当 $y=0$ 时,即 $x^2-4=0$, ∴$x=\pm 2$,

∴$|AB|=|2-(-2)|=4$.

答:抛物线为 $y=x^2-4$,A、B 两点间的距离为 4.

题 145 已知抛物线 $y=x^2-2ax+2a+b$ 在 x 轴上截得的线段长为 3,并且此抛物线顶点的坐标满足二次函数关系式 $y=-x^2$.求 a、b 的值.

解 设抛物线 $y=x^2-2ax+2a+b$ 与 x 轴两交点的横坐标分别为 x_1、x_2.则

$$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$
$$=\sqrt{(2a)^2-4(2a+b)}=3.$$

∴$4a^2-8a-4b=9$. ①

由抛物线 $y=x^2-2ax+2a+b=(x-a)^2-a^2+2a+b$ 知,顶点为$(a,2a+b-a^2)$,所以 $2a+b-a^2=-a^2$,

∴$2a+b=0$. ②

解由①、②组成的方程组,得

$$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2},\\ b=-3;\end{cases} \text{或} \begin{cases}a=-\dfrac{3}{2},\\ b=3.\end{cases}$$

答:a、b 的值分别为$\dfrac{3}{2}$,-3 或$-\dfrac{3}{2}$,3.

题 146 已知:抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点在第一象限,顶点的横坐标是纵坐标的 2 倍,对称轴与 x 轴的交点在一次函数 $y=x-c$ 的图像上,求 b、c 的值.

解 抛物线的顶点是$\left(-\dfrac{b}{2},\dfrac{4c-b^2}{4}\right)$,

抛物线的对称轴与 x 轴的交点是$\left(-\dfrac{b}{2},0\right)$.

∵抛物线的顶点的横坐标是纵坐标的 2 倍,

∴$-\dfrac{b}{2}=2\cdot\dfrac{4c-b^2}{4}$.

∵一次函数 $y=x-c$ 的图像过$\left(-\dfrac{b}{2},0\right)$,

$\therefore 0=-\frac{b}{2}-c$.

解方程组$\begin{cases}-\frac{b}{2}=2\cdot\frac{4c-b^2}{4},\\0=-\frac{b}{2}-c.\end{cases}$

得$\begin{cases}b=-1,\\c=\frac{1}{2}.\end{cases}$ $\begin{cases}b=0,\\c=0;\end{cases}$(不合题意,舍去).

$\therefore b=-1, c=\frac{1}{2}$.

题 147 已知抛物线 $y_1=-2x^2+4px+q$ 的顶点坐标为 $M(2,3)$.

(1)求 p、q 的值;

(2)若有一点 $A(3,1)$,经过点 M、A 的直线为 $y_2=kx+b$. 求使 $y_1\leqslant y_2$ 的 x 的取值范围.

解 (1)根据题意,得

$$\begin{cases}-\frac{4p}{2\cdot(-2)}=2,\\\frac{4\cdot(-2)\cdot q-(4p)^2}{4\cdot(-2)}=3.\end{cases}$$

解这个方程组得$\begin{cases}p=2,\\q=-5.\end{cases}$

(2)根据题意,将 $M(2,3)$、$A(3,1)$代入 y_2 中,得

$\begin{cases}2k+b=3,\\3k+b=1.\end{cases}$ 解这个方程组,得$\begin{cases}k=-2,\\b=7.\end{cases}$

$\therefore y_2=-2x+7$.

要使 $y_1\leqslant y_2$,则 $-2x^2+8x-5\leqslant -2x+7$,解得 $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$.

题 148 二次函数 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的图像与 x 轴相交于点$(-2,0)$和点$(4,0)$且过点$(-1,7)$. 求 $x=3$ 时,y 的值.

解 根据二次函数的两点式可设 $y=a(x+2)(x-4)$.

把点$(-1,7)$的坐标代入上式,得

$a(-1+2)(-1-4)=7$,

$\therefore a=-\frac{7}{5}$.

$\therefore y=-\frac{7}{5}(x+2)(x-4)$.

当 $x=3$ 时,$y=-\frac{7}{5}\times(3+2)\times(3-4)=-\frac{7}{5}\times 5\times(-1)=7$.

题 149 已知方程 $x^2+px+q=0$ 一根为 4,抛物线 $y=x^2+px+q$ 过点$(\frac{1}{2},1\frac{3}{4})$,

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与抛物线 $y=x^2+px+q$ 有如下关系：(1)与 x 轴交点相同，(2)顶点关于 x 轴对称．求两个抛物线的解析式．

解 $\because\begin{cases}16+4p+q=0,\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{2}p+q=1\frac{3}{4}.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}p=-5,\\ q=4.\end{cases}$

$\therefore y=x^2-5x+4.$

$\therefore$ 抛物线与 x 轴交点为(1,0)、(4,0)，顶点为$(\frac{5}{2},-\frac{9}{4})$.

则抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点(1,0)、(4,0)，顶点为$(\frac{5}{2},\frac{9}{4})$，

则 $y=a\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，当 $x=1$ 时，$y=0$，则 $a=-1$.

$\therefore y=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，即 $y=-x^2+5x+4$.

题 150 通过配方，确定抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-5$ 的对称轴和顶点坐标．(写出配方的过程)．

解 $y=-\frac{1}{3}x^2+2x-5=-\frac{1}{3}(x^2-6x)-5$

$=-\frac{1}{3}[(x^2-6x+9)-9]-5$

$=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3-5=-\frac{1}{3}(x-3)^2-2.$

$\therefore$ 顶点坐标为(3,-2)，对称轴是 $x=3$.

题 151 用配方法求函数 $y=\frac{4}{3}x-2-3x^2$ 的最大值或最小值．

解 $\because y=-3x^2+\frac{4}{3}x-2=-3\left(x^2-\frac{4}{9}x\right)-2$

$=-3\left[x^2-\frac{4}{9}x+\left(\frac{2}{9}\right)^2-\left(\frac{2}{9}\right)^2\right]-2$

$=-3\left(x-\frac{2}{9}\right)^2+\frac{4}{27}-2=-3\left(x-\frac{2}{9}\right)^2-\frac{50}{27}.$

$\therefore x=\frac{2}{9}$ 时，函数有最大值为 $-\frac{50}{27}$.

题 152 已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x^2 成反比例，并且 $x=2$ 与 $x=3$ 时，y 的值都等于 19．求 y 与 x 之间的函数关系式．

解 根据题意，设 $y_1=k_1x$，$y_2=\frac{k_2}{x^2}$，则 $y=y_1+y_2=k_1x+\frac{k_2}{x^2}$.

$\because x=2$ 与 $x=3$ 时，y 都等于 19，

$$\therefore 有\begin{cases}2k_1+\dfrac{k_2}{4}=19,\\[2ex]3k_1+\dfrac{k_2}{9}=19.\end{cases}$$

解这个方程组，得$\begin{cases}k_1=5,\\k_2=36.\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 的函数关系式为 $y=5x+\dfrac{36}{x^2}$.

题 153 在直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 经过点 $(4,0)$，且与 x 轴、y 轴围成的直角三角形的面积等于 8. 如果一个二次函数的图像经过直线 l 与两条坐标轴的交点，以 $x=3$ 为对称轴，且开口向下，求这个二次函数的解析式，并求出它的最大值.

解 设直线 l 与 x 轴的交点为 $A(4,0)$，与 y 轴的交点为 $B(0,m)$. 则

$$\frac{1}{2}|m|\times 4=8,$$

$\therefore |m|=4$，$\therefore m=\pm 4$.

$\therefore$直线 l 与 y 轴的交点为 $B(0,4)$ 或 $B'(0,-4)$.

$\because$抛物线以 $x=3$ 为对称轴，

$\therefore$点 A 关于对称轴的对称点 $A'(2,0)$ 也在抛物线上. 设二次函数的解析式为 $y=a(x-4)(x-2)$.

当抛物线经过点 $A(4,0)$、$B(0,4)$、$A'(2,0)$ 时，有 $4=a(0-4)(0-2)$，$\therefore a=\dfrac{1}{2}$；

当抛物线经过点 $A(4,0)$、$B'(0,-4)$、$A'(2,0)$ 时，有 $-4=a(0-4)(0-2)$，$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$.

$\because$所求抛物线开口向下，$\therefore$只取 $a=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$所求的二次函数解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3x-4$.

$$\therefore y_{最大}=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-4)-3^2}{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

题 154 已知函数 $y=x^2-(m+4)x+2(m+1)$.

(1)证明：不论 m 取何值，抛物线与 x 轴必有两个交点；

(2)若抛物线的对称轴是 y 轴，求 m 的值.

解 (1)$\because \Delta=[-(m+4)]^2-8(m+1)=m^2+8>0$.

$\therefore$不论 m 取任何值抛物线与 x 轴必有两个交点.

(2)抛物线的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m+4}{2}=0$，$\therefore m=-4$.

题 155 把二次函数 $y=x^2$ 的图像平移，使它与 x 轴相交于 $(0,0)$、$(m,0)$ $(m\neq 0)$ 两

点.(1)求平移后函数图像的解析式;(2)若平移后函数图像的顶点在第三象限内两条坐标轴夹角的平分线上,求 m 的值.

解 (1)设平移后的抛物线解析式为 $y=x^2+bx+c$.

∵抛物线与 x 轴交于(0,0)、$(m,0)(m\neq0)$两点,

∴ $\begin{cases}c=0,\\m^2+bm=0.\end{cases}$ 解这个方程组,得 $\begin{cases}b=-m,\\c=0.\end{cases}$

∴解析式为:$y=x^2-mx$.

(2)∵ $y=x^2-mx=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}$,

∴顶点坐标为 $\left(\dfrac{m}{2},-\dfrac{m^2}{4}\right)$.

又∵顶点在 $y=x$ 上,∴ $\dfrac{m}{2}=-\dfrac{m^2}{4}$,且 $m<0$,∴ $m=-2$.

题 156 已知抛物线 $y=x^2-(m-3)x-m$.

(1)试证:无论 m 为何值,抛物线与 x 轴总有两个交点;

(2)试求:当 m 为何值,抛物线与 x 轴的两个交点的距离等于 3;

(3)用反证法证明:无论 m 为何值,抛物线与 x 轴的两个交点不可能都落在 x 轴的正半轴上.

解 (1)令 $y=0$,即 $x^2-(m-3)x-m=0$,则

$\Delta=(m-3)^2+4m=m^2-2m+9=(m-1)^2+8>0$,

∴抛物线与 x 轴总有两个交点.

(2)设抛物线与 x 轴的两个交点坐标为 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$. 则两交点距离为 $|x_1-x_2|$.

∵ $|x_1-x_2|^2=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2$

$=(m-3)^2+4m=m^2-2m+9$.

∴ $m^2-2m+9=3^2$,即 $m^2-2m=0$,∴ $m=0$ 或 $m=2$.

所以,当 $m=0$ 或 $m=2$ 时,抛物线与 x 轴两交点的距离等于 3.

(3)假设有某个 m 的值,使得抛物线与 x 轴的两交点都落在 x 轴的正半轴上,即 $x_1>0,x_2>0$. 因此有

$\begin{cases}x_1+x_2>0,\\x_1\cdot x_2>0.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}m-3>0,\\-m>0.\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}m>3,\\m<0.\end{cases}$ 无解.

∴假设是错误的,故原命题正确.

题 157 二次函数 $y=x^2+(m-3)x+m$ 的图像与 x 轴交点至少有一个在原点的右侧,试求 m 的取值范围.

解 与"二次函数图像与 x 轴交点至少有一个在原点的右侧"的意义相反的是"两个交点都不在原点的右侧".

而要使二次函数图像与 x 轴两个交点都不在原点的右侧,则

$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ x_1+x_2<0,\\ x_1x_2\geqslant 0;\end{cases}\begin{cases}m\leqslant 1,或 m\geqslant 9,\\ -(m-3)<0,\\ m\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $m\geqslant 9$.

即当判别式大于或等于零时，若 $m\geqslant 9$，两个交点都不在原点的右侧；若 $m\leqslant 1$ 时，则至少有一个交点在原点的右侧.

题 158 已知二次函数 $y=x^2-2ax+(b+c)^2$，其中 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边长. 求证：这个函数的图象与 x 轴不相交.

解 $\Delta=(-2a)^2-4(b+c)^2=4(a+b+c)(a-b-c)$.

$\because a$、b、c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，

$\therefore a+b+c>0, a-b-c<0, \therefore \Delta<0$.

$\therefore$ 这个二次函数的图像与 x 轴不相交.

题 159 已知：$A(-1,-3)$ 在抛物线 $y=(2k-1)x^2+(k-1)x-4$ 上. (1)求 k 的值；(2)求抛物线的顶点及对称轴；(3)设抛物线与 x 轴的交点为 P、Q，若抛物线上的点 M 使 $S_{\triangle PQM}=8$，求点 M 的坐标.

解 (1)$\because A(-1,-3)$ 在抛物线 $y=(2k-1)x^2+(k-1)x-4$ 上，

$\therefore -3=(2k-1)-(k-1)-4$,

$\therefore k=1$.

(2)将 $k=1$ 代入抛物线的解析式得 $y=x^2-4$，于是抛物线顶点为 $(0,-4)$，对称轴为 $x=0$，即为 y 轴.

(3)设抛物线与 x 轴的交点为 $P(x_1,0)$，$Q(x_2,0)$，则 x_1、x_2 是方程 $x^2-4=0$ 的解，即 $x_1=2, x_2=-2$，这时得 P、Q 两点的距离为 $|2-(-2)|=4$.

设 M 点坐标为 (x_0,y_0)，则由 $S_{\triangle PQM}=8$，得 $\frac{1}{2}\times 4\times |y_0|=8$，

解得 $y_0=\pm 4$.

当 $y_0=4$ 时，得 $x_0=\pm 2\sqrt{2}$，

当 $y_0=-4$ 时，得 $x_0=0$.

故点 M 坐标为 $(2\sqrt{2},4)$，$(-2\sqrt{2},4)$ 和 $(0,-4)$.

题 160 已知：(1)若抛物线 $y=ax^2+x+2$ 经过点 $(-1,0)$.

①求 a 的值，并写出这个抛物线的顶点坐标；

②若点 $P(t,t)$ 在抛物线上，则点 P 叫做抛物线上的不动点，求出这个抛物线上所有不动点的坐标.

(2)当 a 取 a_1 时，抛物线 $y=ax^2+x+2$ 与 x 轴正半轴交于点 $M(m,0)$；当 a 取 a_2 时，抛物线 $y=ax^2+x+2$ 与 x 轴正半轴交于点 $N(n,0)$. 若当 M 在点 N 的左边，试比较 a_1 和

a_2 的大小.

解 (1)①∵抛物线 $y=ax^2+x+2$ 经过点 $(-1,0)$，∴$a=-1$，

∴抛物线 $y=-x^2+x+2$ 的顶点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$.

②根据题意，得 $-t^2+t+2=t$，解得 $t=\pm\sqrt{2}$.

所以这个抛物线上有两个不动点，坐标分别为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 和 $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

(2)∵当 a 取 a_1 时，抛物线与 x 轴正半轴交于点 $M(m,0)$，

∴$a_1m^2+m+2=0$，

∴$a_1=-\frac{m+2}{m^2}$. 同理 $a_2=-\frac{n+2}{n^2}$.

$$\therefore a_1-a_2=-\frac{m+2}{m^2}-\left(-\frac{n+2}{n^2}\right)=\frac{m^2n+2m^2-mn^2-2n^2}{m^2n^2}=\frac{(m-n)(mn+2m+2n)}{m^2n^2}.$$

∵M、N 在 x 轴正半轴上，∴$m>0,n>0$.

又∵点 M 在点 N 的左边，∴$m<n$，从而 $m-n<0$.

∴$a_1-a_2=\frac{(m-n)(mn+2m+2n)}{m^2n^2}<0$，∴$a_1<a_2$.

题 161 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴在 y 轴右侧，且抛物线与 y 轴交于 $Q(0,-3)$，与 x 轴交点为 A、B，顶点为 P，$\triangle PAB$ 的面积为 8.

(1)求函数 y 的解析式，并写出函数图像的对称轴方程；

(2)x 在什么范围取值，使 $y>0$，并说出 x 在此范围变化时，函数 y 的变化情况.

解 (1)将点 $Q(0,-3)$ 坐标代入 $y=x^2+bx+c$ 中，得 $c=-3$，

∴$y=x^2+bx-3$.

由题意，可设抛物线与 x 轴交点 A、B 的坐标分别为 $(x_1,0)$、$(x_2,0)$，则 x_1、x_2 为方程 $x^2+bx-3=0$ 的两根，

∴$x_1+x_2=-b$，$x_1\cdot x_2=-3$.

∴$|AB|=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{b^2+12}$.

顶点 P 的坐标为 $\left(-\frac{b}{2},-\frac{b^2+12}{4}\right)$.

则 $\triangle PAB$ 底边 AB 上的高为 $\frac{b^2+12}{4}$.

∴$\frac{1}{2}\times\sqrt{b^2+12}\times\frac{b^2+12}{4}=8$，解得 $b=\pm2$.

∵抛物线对称轴在 y 轴右侧，对称轴方程为 $x=-\frac{b}{2}$，∴取 $b=-2$.

∴函数 y 的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

将 $b=-2$ 代入 $x=-\frac{b}{2}$ 得函数图像的对称轴方程为 $x=1$.

(2)由 $y=x^2-2x-3>0$ 得,$x<-1$ 或 $x>3$.

∴x 在 $x<-1$ 或 $x>3$ 的范围取值使 $y>0$.

当 $x<-1$ 时,y 随 x 的增大而减小;当 $x>3$ 时,y 随 x 的增大而增大.

题 162 已知抛物线 $y=-3x^2-(2c-b)x+a^2$,其中 a、b、c 是一个直角三角形三边的长,且 $a<b<c$,又知这个三角形两锐角的正弦分别是方程 $25x^2-35x+12=0$ 的两个根(如图 12 - 52 所示).

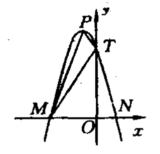


图 12 - 52

(1)求 $a:b:c$;

(2)设这条抛物线与 x 轴的左、右交点分别为 M、N,与 y 轴交点为 T,顶点为 P,求△MPT 的面积(用只含 a 的代数式表示).

解 (1)由正弦定义知,两锐角的正弦分别为$\frac{a}{c}$、$\frac{b}{c}$且$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

解方程 $25x^2-35x+12=0$,得 $x_1=\frac{3}{5}$,$x_2=\frac{4}{5}$,∴$\frac{a}{c}=\frac{3}{5}$,$\frac{b}{c}=\frac{4}{5}$.

∴$a:b:c=\frac{3}{5}c:\frac{4}{5}c:c=3:4:5$.

(2)连结 OP. 则由(1)有 $c=\frac{5}{3}a$,$b=\frac{4}{3}a$,∴$2c-b=2a$.

∴$y=-3x^2-2ax+a^2$. 令 $y=0$,得 $x_1=-a$,$x_2=\frac{a}{3}$,

∴点 M 的坐标为$(-a,0)$;又令 $x=0$,得 $y=a^2$,

∴点 T 的坐标为$(0,a^2)$;又由抛物线顶点坐标公式,

∴点 P 的坐标为$\left(-\frac{a}{3},\frac{4}{3}a^2\right)$.

$S_{四边形PMOT}=S_{\triangle PMO}+S_{\triangle POT}=\frac{1}{2}|-a|\cdot|\frac{4}{3}a^2|+\frac{1}{2}|a^2|\cdot|-\frac{a}{3}|=\frac{5}{6}a^3$,

而 $S_{\triangle MOT}=\frac{1}{2}|-a|\cdot|a^2|=\frac{1}{2}a^3$,又 $S_{\triangle PMT}=S_{四边形PMOT}-S_{\triangle MOT}$.

∴$S_{\triangle PMT}=\frac{5}{6}a^3-\frac{1}{2}a^3=\frac{1}{3}a^3$.

题 163 某商场购进一批单价为 16 元的日用品,销售一段时间后,为了获得更多利润,商店决定提高销售价格,经试验发现,若按每件 20 元的价格销售时,每月能卖 360 件,若按每件 25 元的价格销售时,每月能卖 210 件,假定每月销售件数 y(件)是价格 x(元/件)的一次函数.

(1)试求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2)在商品不积压,且不考虑其他因素的条件下,问销售价格定为多少时,才能使每月获得最大利润?每月的最大利润是多少?

解 (1)依题意,设 $y=kx+b$,则

$$\begin{cases}360=20k+b,\\210=25k+b.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k=-30,\\b=960.\end{cases}$$

$\therefore y=-30x+960,(16\leqslant x\leqslant 32)$.

(2)每月获得利润 $p=(-30x+960)(x-16)=-30(x-24)^2+1920$

$\therefore$当 $x=24$ 时,p 有最大值,最大值为 1920.

答:当价格为 24 元时,才能使每月获得最大利润,最大利润为 1920 元.

题 164 某商场销售一批名牌衬衫,平均每天可售出 20 件,每件盈利 40 元,为了扩大销售,增加盈利,尽快减少库存,商场决定采取适当的降价措施,经调查发现,如果每件衬衫每降价 1 元,商场平均每天可多售出 2 件.

(1)若商场平均每天要盈利 1200 元,每件衬衫应降价多少元?

(2)每件衬衫降价多少元时,商场平均每天盈利最多?

解 (1)设每件衬衫应降价 x 元,根据题意,得

$(40-x)(20+2x)=1200$.

整理,得 $x^2-30x+200=0$,解得 $x_1=10,x_2=20$.

根据题意,为了尽快减少库存,x 取 20.

答:每件衬衫应降价 20 元.

(2)商场每天盈利

$y=(40-x)(20+2x)=-2(x-15)^2+1250$.

当 $x=15$ 时,商场盈利最多,共 1250 元.

答:每件衬衫降价 15 元时,商场平均每天盈利最多.

题 165 如图 12 - 53 所示,已知抛物线 $L:y=x^2-(k-2)x+(k+1)^2$.

(1)证明:不论 k 取何值,抛物线 L 的顶点总在抛物线 $y=3x^2+12x+9$ 上;

(2)要使抛物线 $y=x^2-(k-2)x+(k+1)^2$ 和 x 轴有两个不同的交点 A、B,求 k 的取值范围;

(3)当(2)中的 A、B 间距离取得最大值时,设这条抛物线顶点为 C,求此时的 k 值和 $\angle ACB$ 的度数.

解 (1)抛物线 L 的顶点坐标为 $\left(\frac{k-2}{2},\frac{3k^2+12k}{4}\right)$. 将其代入 $y=3x^2+12x+9$ 中:

左边 $=\frac{3k^2+12k}{4}$;

右边 $=3\left(\frac{k-2}{2}\right)^2+12\left(\frac{k-2}{2}\right)+9=\frac{3k^2+12k}{4}$.

图 12 - 53

$\because$左边=右边,$\therefore$不论 k 取何值,抛物线 L 的顶点总在抛物线 $y=3x^2+12x+9$ 上.

(2)要使抛物线 L 与 x 轴有两个交点，则 $\Delta>0$，

即 $[-(k-2)]^2-4(k+1)^2=-3k^2-12k>0$. 解得 $-4<k<0$.

(3)当 $-4<k<0$ 时，抛物线 L 与 x 轴有两个不同的交点 A、B. 设 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，且 $x_1>x_2$. 由根与系数关系得

$$x_1+x_2=k-2, x_1\cdot x_2=(k+1)^2.$$

$$\therefore AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(k-2)^2-4(k+1)^2}$$
$$=\sqrt{-3(k+2)^2+12}.$$

由此可知，当 $k=-2$ 时，AB 达到最大值 $2\sqrt{3}$. 此时抛物线为 $y=x^2+4x+1$. A 点坐标为 $(-2+\sqrt{3},0)$、B 点坐标为 $(-2-\sqrt{3},0)$、C 点坐标为 $(-2,-3)$.

如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 为 AB 中点. $\therefore CD=3, AD=\sqrt{3}$.

$\therefore \mathrm{tg}\angle ACD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \angle ACD=30°$，$\therefore \angle ACB=2\angle ACD=60°$.

$\therefore$ 所求 k 值为 -2，$\angle ACB$ 的度数是 $60°$.

题166 已知抛物线 $y=x^2-4x+h$ 的顶点 A 在直线 $y=-4x-1$ 上，求(1)抛物线的顶点坐标；(2)抛物线与 x 轴交于 B、C 两点，试求 B、C 两点的坐标；(3)$\triangle ABC$ 的外接圆面积.

解 (1)由 $y=x^2-4x+h=(x-2)^2+h-4$ 可知 A 点的横坐标为 2，代入 $y=-4x-1$ 中，得 $y=-4\times2-1=-9$，$\therefore$ 点 $A(2,-9)$.

(2)由顶点式可知抛物线的解析式为 $y=(x-2)^2-9$.

令 $y=0$，即 $(x-2)^2-9=0$，解之得 $x_1=-1, x_2=5$.

$\therefore B$、C 两点的坐标为 $(-1,0)$ 和 $(5,0)$.

(3)根据抛物线的对称性可知 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心在抛物线的对称轴 $x=2$ 上，

$\therefore$ 设圆心 O 的坐标为 $(2,k)$. 由 $OA=OB$ 可得

$$|-9-k|=\sqrt{[2-(-1)^2]+k^2},$$

$\therefore k=-4$.

$\therefore OA=|-9-k|=|-9-(-4)|=5$.

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆面积为 25π.

题167 已知抛物线 $y=x^2+kx+1$ 与 x 轴相交于两个不同点 A、B，顶点为 C，且 $\angle ACB=90°$，试求如何平移此抛物线使 $\angle ACB=60°$.

解 设 $x^2+kx+1=0$ 的两根为 x_1、x_2，则

$$AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{k^2-4}.$$

又抛物线的顶点纵坐标为 $y'=\frac{4-k^2}{4}$，且$\angle ACB=90°$，再由抛物线是对称图形知$\frac{1}{2}|x_1-x_2|=|y'|$. 即

$$\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4}=\left|\frac{4-k^2}{4}\right|,$$

解得 $k_1{}^2=8, k_2{}^2=4$.

当 $k_2{}^2=4$ 时，抛物线与 x 轴只有一个交点，舍去. $\therefore k^2=8, y'=-1$.

当$\angle ACB=60°$时，$\frac{1}{2}|x_2-x_1|=|y'|\cdot \text{tg}30°$，即$\frac{1}{2}\sqrt{k^2-4}=\left|\frac{4-k^2}{4}\right|\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$，解方程，得 $k^2=16$ 或 $k^2=4$(舍去)

当 $k^2=16$ 时，$y'=-3$. ∵左右平移不影响$\angle ACB$的大小，只有上下平移.

∴需要将抛物线向下平移 2 个单位，就可使$\angle ACB=60°$.

题 168 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq0)$经过$(0,1)$和$(2,-3)$两点. (1)如果抛物线开口向下，对称轴在 y 轴左侧，求 a 的取值范围；(2)若对称轴为 $x=-1$，求抛物线的解析式.

解 (1)∵$(0,1)$和$(2,-3)$都在抛物线上，

$\therefore\begin{cases}c=1,\\4a+2b+c=-3.\end{cases}\quad\therefore b=-2a-2.$

∵开口向下，$\therefore a<0$；又∵对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$在 y 轴左侧，

$\therefore -\frac{b}{2a}<0, \therefore b<0$，即$-2a-2<0, \therefore a>-1, \therefore -1<a<0$.

(2)∵对称轴为 $x=-1$，$\therefore -\frac{b}{2a}=-1$，

$\therefore -\frac{-2a-2}{2a}=-1$，即$\frac{a+1}{a}=-1, \therefore a=-\frac{1}{2}$.

$\therefore b=-2a-2=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2=-1$，又 $c=1$，

∴这条抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+1$.

题 169 已知对称轴平行于 y 轴的抛物线，经过直线 $y=-x+2$ 与双曲线 $y=-\frac{3}{x}$ 的交点，又经过两条直线 $y=2x-1$ 与 $y=-x+5$ 的交点，求抛物线的解析式，并写出它的顶点坐标和对称轴.

解 根据题意，得$\begin{cases}y=-x+2,\\y=-\frac{3}{x}.\end{cases}$ 解方程组，得$\begin{cases}x_1=3,\\y_1=-1;\end{cases}\begin{cases}x_2=-1,\\y_2=3.\end{cases}$

∴直线与双曲线的交点为$(3,-1)$、$(-1,3)$.

根据题意，又得$\begin{cases}y=2x-1,\\y=-x+5.\end{cases}$ 解方程组，得$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

∴两条直线的交点为(2,3).

设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$,将(3,−1)、(−1,3)、(2,3)坐标分别代入,

得$\begin{cases}9a+3b+c=-1,\\a-b+c=3,\\4a+2b+c=3.\end{cases}$ 解方程组,得$\begin{cases}a=-1,\\b=1,\\c=5.\end{cases}$

故抛物线为 $y=-x^2+x+5$.

又 $y=-x^2+x+5=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{4}$.

∴抛物线的顶点坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{21}{4}\right)$,对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$.

题170 已知抛物线 $y=x^2-2x+m$ 与 x 轴有两个不同的交点 A、B,其坐标为 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$,其中 $x_1<x_2$,且 ${x_1}^2+{x_2}^2=4$.

(1)求这条抛物线;

(2)设所求抛物线顶点为 C,P 是此抛物线上的一点,且$\angle PAC=90°$.求点 P 的坐标和$\triangle PAC$ 的内切圆的面积.

解 (1)∵抛物线与 x 轴有两个不同的交点,∴$\Delta=4-4m>0$,∴$m<1$.

由 ${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2^2-2m=4$,得 $m=0$.

$m=0$ 在 $m<1$ 范围内.

把 $m=0$ 代入求得解析式为 $y=x^2-2x$,即为所求的抛物线.

(2)令 $x^2-2x=0$,得 $x_1=0,x_2=2$.则 A、B 两点坐标分别为 $A(0,0)$、$B(2,0)$.

∵$y=x^2-2x=(x-1)^2-1$,∴顶点坐标为 $C(1,-1)$.

设点 P 的坐标为(x_0,y_0).∵$\angle PAC=90°$,

∴$PC^2=AP^2+AC^2$,即$(x_0-1)^2+(y_0+1)^2={x_0}^2+{y_0}^2+1^2+(-1)^2$.

解得 $x_0=y_0$. ①

又 P 点在抛物线上,∴$y_0={x_0}^2-2x_0$. ②

解由①、②组成的方程组,得$\begin{cases}x_0=0,\\y_0=0;\end{cases}$或$\begin{cases}x_0=3,\\y_0=3.\end{cases}$

∵$\angle PAC=90°$,点 P 不与 A 重合,

∴$x_0=3,y_0=3$,点 P 坐标为 $P(3,3)$.

设$\triangle PAC$ 的内切圆半径为 r,由两点间距离公式求得

$AC=\sqrt{2}$,$AP=3\sqrt{2}$,$PC=2\sqrt{5}$.

则 $S_{\triangle PAC}=\frac{1}{2}r(AC+AP+PC)=\frac{1}{2}AC\cdot PC$,从而解得

$$r=\frac{AC\cdot AP}{AC+AP+PC}=\frac{\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}=2\sqrt{2}-\sqrt{5}.$$

∴$\triangle PAC$ 的内切圆的面积为

$S=\pi r^2=(2\sqrt{2}-\sqrt{5})^2\pi=(13-4\sqrt{10})\pi$.

题 171 已知二次函数 $y=2x^2-4mx+m^2$.

(1)求证:当 m 为非零实数时,这个二次函数的图像与 x 轴总有两个不同交点;(2)若这个函数的图像与 x 轴的交点为 A、B,顶点为 C,且△ABC 的面积为 $4\sqrt{2}$,求 m 的值.

解 (1)证明:$\Delta=(-4m)^2-4\times 2m^2=16m^2-8m^2=8m^2$.

$\because m\neq 0$, $\therefore 8m^2>0$,即 $\Delta>0$.

$\therefore$当 m 是非零实数时,这个函数的图像与 x 轴总有两个不同的交点.

(2)$\because A$、B 为图像与 x 轴的交点,

$\therefore$可设 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)(x_2>x_1)$,且 x_1、x_2 是方程 $2x^2-4mx+m^2=0$ 的两个根,

$\therefore x_1+x_2=2m, x_1\cdot x_2=\dfrac{m^2}{2}$.

$\therefore AB=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4m^2-2m^2}=\sqrt{2}|m|$.

又$\because C$ 点为二次函数图像的顶点,

$\therefore C$ 点纵坐标 $y=\dfrac{8m^2-16m^2}{4\times 2}=-m^2$,

$\therefore$△ABC 中 AB 边上高 $h=|-m^2|=m^2$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot h=\dfrac{1}{2}\sqrt{2}|m|\cdot m^2=4\sqrt{2}$,

$\therefore |m|=2$, $\therefore m=\pm 2$.

题 172 如图 12-54 所示,已知一次函数 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 的图像与 y 轴相交于 A,与 x 轴相交于 B. 以 $C(1,0)$为圆心的⊙C 与一次函数的图像相切于 D,⊙C 与 x 轴相交于 E、F.

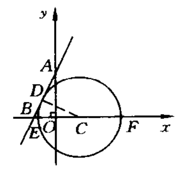
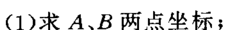


图 12-54


(1)求 A、B 两点坐标;

(2)求经过 B、E、A 三点且对称轴平行于 y 轴的抛物线;

(3)设(2)中所求抛物线的顶点为 G,求△BGF 的面积.

解 (1)已知 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}$ 与 y 轴相交,令 $x=0$,则 $y=\sqrt{3}$,$\therefore$点 A 坐标为$(0,\sqrt{3})$;与 x 轴相交,令 $y=0$,则 $x=-1$,$\therefore$点 B 的坐标为$(-1,0)$.

(2)连结 CD,则 $CD\perp AB$.

$\because\angle ABC$ 为 Rt△CDB 和 Rt△AOB 的公共角,且 $AB=\sqrt{3+1}=2$,$BC=|-1-1|=2$,△CDB≌△AOB.

$\therefore CD=OA=\sqrt{3}$,点 E 的坐标为$(1-\sqrt{3},0)$.

设经过 B、E、A 三点的抛物线为

$y=a[x-(1-\sqrt{3})][x-(-1)](a\neq 0)$.

又过 $A(0,\sqrt{3})$，∴ $\sqrt{3}=a(\sqrt{3}-1)$，∴ $a=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

∴过 B、E、A 三点且对称轴平行于 y 轴的抛物线为

$y=\frac{3+\sqrt{3}}{2}(x-1+\sqrt{3})(x+1)$.

(3)将(2)中所求抛物线的解析式配方变形，得

$y=\frac{3+\sqrt{2}}{2}\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{5\sqrt{3}-9}{8}$.

∴△BGF 的 BF 边上的高为 $\left|\frac{5\sqrt{3}-9}{8}\right|=\frac{9-5\sqrt{3}}{8}$.

又点 $F(1+\sqrt{3},0)$，点 $B(-1,0)$，则 $BF=2+\sqrt{3}$.

∴$S_{\triangle BGF}=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})\cdot\frac{9-5\sqrt{3}}{8}=\frac{3-\sqrt{3}}{16}$.

∴△BGF 的面积为$\frac{3-\sqrt{3}}{16}$.

题 173 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交于点 C，与 x 轴交于点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ $(x_1<x_2)$，顶点 M 的纵坐标为 -4，若 x_1、x_2 是方程 $x^2-2(m-1)x+m^2-7=0$ 的两个根，且 ${x_1}^2+{x_2}^2=10$.

(1)求 A、B 两点的坐标；

(2)求抛物线的解析式及点 C 的坐标；

(3)在抛物线上是否存在点 P，使三角形 PAB 的面积等于四边形 $ACMB$ 的面积的 2 倍. 若存在，求出所有符合条件的点的坐标；若不存在，请说明理由.

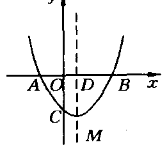


图 12 - 55

解 (1)∵x_1、x_2 是方程 $x^2-2(m-1)x+m^2-7=0$ 的两个根，

∴$x_1+x_2=2(m-1)$，$x_1x_2=m^2-7$.

又∵${x_1}^2+{x_2}^2=10$，

∴$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=10$，

∴$[2(m-1)]^2-2(m^2-7)=10$，

即 $m^2-4m+4=0$，解得 $m_1=m_2=2$.

把 $m=2$ 代入方程 $x^2-2(m-1)x+m^2-7=0$，

得 $x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$.

∴点 A 的坐标为$(-1,0)$，点 B 的坐标为$(3,0)$.

(2)抛物线与 x 轴的交点为 $A(-1,0)$、$B(3,0)$，由对称性可知：顶点 M 的横坐标为 1，则顶点 M 的坐标为$(1,-4)$.

$\therefore\begin{cases}a-b+c=0,\\9a+3b+c=0,\\a+b+c=-4.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=-3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=x^2-2x-3$.

在 $y=x^2-2x-3$ 中,令 $x=0$,得 $y=-3$,∴点 C 的坐标为$(0,-3)$.

(3)设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D,

则 $AO=OD=1,DB=2,OC=3,DM=4,AB=4$.

$$\begin{aligned}\therefore S_{\text{四边形}ACMB}&=S_{\triangle ACO}+S_{\text{梯形}OCMD}+S_{\triangle DMB}\\&=\frac{1}{2}AO\cdot CO+\frac{1}{2}(CO+MD)\cdot OD+\frac{1}{2}DB\cdot MD\\&=\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times(3+4)\times1+\frac{1}{2}\times2\times4=9.\end{aligned}$$

设 $P(x_0,y_0)$为抛物线上一点,则 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot|y_0|$.

若 $S_{\triangle PAB}=2S_{\text{四边形}ACMB}$,则$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot|y_0|=18$,∴$|y_0|=9,y_0=\pm9$.

把 $y_0=9$ 代入 $y=x^2-2x-3$ 中,得 $x^2-2x-3=9$,

即 $x^2-2x-12=0$,解得 $x_1=1-\sqrt{13},x_2=1+\sqrt{13}$.

把 $y_0=-9$ 代入 $y=x^2-2x-3$ 中,得 $x^2-2x-3=-9$,

即 $x^2-2x+6=0$.

∵$\Delta=(-2)^2-4\times1\times6=-20<0$,∴此方程无实数根,

∴符合条件的点 P 有两个:$P_1(1-\sqrt{13},9)$,$P_2(1+\sqrt{13},9)$.

题 171 在直角坐标系中有两点 $A(-3,4)$、$B(3,-4)$.

(1)若抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、B 两点,求证方程 $ax^2+bx+c=0$ 一定有两个不相等的实数根;

(2)试判断是否存在经过 A、B 两点,且以 y 轴为对称轴的抛物线,并证明你的结论.

解 (1)∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $A(-3,4)$、$B(3,-4)$,

$$\therefore\begin{cases}9a-3b+c=4,&①\\9a+3b+c=-4.&②\end{cases}$$

②−①,得 $b=-\frac{4}{3}$.

②+①,得 $c=-9a$.

令 $y=ax^2-\frac{4}{3}x-9a=0$,

$\Delta=\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4a(-9a)=36a^2+\frac{16}{9}>0$,

∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 一定有两个不相等的实数根.

(2)抛物线过 $A(-3,4)$、$B(3,-4)$两点,则 $y=ax^2-\frac{4}{3}x-9a$,

这条抛物线的对称轴为 $x=\frac{2}{3}$，因此过 A、B 两点的抛物线的对称轴一定不是 y 轴.

题 173 已知，直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，以 AB 为边在第一象限内作正三角形 ABC，$\odot O'$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，与 x 轴交于另一点 E.

(1)求点 C 的坐标；

(2)求过点 C 与 AB 中点 D 的一次函数的解析式；

(3)求过 E、O'、A 三点的二次函数的解析式.

图 12 - 56

解 (1)直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，

$\therefore A(\sqrt{3},0)$、$B(0,1)$.

在 Rt$\triangle ABO$ 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=2$，

$\operatorname{tg}\angle BAO=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \angle BAO=30°$.

又$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AC=AB=2$，$\angle BAC=60°$，

$\therefore \angle OAC=90°$，$CA /\!/ OB$，$\therefore$ 点 C 坐标为$(\sqrt{3},2)$.

(2)$\because D$ 是 AB 的中点，过 D 作 $DF /\!/ OA$ 交 OA 于 F.

则 $DF=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}$，$OF=\frac{1}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$ 点 D 坐标为$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

设过 C、D 两点的一次函数解析式为 $y=kx+b$，把 C、D 两点坐标代入解得所求一次函数的解析式为 $y=\sqrt{3}x-1$.

(3)$\because$ 点 O' 在 CD 上，且点 O' 的纵坐标为 1，代入上式得 $x=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，

$\therefore O'(\frac{2}{3}\sqrt{3},1)$.

$\because CA /\!/ BO$，过 B 作 $BH\perp AC$ 于 H，

$\therefore BH\perp OB$，且 OB 过$\odot O'$半径的外端，

$\therefore OB$ 是$\odot O'$的切线，则 $OB^2=OE\cdot OA$.

$\because OB=1$，$OA=\sqrt{3}$，解得 $OE=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore E(\frac{\sqrt{3}}{3},0)$.

设过 E、O'、A 三点的抛物线为 $y=ax^2+bx+c$，把三点坐标代入，得

$$\begin{cases}3a+\sqrt{3}b+c=0,\\ \frac{4}{3}a+\frac{2}{3}\sqrt{3}b+c=1,\\ \frac{1}{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}b+c=0.\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}a=-3,\\ b=4\sqrt{3},\\ c=-3.\end{cases}$$

∴所求二次函数的解析式为 $y=-3x^2+4\sqrt{3}x-3$.

题 176 已知，如图 12 - 57 所示，抛物线 $y=-\frac{1}{7}x^2+bx+c$ 与 x 轴相交于 A、B 两点，$AB=4$，P 为抛物线上一点，$PC\perp x$ 轴于 C，C 点的横坐标 $x_C=-1$，$\angle PAC=45°$，$\text{tg}PBC=\frac{3}{7}$.

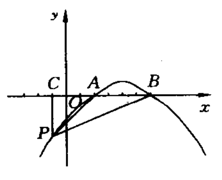


图 12 - 57

(1)求 P 点的坐标；

(2)求抛物线的解析式.

解 ∵$\angle PAC=45°$，设 $OA=a$，则 $PC=AC=1+a$，$BC=5+a$. $\text{tg}\angle PBC=\frac{PC}{BC}=\frac{1+a}{5+a}=\frac{3}{7}$，

∴$a=2$，∴P 点坐标为$(-1,-3)$.

(2)由(1)可知 $A(2,0)$、$B(6,0)$.

∵$A(2,0)$、$B(6,0)$在抛物线上，

$$\therefore\begin{cases}-\frac{4}{7}+2b+c=0,\\-\frac{36}{7}+6b+c=0.\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}b=\frac{8}{7},\\c=-\frac{12}{7}.\end{cases}$$

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{7}x^2+\frac{8}{7}x-\frac{12}{7}$.

题 177 以 x 为自变量的二次函数 $y=-x^2+(2m+2)x-(m^2+4m-3)$ 中，m 为不小于 0 的整数，它的图像与 x 轴交于点 A 和点 B，点 A 在原点的左边，点 B 在原点的右边.

(1)求这个二次函数的解析式；

(2)一次函数 $y=kx+b$ 的图像经过点 A，与这个二次函数的图像交于点 C，且 $S_{\triangle ABC}=10$，求一次函数的解析式.

解 (1)∵抛物线与 x 轴有两个交点，

∴关于 x 的方程 $x^2-(2m+2)x+(m^2+4m-3)=0$ 有两个不相等的实数根，

∴$\Delta=4(m+1)^2-4(m^2+4m-3)>0$，∵$m<2$.

又∵m 为不小于 0 的整数，∴$m=0$，或 $m=1$.

由于点 A 在原点的左边，点 B 在原点的右边，

当 $m=1$ 时，二次函数的解析式为 $y=-x^2+4x-2$，这时二次函数的图像与 x 轴的交点为$(2-\sqrt{2},0)$、$(2+\sqrt{2},0)$，这两个交点都在原点的右边，所以不符合题意，舍去.

当 $m=0$ 时，二次函数的解析式为 $y=-x^2+2x+3$，这时二次函数的图像与 x 轴的交点为$(-1,0)$、$(3,0)$符合题意.

∴所求的二次函数的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)∵当 $y=0$ 时，$-x^2+2x+3=0$，∴$x_1=-1$，$x_2=3$.

∴点 $A(-1,0)$，点 $B(3,0)$，∴$AB=4$.

设点 C 的坐标为 (x,y)，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times|y|=10$，∴$|y|=5$.

∵抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 的开口向下，顶点坐标为 $P(1,4)$，

∴抛物线上的点的纵坐标最大为 4，∴$y=-5$.

∴$-5=-x^2+2x+3$，解得 $x_1=-2$，或 $x_2=4$.

∴点 C 的坐标为 $(-2,-5)$，或 $(4,-5)$.

∴所求一次函数的解析式为 $y=5x+5$，或 $y=-x-1$.

题 178 已知：二次函数 $y=-x^2+(m+1)x+m$.

(1)设函数的图像与 x 轴有两个交点，求 m 的取值范围；

(2)当函数的图像经过点 $(2,1)$ 时，求出函数的解析式，并画出其图像(草图)；

(3)设(2)中函数图像的顶点为 A，与 x 轴的两个交点为 B、C，过点 A 的直线 $y=kx+b(k>0)$ 与 x 轴交于点 D，且 $S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ABC}$，求 k、b 的值.

解 (1)∵$\Delta=(m+1)^2+4m>0$，∴$m^2+6m+1>0$，

∴$m<-3-2\sqrt{2}$ 或 $m>-3+2\sqrt{2}$.

(2)又点 $(2,1)$ 在 $y=-x^2+(m+1)x+m$ 上，

则 $-4+2(m+1)+m=1$，∴$m=1$，$y=-x^2+2x+1$.

此函数图像的顶点为 $(1,2)$，对称轴为 $x=1$，与 x 轴两交点的坐标为 $B(1-\sqrt{2},0)$、$C(1+\sqrt{2},0)$，又 $a=-1<0$，故函数图像开口向下，图像草图如图 12-58 所示.

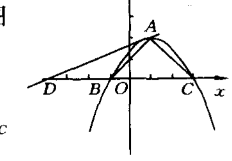


图 12-58

(3)$BC=|1+\sqrt{2}-(1-\sqrt{2})|=2\sqrt{2}$.

∵△ADC 的 DC 边与△ABC 的 BC 边上的高相等，且 $S_{\triangle ADC}=2S_{\triangle ABC}$，

∴$DC=2BC=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

而 $k>0$，∴点 D 在对称轴的左侧，设点 D 的坐标为 $(x,0)$，$x<1$.

$|x-(1+\sqrt{2})|=4\sqrt{2}$，

∴$x_1=1-3\sqrt{2}$，$x_2=1+5\sqrt{2}$(不合题意，舍去).

∴$D(1-3\sqrt{2},0)$.

把 $A(1,2)$ 和 $D(1-3\sqrt{2},0)$ 的坐标代入 $y=kx+b$，则

$$\begin{cases}k+b=2,\\(1-3\sqrt{2})k+b=0.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}k=\dfrac{\sqrt{2}}{3},\\b=\dfrac{6-\sqrt{2}}{3}.\end{cases}$$

题 179 已知：抛物线 $y=x^2-mx+\frac{m^2}{2}$ 与抛物线 $y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2$ 在平面直角坐标系 xOy 中的位置如图 12 - 59 所示，其中一条与 x 轴交于 A、B 两点.

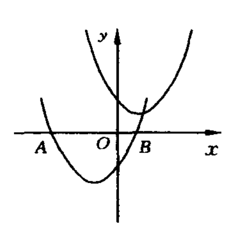
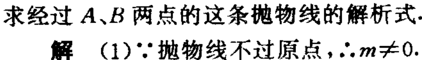


图 12 - 59

(1)试判断哪条抛物线经过 A、B 两点，并说明理由；

(2)若 A、B 两点到原点的距离 AO、OB 满足 $\frac{1}{OB}-\frac{1}{AO}=\frac{2}{3}$，求经过 A、B 两点的这条抛物线的解析式.



解 (1)∵抛物线不过原点，∴$m\neq0$.

令 $x^2-mx+\frac{m^2}{2}=0$，$\Delta_1=(-m)^2-4\times\frac{m^2}{2}=-m^2<0$，

∴抛物线 $y=x^2-mx+\frac{m^2}{2}$ 与 x 轴没有交点.

令 $x^2+mx-\frac{3}{4}m^2=0$，$\Delta_2=m^2-4\left(-\frac{3}{4}m^2\right)=4m^2>0$，

∴抛物线 $y=x^2+mx-\frac{3}{4}m^2$ 经过 A、B 两点.

(2)设点 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$，

则 x_1、x_2 是方程 $x^2+mx-\frac{3}{4}m^2=0$ 的两个实数根，

∴$x_1+x_2=-m$，$x_1\cdot x_2=-\frac{3}{4}m^2$.

∵点 A 在原点的左边，点 B 在原点的右边，

∴$AO=-x_1$，$OB=x_2$.

∵$\frac{1}{OB}-\frac{1}{AO}=\frac{2}{3}$，∴$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{-x_1}=\frac{2}{3}$.

∴$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{2}{3}$，$\frac{-m}{-\frac{3}{4}m^2}=\frac{2}{3}$.

解得 $m=2$，经检验，$m=2$ 是方程的解.

∴所求抛物线的解析式为 $y=x^2+2x-3$.

题 180 已知，二次函数的图像经过点 $A(-3,-2)$，$B(-1,-2)$ 和 $C(0,1)$.

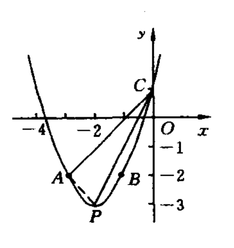


图 12 - 60

求：(1)这个二次函数的关系式，并写出图像的顶点 P 的坐标；

(2)$\angle ACP$ 的正弦值.

解 (1)设二次函数的解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

由图像经过点 $C(0,1)$，得 $c=1$.

再由图像经过点 $A(-3,-2)$、$B(-1,-2)$，得

$\begin{cases}9a-3b+1=-2,\\a-b+1=-2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=4.\end{cases}$

∴所求二次函数的解析式为 $y=x^2+4x+1$，函数图像的顶点 P 的坐标为 $(-2,-3)$.

(2)连结 AP，在△APC 中，$AC=\sqrt{18}$，$CP=\sqrt{20}$，$AP=\sqrt{2}$.

∵$AC^2+AP^2=CP^2$，∴△APC 是直角三角形，$\angle CAP=90°$，

∴$\sin\angle ACP=\dfrac{AP}{CP}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

题 181 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图像过点 $C(0,\frac{5}{3})$，与 x 轴交于两点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)(x_2<x_1)$，且 $x_1+x_2=4$，$x_1x_2=-5$.

(1)求 A、B 两点的坐标；

(2)求二次函数的解析式和顶点 P 的坐标；

(3)若一次函数 $y=kx+m$ 的图像过二次函数的顶点 P，把△PAB 分成两个部分，其中一个部分的面积不大于△PAB 面积的 $\frac{1}{3}$，求 m 的取值范围.

解 (1)∵$\begin{cases}x_1+x_2=4,\\x_1x_2=-5,\end{cases}$

∴x_1、x_2 是方程 $z^2-4z-5=0$ 的两个根，解得 $z_1=5$，$z_2=-1$.

∵$x_1>x_2$，∴$x_1=5$，$x_2=-1$，∴$A(5,0)$、$B(-1,0)$.

(2)$y=ax^2+bx+c$ 过 A、B、C 三点，

∴$\begin{cases}25a+5b+c=0,\\a-b+c=0,\\c=\frac{5}{3}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\b=\frac{4}{3},\\c=\frac{5}{3}.\end{cases}$

∴二次函数解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$，即 $y=-\frac{1}{3}(x-2)^2+3$，

∴顶点 P 的坐标为 $(2,3)$.

(3)过 P 点的直线把△PAB 分成两部分所构成的三角形的高都相等，因此，要使面积不大于△PAB 的 $\frac{1}{3}$，只要底边小于 AB 的 $\frac{1}{3}$ 就可以.

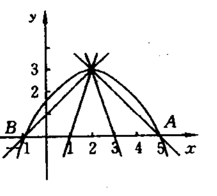
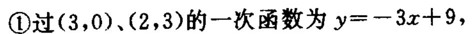


图 12-61

根据图形特征知，当一次函数图像过 $P(2,3)$，且过 $(1,0)$ 或 $(3,0)$ 时，把△PAB 分成两部分，其中一部分三角形的面积为△PAB 面积的 $\frac{1}{3}$.



①过 $(3,0)$、$(2,3)$ 的一次函数为 $y=-3x+9$，

过(5,0)、(2,3)的一次函数为 $y=-x+5$，

又一次函数 $y=kx+m$，当 $x=0$ 时，$y=m$，$\therefore 5<m\leqslant 9$.

②过(-1,0)、(2,3)的一次函数为 $y=x+1$，

过(1,0)、(2,3)的一次函数为 $y=3x-3$，观察图像，得 $-3\leqslant m<1$.

$\therefore m$ 的取值范围是 $-3\leqslant m<1$ 或 $5<m\leqslant 9$.

题 182　已知，直线 $y=mx+n$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 交于两点 $P_1(1,-1)$ 和 $P_2(3,1)$，抛物线还经过点 $M(2,-\frac{1}{2})$.

(1)求直线与抛物线的解析式；

(2)若点 A 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的交点，过点 A 作直线 $y=mx+n$ 的垂线，垂足是 H，求 AH 的长.

解　(1)把 P_1、P_2 两点的坐标代入 $y=mx+n$，得

$$\begin{cases}m+n=-1,\\3m+n=1.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}m=1,\\n=-2.\end{cases}\quad \therefore y=x-2.$$

把 P_1、P_2、M 点的坐标代入 $y=ax^2+bx+c$，得

$$\begin{cases}a+b+c=-1,\\9a+3b+c=1,\\4a+2b+c=-\frac{1}{2}.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-1,\\c=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$\therefore y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}$.

(2)直线与 x、y 轴的交点为 $C(2,0)$、$D(0,-2)$，抛物线与 x 轴的两交点为 $(1-\sqrt{2},0)$ 和 $(1+\sqrt{2},0)$.

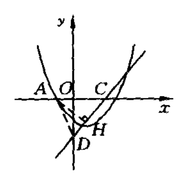


图 12 - 62

分两种情况考虑：

①当点 A 的坐标是 $(1-\sqrt{2},0)$ 时，如图 12 - 62 所示，

$AC=AO+OC=\sqrt{2}-1+2=1+\sqrt{2}$，

$OD=2$，

$CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

$\because S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot OD=\frac{1}{2}CD\cdot AH$，

$\therefore (1+\sqrt{2})\cdot 2=2\sqrt{2}\cdot AH$，$\therefore AH=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

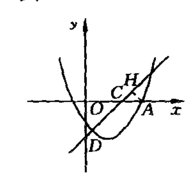


图 12 - 63

②当点 A 的坐标是 $(1+\sqrt{2},0)$ 时，

$AC=OA-OC=1+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-1$，$OD=2$，

$CD=\sqrt{OC^2+OD^2}=2\sqrt{2}$.

$\because S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot OD=\frac{1}{2}CD\cdot AH$,

$\therefore(\sqrt{2}-1)\cdot 2=2\sqrt{2}\cdot AH$, $\therefore AH=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

题 183 已知,三点 $A(0,8)$、$B(-5,3)$、$C(-2,0)$.

(1)求过 A、B 两点的直线的解析式 y_1 和过 A、B、C 三点且对称轴平行于 y 轴的抛物线的解析式 y_2,并画出 y_1 和 y_2 的简图.

(2)求四边形 $ABCO$ 的面积(O 为原点).

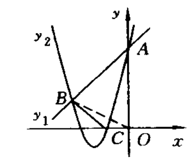


图 12 - 64

解 (1)设直线 $y_1=kx+h$,抛物线 $y_2=ax^2+bx+c$.

$\because$ 直线 y_1 过 A、B 两点,

$\therefore\begin{cases}h=8,\\-5k+h=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\h=8.\end{cases}$ $\therefore y_1=x+8$.

$\because$ 抛物线 y_2 过 A、B、C 三点,

$\therefore\begin{cases}c=8,\\25a-5b+c=3,\\4a-2b+c=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=6,\\c=8.\end{cases}$

$\therefore y_2=x^2-6x+8$.

画出 y_1、y_2 的简图,如图 12 - 64 所示.

(2)连结 BO,则 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}AO\cdot h_{AO}=\frac{1}{2}\times 8\times 5=20$,

$S_{\triangle BCO}=\frac{1}{2}CO\cdot h_{CO}=\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$,

$\therefore S_{四边形ABCO}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle BCO}=20+3=23$.

题 184 在直角坐标系中,抛物线 $y=x^2-2mx+n+1$ 的顶点 A 在 x 轴负半轴上,与 y 轴交于点 B,抛物线上一点 C 的横坐标为 1,且 $AC=3\sqrt{10}$.

(1)求此抛物线的函数解析式;

(2)若抛物线上有一点 D,使得直线 DB 经过第一、二、四象限,且原点 O 到直线 DB 的距离为 $\frac{8}{5}\sqrt{5}$,求这时点 D 的坐标.

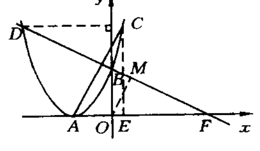


图 12 - 65

解 (1)根据题意,画出示意图,如图 12 - 65 所示.

过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E.

$\because$ 抛物线上一点 C 的横坐标为 1,且 $AC=3\sqrt{10}$,

$\therefore C(1,n-2m+2)$,其中 $n-2m+2>0$,

$OE=1$, $CE=n-2m+2$.

$\because$ 抛物线的顶点 A 在 x 轴负半轴上,

$\therefore A(m,0)$，其中 $m<0, OA=-m$，

$AE=OE+OA=1-m$.

$$\therefore \begin{cases} \Delta=4m^2-4(n+1)=0, & ① \\ (1-m)^2+(n-2m+2)^2=(3\sqrt{10})^2. & ② \end{cases}$$

由①，得 $n=m^2-1$. ③

把③代入②，整理，得 $(m^2-2m+1)^2+(m^2-2m+1)-90=0$，

$\therefore (m^2-2m+11)(m^2-2m-8)=0$.

$\therefore m^2-2m+11=0$ 或 $m^2-2m-8=0$.

$\because \Delta=(-2)^2-4\times 11=-40<0$，$\therefore$ 方程 $m^2-2m+11=0$ 没有实数根.

解方程 $m^2-2m-8=0$，得 $m_1=4, m_2=-2$.

$\because m<0$，$\therefore m=-2$. 把 $m=-2$ 代入③，得 $n=3$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=x^2+4x+4$.

(2) $\because$ 直线 DB 经过第一、二、四象限，

$\therefore$ 设直线 DB 交 x 轴正半轴于点 F.

过点 O 作 $OM\perp DB$ 于点 M，

$\because$ 点 O 到直线 DB 的距离为 $\frac{8}{5}\sqrt{5}$，$\therefore OM=\frac{8}{5}\sqrt{5}$.

$\because$ 抛物线 $y=x^2+4x+4$ 与 y 轴交于点 B，$\therefore B(0,4)$，$\therefore OB=4$.

$\therefore BM=\sqrt{OB^2-OM^2}=\sqrt{4^2-\left(\frac{8}{5}\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

$\because OB\perp OF, OM\perp BF$，$\therefore \triangle OBF\backsim\triangle MBO$，

$\therefore \frac{OB}{MB}=\frac{OF}{MO}$，$\therefore \frac{OB}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}=\frac{OF}{\frac{8}{5}\sqrt{5}}$，

$\therefore OF=2BO=8, F(8,0)$，$\therefore$ 直线 BF 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$.

$\because$ 点 D 既在抛物线上，又在直线 BF 上，

$$\therefore \begin{cases} y=x^2+4x+4, \\ y=-\frac{1}{2}x+4. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_1=-\frac{9}{2}, \\ y_1=\frac{25}{4}, \end{cases} \begin{cases} x_2=0, \\ y_2=4. \end{cases}$$

$\because DB$ 为直线，$\therefore$ 点 D 与点 B 不重合，$\therefore$ 点 D 的坐标为 $(-\frac{9}{2},\frac{25}{4})$.

题 165 已知抛物线 $y=x^2-2x+m$ 与 x 轴相交于两点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$，其中 $x_1<x_2$，且 ${x_1}^2+{x_2}^2=4$.

(1)求该抛物线的函数解析式；

(2)设 C 为该抛物线的顶点，求证 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，并求出 $\triangle ABC$ 的内切圆半径；

(3)设$\triangle ABC$的内切圆与x轴相切于点D,试在x轴上方的抛物线上找两点E、F,使$\angle EDF=90°$,且$\triangle EDF\backsim\triangle ACB$,求$E$、$F$两点的坐标.

解 (1)由题意可得$\Delta=4-4m>0$,

${x_1}^2+{x_2}^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=4-2m=4$,$\therefore m=0$.

$\therefore$解析式为$y=x^2-2x$.

(2)令$y=0$,则$x^2-2x=0$,解得$x_1=0$,$x_2=2$,

$\therefore A(0,0)$、$B(2,0)$.

$\because y=x^2-2x=(x-1)^2-1$,$\therefore C(1,-1)$.

$\because AC=\sqrt{(0-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$,

$BC=\sqrt{(2-1)^2+(0+1)^2}=\sqrt{2}$,$AB=2$,

$\therefore AC=BC$,且$AC^2+BC^2=AB^2$,$\therefore\triangle ABC$为等腰直角三角形.

设$\triangle ABC$的内切圆半径为R,则

$R=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$.

(3)$\because\triangle ABC$内切圆切x轴于D,则$D(1,0)$,过D作直线$DE/\!/AC$,

$DF/\!/BC$,分别交抛物线于E、F,

$\because\angle ACB=90°$,$\therefore\angle EDF=90°$.

又D点在抛物线的对称轴上,由对称性知,$DE=DF$,

$\therefore\triangle EDF\backsim\triangle ACB$.

$\because$直线BC的函数解析式为$y=x-2$,$\therefore$直线DF的解析式为$y=x-1$.

由$\begin{cases}y=x-1,\\y=x^2-2x,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\\y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2},\end{cases}$(另一解不合题意,舍去).

$\therefore F$点坐标为$\left(\dfrac{\sqrt{5}+3}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$,由对称性可得$E$点的坐标为$\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

题196 已知,如图12-66所示,抛物线$y=x^2+px+q$与x轴交于A、B两点,交y轴负半轴于C点,$\angle ACB=90°$,且$\dfrac{1}{OA}-\dfrac{1}{OB}=\dfrac{2}{OC}$.求$\triangle ABC$外接圆的面积.

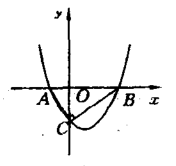


图12-66

解 设$A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$,则$x_1<0$,$x_2>0$,又$C(0,q)$,$q<0$.

若$x^2+px+q=0$,$x_1\cdot x_2=q$.

$\therefore OA \cdot OB = |x_1 \cdot x_2| = |q|$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$CO \perp AB$，$\therefore OC^2 = OA \cdot OB$，

即 $|q|^2 = OA \cdot OB$，$\therefore |q|^2 = |q|$，而 $q<0$，$\therefore q=-1$.

$\because \frac{1}{OA} - \frac{1}{OB} = \frac{2}{OC}$，$\therefore \frac{OB-OA}{OA \cdot OB} = \frac{2}{OC}$.

$\because OB - OA = x_2 - (-x_1) = x_1 + x_2 = -p$，

$\therefore \frac{-p}{1} = \frac{2}{1}$，$p=-2$，$\therefore y = x^2 - 2x - 1$.

$\therefore AB = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + 4x_1x_2} = \sqrt{2^2+4} = 2\sqrt{2}$.

$\therefore$ 外接圆面积为 $\pi\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2\pi$.

题 187 已知，如图 12-67 所示，这是某空防部队进行射击训练时在平面直角坐标系中的示意图，在地面 O、A 两个观测点测得空中固定目标 C 的俯角分别为 α 和 β，$OA=1$ 千米，$\operatorname{tg}\alpha = \frac{9}{28}$，$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{8}$，位于 O 点正上方 $\frac{5}{3}$ 千米 D 点处的直升飞机向目标 C 发射防空导弹，该导弹运行达到距地面最大高度 3 千米时，相应的水平距离为 4 千米（即图中 E 点）.

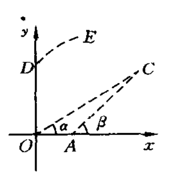


图 12-67

(1)若导弹运行轨道为一抛物线，求该抛物线的解析式；

(2)说明按(1)中轨道运行的导弹能否击中目标 C 的理由.

解 (1)设导弹运行轨道的抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

由题意，知，这条抛物线的顶点坐标为 $E(4,3)$，抛物线的对称轴为 $x=4$.

点 $D(0,\frac{5}{3})$ 在这条抛物线上，点 D 关于 $x=4$ 的对称点 D' 的坐标为 $(8,\frac{5}{3})$，点 D' 也在这条抛物线上.

$$\therefore \begin{cases} c=\frac{5}{3}, \\ 16a+4b+c=3, \\ 64a+8b+c=\frac{5}{3}. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{12}, \\ b=\frac{2}{3}, \\ c=\frac{5}{3}. \end{cases}$$

$\therefore$ 所求抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.

(2)设 C 点的坐标为 (x_0, y_0)，过 C 作 $CB \perp Ox$，垂足为 B.

在 $Rt\triangle OBC$ 和 $Rt\triangle ABC$ 中，$OA=1$，

$\therefore \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_0}{x_0} = \frac{9}{28}$，$\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{x_0-1} = \frac{3}{8}$.

$\therefore \frac{9}{28}x_0 = \frac{3}{8}(x_0-1)$，$\therefore x_0 = 7$.

当 $x_0=7$ 时，$y_0=\frac{9}{4}$，∴点 C 的坐标为$(7,\frac{9}{4})$.

$\because -\frac{1}{12}x_0^2+\frac{2}{3}x_0+\frac{5}{3}=-\frac{1}{12}\times 7^2+\frac{2}{3}\times 7+\frac{5}{3}=\frac{9}{4}=y_0$，

∴点 $C(7,\frac{9}{4})$在抛物线上，因此导弹能击中目标.

题 188　已知：正方形 $ABCD$ 的边长为 4，经过 AB 边上一点 P 作平行于对角线 AC、BD 的直线，分别与边 BC、AD 交于点 Q、R，设 $\triangle PQR$ 的面积为 y，$AP=x$，求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量的取值范围.

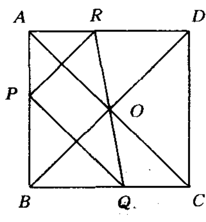


图 12 - 68



解　$\because AC\perp BD$，$PQ/\!/AC$，$PR/\!/BD$，$\therefore PR\perp PQ$.

∵$\triangle APR$、$\triangle BPQ$ 都为等腰直角三角形.

$AP=x$，则 $PR=\sqrt{2}x$，$BP=4-x$，

则 $PQ=\sqrt{2}(4-x)$.

$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}PR\cdot PQ$，

$y=\frac{1}{2}\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}(4-x)=-x^2+4x$，$0<x<4$.

题 189　已知，如图 12 - 69 所示，正方形 $ABCD$ 中，E 是 BC 边上的点，F 是 CD 边上的点，且 $AE=AF$，$AB=4$. 设 $\triangle AEF$ 的面积为 y，EC 为 x，求 y 与 x 之间的函数关系式，并在坐标系中画出这个函数的图像.

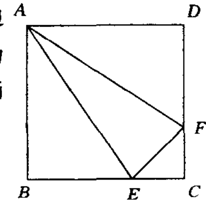


图 12 - 69



解　∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=AD$，$\angle B=\angle D=90°$.

又 $\because AE=AF$，$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ADF$，$\therefore BE=DF$.

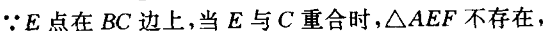
$\because BC=CD$，$\therefore FC=EC=x$，

$\therefore BE=DF=4-x$.

$\therefore S_{\triangle AEF}=AB^2-2\times S_{\triangle ABE}-S_{\triangle ECF}$

$=4^2-2\times\frac{1}{2}\times 4\times(4-x)-\frac{1}{2}x^2$

$=-\frac{1}{2}x^2+4x$.



∵E 点在 BC 边上，当 E 与 C 重合时，$\triangle AEF$ 不存在，

$\therefore x$ 的取值范围为 $0<x\leqslant 4$.

它的图像如图 12 - 70 所示.

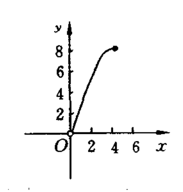


图 12 - 70

题 190　某商场以每件 42 元的价钱购进一种服装，根据试销得知：这种服装每天的销售量 t(件)，与每件的销售价 x(元/件)可看成是一次函数关系：$t=-3x+204$.

(1)写出商场卖这种服装每天的销售利润 y 与每件的销售价 x 之间的函数关系式(每天的销售利润是指所卖出服装的销售价与购进价的差);

(2)通过对所得函数关系式进行配方,指出:商场要想每天获得最大的销售利润,每件的销售价定为多少最为合适;最大销售利润为多少?

解 (1)由题意,销售利润 y 与每件的销售价 x 的函数关系式为:

$y=(x-42)\cdot t=(x-42)(-3x+204)$,

即 $y=-3x^2+330x-8568$.

(2)将函数关系式配方,得 $y=-3(x-55)^2+507$.

∴当每件的销售价为55元时,可取得最大利润,每天最大销售利润为507元.

题191 已知,如图12-71所示,$\odot O_1$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,$\odot O_2$ 与 $\odot O_1$ 内切于 A,交 AB 于 F,交 AC 于 G. $FE\perp BC$ 于 E,$GH\perp BC$ 于 H,AD 是 $\triangle ABC$ 的高,交 FG 于 M,且 $AD=6$,$BC=8$.

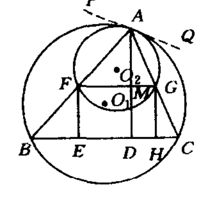
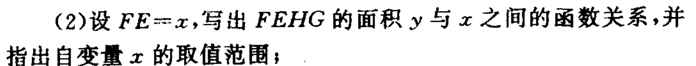
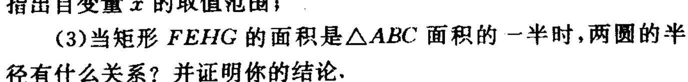


图12-71


(1)求证:四边形 $FEHG$ 是矩形;


(2)设 $FE=x$,写出 $FEHG$ 的面积 y 与 x 之间的函数关系,并指出自变量 x 的取值范围;


(3)当矩形 $FEHG$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积的一半时,两圆的半径有什么关系?并证明你的结论.

证明 (1)过 A 作两圆外公切线 PQ.

$\because \angle PAB=\angle AGF$,$\angle PAB=\angle ACB$,$\therefore \angle AGF=\angle ACB$,$\therefore FG/\!/BC$.

又 $FE/\!/GH$,$\therefore FEHG$ 是平行四边形.

$\therefore \angle FEC=90^\circ$,$\therefore FEHG$ 是矩形.

(2)$\because FE=x$,矩形 $FEHG$ 的面积为 y,$\triangle AFG\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \dfrac{FG}{BC}=\dfrac{AM}{AD}$,$\dfrac{FG}{8}=\dfrac{6-x}{6}$,$\therefore FG=\dfrac{4}{3}(6-x)$.

$\therefore y=x\cdot\dfrac{4}{3}(6-x)=-\dfrac{4}{3}x^2+8x$,$0<x<6$.

(3)$\because \triangle ABC$ 的面积为24,$\therefore -\dfrac{4}{3}x^2+8x=\dfrac{1}{2}\times 24=12$,

化简,得 $x^2-6x+9=0$,$x_1=x_2=3$.

∴当矩形 $FEHG$ 的面积是 $\triangle ABC$ 面积一半时,$FE=MD=3$,

则 $AM=\dfrac{1}{2}AD$.

连结 O_2F、O_1B、O_1A,则 O_2 必在 O_1A 上,

由 $\angle AO_2F=\angle AO_1B$ 可知,$FO_2/\!/BO_1$,

$\therefore \dfrac{O_2F}{O_1B}=\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore \odot O_1$ 的半径 R 与 $\odot O_2$ 的半径 r 的关系是 $R=2r$.

题 192 在△ABC中，$AB=4\sqrt{3}$，$AC=6$，$BC=2\sqrt{3}$，P是AC上与A、C不重合的一个动点，过P、B、C的⊙O交AB于D.

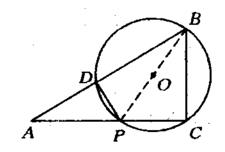


图 12-72

(1)设$PA=x$，$PC^2+PD^2=y$，求y与x的函数关系式，并确定x的范围；

(2)P在AC上何处时，函数y有最小值，最小值是多少？

(3)求当y取最小值时，⊙O的面积.

解 (1)∵$BC:AC:AB=1:\sqrt{3}:2$，

∴△ABC为Rt△，且$\angle A=30°$.

连结PB，则PB为直径，∴$PD\perp AB$，$PD=\frac{x}{2}$，

∴$y=PC^2+PD^2=(6-x)^2+\frac{x^2}{4}=\frac{5}{4}x^2-12x+36$，$(0<x<6)$.

(2)当$x=-\frac{-12}{2\times\frac{5}{4}}=\frac{24}{5}$时，$y$的最小值为$\frac{4\times\frac{5}{4}\times 26-12^2}{4\times\frac{5}{4}}=\frac{36}{5}$.

(3)当y取最小值时，$x=\frac{24}{5}$，∴$PC=6-x=\frac{6}{5}$，

∴$PB^2=BC^2+PC^2=\frac{336}{25}$，

∴$S_{\odot O}=\pi\left(\frac{PB}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\pi\frac{336}{25}=\frac{84}{25}\pi$.

题 193 已知，如图 12-73 所示，在Rt△ABC中，$\angle C=90°$，BC、CA、AB的边长分别为a、b、c，并在其上分别取P、Q、R三点，使$CQ=2BP$，$AR=3BP$，$BP=x$，连结P、Q、R三点，设△PQR的面积为S，若$a=3$，$b=4$，求：

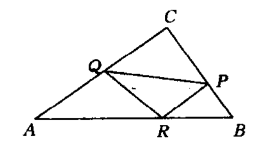


图 12-73

(1)S关于x的解析式；

(2)当x取什么值时，S有最小值，最小值是多少？(精确到0.1).

解 (1)在Rt△ABC中，$a=3$，$b=4$，$c=5$.

$BP=x$，则$CP=3-x$，$CQ=2x$，则$AQ=4-2x$；

$AR=3x$，则$BR=5-3x$.

则$S=\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}(3-x)\cdot2x-\frac{1}{2}(4-2x)\cdot3x\cdot\sin A-\frac{1}{2}x\cdot(5-3x)\sin B$.

而$\sin A=\frac{3}{5}$，$\sin B=\frac{4}{5}$，

∴$S=6-3x+x^2-\frac{18}{5}x+\frac{9}{5}x^2-2x+\frac{6}{5}x^2$，

$S=4x^2-\frac{43}{5}x+6, 0<x<3$.

(2)当 $x=-\frac{-\frac{43}{5}}{8}=\frac{43}{40}$时，

$S=4\times\left(\frac{43}{40}\right)^2-\frac{43}{5}\times\frac{43}{40}+6=\frac{551}{400}\approx1.4$.

题 194 已知，如图 12 - 74 所示，BD 为$\odot O$ 的直径，且 $BD=8$，$\overset{\frown}{DM}$是圆周的$\frac{1}{4}$，A 为$\overset{\frown}{DM}$上任意一点，取 $AC=AB$ 交 BD 的延长线于 C 点，连结 OA，并作 $AE\perp BD$ 于 E，设 $AB=x$，$CD=y$.

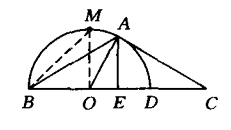


图 12 - 74

(1)写出 y 关于 x 的函数解析式；

(2)当 x 为何值时，CA 是$\odot O$ 的切线；

(3)当 CA 与$\odot O$ 相切时，求 $\text{tg}OAE$ 的值.

解 (1)$\because OA=OB, AB=AC$，$\therefore\triangle AOB$ 和$\triangle ABC$ 是等腰三角形.

$\therefore\angle B=\angle BAO=\angle C$，$\therefore\triangle AOB\backsim\triangle BAC$.

$\therefore\frac{AB}{BC}=\frac{OB}{AB}$，即$\frac{x}{8+y}=\frac{4}{x}$，

$\therefore y=\frac{1}{4}x^2-8$ ①

$\because A$ 为$\overset{\frown}{MD}$上任意一点，则 $BM\leqslant AB\leqslant BD$.

而 $BM=\sqrt{OB^2+OM^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，$BD=8$，$\therefore 4\sqrt{2}\leqslant x\leqslant8$，

$\therefore y=\frac{1}{4}x^2-8$，$4\sqrt{2}\leqslant x\leqslant8$.

(2)若 $OA\perp CA$，则 AC 是$\odot O$ 的切线，

即当 $OC^2=OA^2+AC^2$ 时，$OA\perp CA$，

$\therefore(4+y)^2=4^2+x^2$，

即 $y^2+8y=x^2$ ②

由①、②两式，可得 $y=4$，$\therefore x=4\sqrt{3}$.

当 $x=4\sqrt{3}$ 时，CA 是$\odot O$ 的切线.

(3)由(2)得 $x=4\sqrt{3}$ 时，CA 是$\odot O$ 的切线，此时 $y=4$.

而 $OE=BE-OB=\frac{1}{2}(8+4)-4=2$.

$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-6^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore\text{tg}OAE=\frac{OE}{AE}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

题 195 如图 12 - 75 所示，一边靠校园院墙，其它三边用 40m 长的篱笆围成一个矩形花圃，设矩形 $ABCD$ 的边 $AB=x$m，面积为 Sm^2.

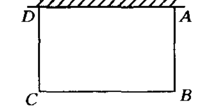


图 12 - 75

(1)求 S 与 x 之间的函数关系式，并求当 $S=200$m^2 时 x 的值；

(2)设矩形的边 $BC=y$m，如果 x、y 满足关系式 $x:y=y:(x+y)$，即矩形成黄金矩形，求此黄金矩形的长和宽.

解 (1)$\because AB+BC+CD=40$，又 $AB=DC$，$\therefore BC=40-2x$.

$\therefore S=AB\cdot BC=x(40-2x)=-2x^2+40x$.

即 S 与 x 的函数关系式为 $S=-2x^2+4x$.

将 $S=200$ 代入上式，得 $-2x^2+40x-200=0$. 解得 $x_1=x_2=10$.

即当 $S=200$m^2 时，$x=10$m.

(2)根据题意，得

$$\begin{cases} x:y=y:(x+y), & ① \\ 2x+y=40. & ② \end{cases}$$

由②得 $y=40-2x$ 代入①，得 $x^2-40x+320=0$.

解这个一元二次方程，得 $x_{1,2}=20\pm4\sqrt{5}$.

当 $x_1=20+4\sqrt{5}$ 时，得 $2x=40+8\sqrt{5}>40$，不合题意，舍去；

当 $x_2=20-4\sqrt{5}$ 时，得 $y=8\sqrt{5}$.

$\therefore$ 黄金矩形的长 BC 为 $8\sqrt{5}$m，宽 AB 为 $(20-4\sqrt{5})$m.

第十三章　统计初步

题 1　什么叫总体、个体、样本、样本容量、样本平均数?

答　在统计里,我们把所要考察对象的全体叫做总体,其中的每一个考察对象叫做个体,从总体中所抽取的一部分个体叫做总体的一个样本,样本中个体的数目叫做样本的容量.我们把总体中所有个体的平均数叫做总体平均数,把样本中所有个体的平均数叫做样本平均数.

题 2　简述有关统计的几个基本概念.

答　(1)平均数:一般地,如果有 n 个数 $x_1,x_2\cdots,x_n$,那么

$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$,叫做这 n 个数的平均数.

(2)众数:在一组数据中,出现次数最多的数据叫做这组数据的众数.

(3)中位数:将一组数据按大小依次排列,把处在最中间位置上的一个数据(或最中间两个数据的平均数)叫做这组数据的中位数.

(4)方差:一组数据,各数据与它们的平均数 $\bar{x}$ 的差的平方的平均数,叫做方差.

(5)标准差:方差的算术平方根,叫做这组数据的标准差.

(6)画频率分布直方图的步骤:(1)计算最大值与最小值的差;(2)决定组距与组数;(3)决定分点;(4)列频率分布表;(5)画频率分布直方图.

题 3　简述有关求平均数的几个运算公式.

答　(1)一般公式:$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

(2)简化计算公式:$\bar{x}=\bar{x}'+a$.

(3)加权平均数计算公式:$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}$.

题 4　简述有关求方差的几个运算公式及使用特点.

答　(1)一般公式:$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$.适用于样本数据较小,且样本的平均数是整数;

(2)简化计算公式:$s^2=\frac{1}{n}[(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)-n\bar{x}^2]$.适用于样本数据较小,但样本

的平均数不是整数.

(3)简化计算公式：$s^2=\frac{1}{n}[(x_1'^2+x_2'^2+\cdots+x_n'^2)-n\,\overline{x}'^2]$. 适用于样本数据较大，且样本的平均数不是整数.

标准差的计算公式：$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2]}$

题5 为了了解参加某运动会的2000名运动员的年龄情况，从中抽查了100名运动员的年龄. 就这个问题来说，下面说法中正确的是(　　).

A. 2000名运动员是总体　　B. 每个运动员是个体

C. 100名运动员是所抽取的一个样本　　D. 样本的容量是100

解 所要考查对象不是运动员，而是他们的年龄情况，故A、B、C都不对. 故选择D.

题6 为了考查某地初中毕业生数学毕业会考的情况，从中抽查了400名考生的成绩. 在这个问题中，总体是指(　　).

A. 某地所有初中毕业生

B. 某地所有初中毕业生会考的数学成绩

C. 被抽查的400名考生

D. 被抽查的400名考生初中毕业会考的数学成绩

解 选择B.

题7 某中学初三学生李小明期中考试的七科成绩分别是：政治84分、语文80分、数学91分、物理79分、化学84分、外语76分、生理卫生80分，那么七科的平均成绩是(　　).

A. 80分　　B. 82分　　C. 82.5分　　D. 84分

解 取$a=80$分，则

$\overline{x}=\frac{1}{7}[(84-80)+(80-80)+(91-80)+(79-80)+(84-80)+(76-80)+(80-80)]+80=\frac{1}{7}(4+0+11-1+4-4+0)+80=\frac{14}{7}+80=82$. 故选择B.

题8 10名工人某天生产同一零件，生产的件数是15、17、14、10、15、17、17、16、14、12. 设其平均数为a，中位数为b，众数为c，则有(　　).

A. $a>b>c$　　B. $b>c>a$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

解 $a=\frac{1}{10}(15+17+14+10+15+17+17+16+14+12)=14.7$，

$b=15$，$c=17$，$\therefore c>b>a$，故选择D.

题9 如果一组数x_1、x_2、x_3、x_4、x_5的平均数是$\overline{x}$，则另一组数x_1、x_2+1、x_3+2、x_4+3、x_5+4的平均数是(　　).

A. $\overline{x}$　　B. $\overline{x}+2$　　C. $\overline{x}+\frac{5}{2}$　　D. $\overline{x}+10$

解 第二组数的平均数为

$\frac{1}{5}[x_1+(x_2+1)+(x_3+2)+(x_4+3)+(x_5+4)]$

$=\frac{1}{5}[(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+10]$

$=\frac{1}{5}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+2=\overline{x}+2$. 故选择B.

题10 若 x_1、x_2、x_3、…、x_n 的平均数是 $\overline{x}$，$\sqrt{2}x_1+\sqrt{3}$、$\sqrt{2}x_2+\sqrt{3}$、$\sqrt{2}x_3+\sqrt{3}$、…、$\sqrt{2}x_n+\sqrt{3}$ 的平均数是 $\overline{y}$，则 $\overline{y}$ 与 $\overline{x}$ 的关系式是(　　).

A. $\overline{y}=\overline{x}$　　B. $\overline{y}=\sqrt{2}\overline{x}+\sqrt{3}$

C. $\overline{y}=\sqrt{2}\overline{x}$　　D. $\overline{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{y}+\sqrt{3})$

解 $\overline{y}=\frac{1}{n}[(\sqrt{2}x_1+\sqrt{3})+(\sqrt{2}x_2+\sqrt{3})+(\sqrt{2}x_3+\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2}x_n+\sqrt{3})]$

$=\frac{1}{n}[\sqrt{2}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)+n\sqrt{3}]$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)+\sqrt{3}=\sqrt{2}\overline{x}+\sqrt{3}$.

故选择B.

题11 从测量所得数据中取出 m 个 a、n 个 b、p 个 c 组成一个样本，这个样本的平均数 $\overline{x}$ 是(　　).

A. $\frac{a+b+c}{3}$　　B. $\frac{m+n+p}{3}$　　C. $\frac{ma+nb+pc}{3}$　　D. $\frac{ma+nb+pc}{m+n+p}$

解 选择D.

题12 样本1、2、3、4、5的方差是(　　).

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

解 $\because\overline{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=\frac{1}{5}\times15=3$.

$\therefore s^2=\frac{1}{5}[(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2]$

$=\frac{1}{5}(4+1+0+1+4)=2$. 故选择C.

题13 若样本 $x_1+1,x_2+1,\cdots\cdots,x_n+1$ 的平均数为10，方差为2，则对于样本 $x_1+2,x_2+2,\cdots\cdots,x_n+2$ 下列结论正确的是(　　).

A. 平均数为10，方差为2　　B. 平均数为11，方差为3

C. 平均数为11，方差为2　　D. 平均数为12，方差为4

解 第二组数据中每一个数都比第一组数据对应的数大1，因此，平均数大1，平均数

为 11；每个数据增加或减少相同的数，方差不变，因此方差仍为 2，故选择 C.

题14 由小到大排列的一组数据 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5，其中每个数据都小于 -1，则样本 1、x_1、$-x_2$、x_3、$-x_4$、x_5 的中位数可以表示为（　　）.

A. $\frac{1+x_1}{2}$　　B. $\frac{x_2-x_1}{2}$　　C. $\frac{1+x_5}{2}$　　D. $\frac{x_3-x_4}{2}$

解 $\because x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<-1$，$\therefore x_1<x_3<x_5<1<-x_4<-x_2$，

$\therefore$ 中位数为 $\frac{1+x_5}{2}$，故选择 C.

题15 已知两个样本如下，那么（　　）.

甲：9.9　10.2　9.8　10.1　9.8　10　10.2

乙：10.1　9.6　10　10.4　9.7　9.9　10.3

A. $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}>s^2_{乙}$　　B. $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$

C. $\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}=s^2_{乙}$　　D. $\overline{x}_{甲}\neq\overline{x}_{乙}$

解 对于甲：取 $a_{甲}=10$，

则 $\overline{x}_{甲}=\frac{1}{7}[(9.9-10)+(10.2-10)+\cdots+(10.2-10)]+10=10.$

$\therefore s^2_{甲}=\frac{1}{7}[(9.9-10)^2+(10.2-10)^2+\cdots+(10.2-10)^2]$

$=\frac{1}{7}(0.01+0.04+\cdots+0.04)\approx 0.03.$

对于乙：取 $a_{乙}=10$，

则 $\overline{x}_{乙}=\frac{1}{7}[(10.1-10)+(9.6-10)+\cdots+(10.3-10)]+10=10.$

$\therefore s^2_{乙}=\frac{1}{7}[(10.1-10)^2+(9.6-10)^2+\cdots+(10.3-10)^2]$

$=\frac{1}{7}(0.01+0.16+\cdots+0.09)\approx 0.07.$

$\therefore \overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$.

故选择 B.

题16 在一次考试中抽查 10 名学生得分如下（单位：分）：

78　82　75　88　97　82　82　67　78　71

写出这个样本的样本容量、众数、中位数，并求出这个样本的平均数.

解 样本容量为 10，众数为 82 分，中位数为 80 分.

$\overline{x}=\frac{1}{10}\times(78+82+75+88+97+82+82+67+78+71)=80$（分）.

样本的平均数为 80 分.

题17 求下列各组数据的平均数：

(1) 14、26、53、37、30；

(2) −0.3、0.2、0.3、−0.4、0.6、0.3、0.5、−0.4；

(3) 51、53、60、58、49、62、59；

(4) 90、84、84、86、87、89、96、91、76.

解 (1)$\bar{x}=\frac{1}{5}(14+26+53+37+30)=\frac{1}{5}\times160=32$.

(2)$\bar{x}=\frac{1}{8}[(-0.3)+0.2+0.3+(-0.4)+0.6+0.3+0.5+(-0.4)]$

$=\frac{1}{8}\times0.8=0.1$.

(3)取 $a=55$，则

$\bar{x}=\frac{1}{7}[(51-55)+(53-55)+\cdots+(59-55)]+55$

$=\frac{1}{7}(-4-2+5+\cdots+4)+55=\frac{1}{7}\times7+55=56$.

(4)取 $a=90$，则

$\bar{x}=\frac{1}{9}[(90-90)+(84-90)+\cdots+(76-90)]+90$

$=\frac{1}{9}[0+(-6)+\cdots+(-14)]+90=\frac{1}{9}\times(-27)+90=87$.

题 18 求下列各组数据的方差：

(1) 7、8、11、14、15； (2) −2、0、−1、2、1；

(3) 1、−3、−2、3、4、−2、1(精确到 0.1)；

(4) 50、47、44、46、48、49、40、43、46、44(精确到 0.1).

解 (1)$\because\bar{x}=\frac{1}{5}(7+8+11+14+15)=\frac{1}{5}\times55=11$，

$\therefore s^2=\frac{1}{5}[(7-11)^2+(8-11)^2+(11-11)^2+(14-11)^2+(15-11)^2]$

$=\frac{1}{5}\times50=10$.

(2)$\because\bar{x}=\frac{1}{5}(-2+0-1+2+1)=\frac{1}{5}\times0=0$，

$\therefore s^2=\frac{1}{5}[(-2-0)^2+(0-0)^2+(-1-0)^2+(2-0)^2+(1-0)^2]$

$=\frac{1}{5}\times10=2$.

(3)$\because\bar{x}=\frac{1}{7}[1+(-3)+\cdots+1]=\frac{1}{7}\times2=\frac{2}{7}$，

$\therefore s^2=\frac{1}{7}\left\{[1^2+(-3)^2+\cdots+1^2]-7\times\left(\frac{2}{7}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{7}\left[(1+9+\cdots+1)-\frac{4}{7}\right]=\frac{1}{7}\left(44-\frac{4}{7}\right)\approx6.2$.

(4)取 $a=45$，则得到新的一组数据为：5、2、−1、1、3、4、−5、−2、1、−1.

$\because \overline{x'}=\frac{1}{10}[5+2+\cdots+(-1)]=\frac{1}{10}\times 7=0.7,$

$\therefore s^2=\frac{1}{10}\{[5^2+2^2+\cdots+(-1)^2]-10\times 0.7^2\}$

$=\frac{1}{10}[(25+4+\cdots+1)-4.9]=\frac{1}{10}\times(87-4.9)\approx 8.2.$

题 19 甲、乙两组数据如下：

甲：10、9、11、8、12、13、10、7；

乙：7、8、9、10、11、12、11、12.

分别计算出这两组数据的方差，并说明哪一组数据波动较小.

解 $\bar{x}_{甲}=\frac{1}{8}(10+9+11+8+12+13+10+7)=10,$

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{8}(7+8+9+10+11+12+11+12)=10.$

$s_{甲}{}^2=\frac{1}{8}[(10-10)^2+(9-10)^2+(11-10)^2+(8-10)^2+(12-10)^2+(13-10)^2+(10-10)^2+(7-10)^2]=\frac{1}{8}\times 28=3.5.$

$s_{乙}{}^2=\frac{1}{8}[(7-10)^2+(8-10)^2+(9-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2+(11-10)^2+(12-10)^2]=\frac{1}{8}\times 24=3.$

$\because 3.5>3$，即 $\therefore s_{甲}{}^2>s_{乙}{}^2$，∴数据乙的波动小.

题 20 求下列各组数据的标准差：

(1) −1、2、0、−3、−2、3、1；　　(2) 8、10、12、9、11（结果精确到 0.1）.

解 (1) $\because \bar{x}=\frac{1}{7}(-1+2+0-3-2+3+1)=\frac{1}{7}\times 0=0,$

$\therefore s=\sqrt{\frac{1}{7}[(-1-0)^2+(2-0)^2+\cdots+(1-0)^2]}$

$=\sqrt{\frac{1}{7}(1+4+\cdots+1)}=\sqrt{\frac{1}{7}\times 28}=\sqrt{4}=2.$

(2) $\because \bar{x}=\frac{1}{5}(8+10+12+9+11)=\frac{1}{5}\times 50=10,$

$s=\sqrt{\frac{1}{5}[(8-10)^2+(10-10)^2+\cdots+(11-10)^2]}$

$=\sqrt{\frac{1}{5}(4+0+\cdots+1)}=\sqrt{\frac{1}{5}\times 10}=\sqrt{2}\approx 1.4.$

题 21 已知一个样本 1、3、2、5、x，它的平均数是 3，求这个样本的标准差是多少.

解 $\because \bar{x}=\frac{1}{5}(1+3+2+5+x)=3$，$\therefore x=4$. ∴数组为 1、3、2、5、4.

由题 12 知 $s^2=2$，$\therefore s=\sqrt{s^2}=\sqrt{2}$.

题22　某校初三(1)班的甲、乙两组在一次数学测验中，甲组 12 人的平均分数为 70 分，乙组 8 人的平均分数为 80 分，求这两组的平均分.

解　$\bar{x}=\dfrac{70\times12+80\times8}{12+8}=74$(分).

答:这两组的平均分为 74 分.

题23　某林场管辖 125 个山头，为了调查这些山上木材储存量，调查了 10 个山头，每个山头成材棵数如下：

180　258　729　703　540　740　932　828　690　400

若平均每棵树产木材 0.2 立方米，那么估计一下这些山上木材储存量大约是多少立方米?

解　$\bar{x}=\dfrac{1}{10}(180+258+\cdots+400)=600$,

$0.2\times600\times125=15000$(立方米).

答:这些山上木材储存量大约是 15000 立方米.

题24　10 名同学，其中 2 人身高 165cm，3 人身高 166cm，1 人身高 164cm，4 人身高 162cm，求平均身高及众数.

解　平均身高为$\dfrac{1}{10}(2\times165+3\times166+1\times164+4\times162)=164$cm.

众数为 162cm.

题25　有一个样本，各个数据的和为 404，如果这个样本的平均数是 4，求它的容量是多少.

解　$4n=404$，$\therefore n=101$，即样本容量为 101.

题26　在一个样本中，50 个数据分别落在 5 个组内，第一、二、三、五组的数据个数分别为 2，8，15，5，求第四组的频数和频率.

解　第四组的频数为 $50-(2+8+15+5)=20$，频率为$\dfrac{20}{50}=0.4$.

题27　为了分析某县初中升高中英语考试情况，今抽查了 100 份英语试卷，成绩如下(单位:分)：

64　55　47　78　12　18　62　73　49　58
57　84　67　46　26　86　49　68　10　63
97　27　76　60　51　53　71　37　90　69
55　64　84　72　67　56　67　59　54　48
62　53　51　66　80　53　79　64　54　77
76　37　50　42　33　52　83　95　89　68
58　66　70　21　65　63　48　68　33　46
75　58　86　93　20　68　56　61　67　79

52 57 40 35 75 69 70 63 65 71

79 34 67 86 15 80 25 54 60 63

列出样本的频率分布表，绘出频率分布直方图.

解 (1)计算最大值与最小值的差：97－10＝87(分)；

(2)决定组距与组数：取组距为 10 分，$\frac{87}{10}=8.7$，取组数为 9；

(3)决定分点：9.5～19.5，19.5～29.5，…，89.5～99.5；

(4)列频率分布表：

分　组	频数累计	频　数	频　率
9.5～19.5	𠄌F	4	0.04
19.5～29.5	正	5	0.05
29.5～39.5	正一	6	0.06
39.5～49.5	正𠄌F	9	0.09
49.5～59.5	正正正正一	21	0.21
59.5～69.5	正正正正正丅	27	0.27
69.5～79.5	正正正	15	0.15
79.5～89.5	正𠄌F	9	0.09
89.5～99.5	𠄌F	4	0.04
合　计		100	1.00

(5)绘频率分布直方图：

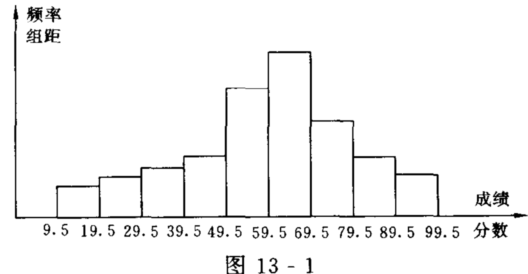


图 13 - 1

第二部分 几何篇

第一章 线段、角

题1 几何学是研究什么的学科?

答 如果不考虑构成物体的物质,只研究物体的形状、大小和位置,就形成关于物体形状的相同和不同、大小相等和不等或者两个物体距离的远近等等关系. 像这样,完全抛开物体的物质特性,只考虑物体的形状、大小和位置,我们称之为物体的空间性质或称为图形性质. 几何学就是研究物体的空间性质的学科.

题2 简述直线、射线、线段的区别和联系.

答 联系:线段是直线上两点和它们之间的部分,射线是直线上一点和它一旁的部分,它们都是直线的一部分.

区别:线段有两个端点,射线只有一个端点,直线无端点.

题3 简述角的定义.

答 角的定义有两种:

(1) 有公共端点的两条射线所组成的图形叫做角,这个公共端点叫做角的顶点,这两条射线叫做角的边.

(2) 一条射线绕其端点旋转所形成的图形叫做角.

题4 简述角的分类.

答 根据角的大小,可以把角分成不同的类:周角 $\alpha=360°$,平角 $\alpha=180°$,直角 $\alpha=90°$;大于直角而小于平角的角叫钝角;小于直角而大于 0°的角叫锐角.

题5 如图 1-1,直线 l 上有四点 A、B、C、D,则射线共有(　　).

A. 2 条　　B. 4 条

C. 6 条　　D. 8 条

A　B　C　D　l

图 1-1

解 以 A 点为端点的射线有两条,以 B 点为端点的射线有两条,以 C、D 为端点的射线也各有两条,因此共有八条.

∴选择 D.

题6 如图 1 - 2，B、C 是线段 AD 上任意两点，M 是 AB 中点，N 是 CD 中点，若 $MN=a$，$BC=b$，则 AD 的长为（ ）.

A. $2a-b$ B. $a-b$

C. $a+b$ D. 以上都不对

A M B C N D

图 1 - 2

解 ∵$MN=a$，$BC=b$，

∴$MB+CN=MN-BC=a-b$.

又∵M、N 为 AB、CD 的中点，∴$AM=MB$，$CN=ND$.

∴$AM+ND=MB+CN=a-b$.

∴$AD=AM+ND+MN=a-b+a=2a-b$. ∴选择 A.

题7 如图 1 - 3，AOB 为一直线，OC、OD、OE 是射线，则图中大于 0°小于 180°的角有（ ）.

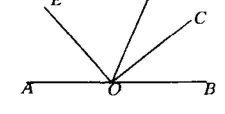


图 1 - 3

A. 5 个 B. 4 个

C. 9 个 D. 10 个

解 图中大于 0°小于 180°的角有$\angle BOC$、$\angle BOD$、$\angle BOE$、$\angle COD$、$\angle COE$、$\angle COA$、$\angle DOE$、$\angle DOA$、$\angle EOA$ 共 9 个. ∴选择 C.

题8 如图 1 - 4，如果延长线段 AB 到 C，使 $BC=\frac{1}{4}AB$，D 为 AC 中点，$DC=2.5$，则 AB 的长是（ ）.

A. 5 B. 3

C. 13 D. 4

A D B C

图 1 - 4

解 ∵$AD=DC$，∴$AC=5$.

又 $BC=\frac{1}{4}AB$，∴$\frac{1}{4}AB+AB=AC$.

∴$\frac{5}{4}AB=5$， ∴$AB=4$. ∴选择 D.

题9 $\angle\alpha$ 的补角是 142°，$\angle\beta$ 的余角是 42°，则$\angle\alpha$ 和$\angle\beta$ 的大小关系是（ ）.

A. $\angle\alpha>\angle\beta$ B. $\angle\alpha<\angle\beta$ C. $\angle\alpha=\angle\beta$ D. 不能确定

解 $\angle\alpha$ 的补角是 142°，所以$\angle\alpha=180°-142°=38°$.

$\angle\beta$ 的余角是 42°，所以$\angle\beta=90°-42°=38°$. ∴$\angle\alpha=\angle\beta$. ∴选择 C.

题10 如图 1 - 5，OB 平分$\angle AOC$，OD 平分$\angle COE$，$\angle 1=20°$，$\angle AOE=88°$，则$\angle 3$ 的度数为（ ）.

A. 24° B. 68°

C. 28° D. 20°

解 ∵OB 平分$\angle AOC$，

$\therefore \angle 1=\angle BOC=20°$.

$\therefore \angle EOC=\angle EOA-\angle COA$

$=88°-2\times 20°=48°$.

又 OD 平分 $\angle EOC$，

$\therefore \angle 3=\angle EOD=\frac{1}{2}\angle EOC=24°$.

∴应选 A.

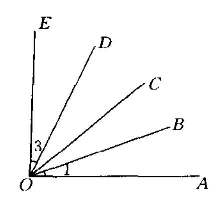


图 1 - 5

题 11　如图 1 - 6，OB、OC 是 $\angle AOD$ 的任意两条射线，OM 平分 $\angle AOB$，ON 平分 $\angle COD$，若 $\angle MON=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，则表示 $\angle AOD$ 的代数式为(　　).

A. $2\alpha-\beta$　　　B. $\alpha-\beta$

C. $\alpha+\beta$　　　D. 2α

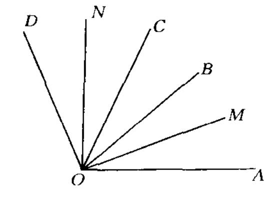


图 1 - 6

解　$\because \angle MON=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，

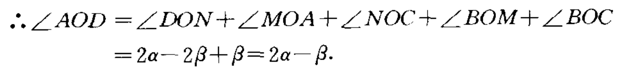
$\therefore \angle NOC+\angle BOM=\angle MON-\angle BOC=\alpha-\beta$.

又 OM 平分 $\angle AOB$，ON 平分 $\angle COD$，

$\therefore \angle DON=\angle NOC$，$\angle BOM=\angle MOA$，

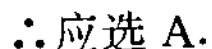
$\therefore \angle DON+\angle MOA=\angle NOC+\angle BOM$

$=\alpha-\beta$，



$\therefore \angle AOD=\angle DON+\angle MOA+\angle NOC+\angle BOM+\angle BOC$

$=2\alpha-2\beta+\beta=2\alpha-\beta$.



∴应选 A.

题 12　求证：在长为 1 的线段 AB 内任标出 3 个点，则分线段 AB 所成的四个小线段 AA_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3B 中，至少有一条的长度不超过 $\frac{1}{4}$.

证明　假设四条小线段 AA_1、A_1A_2、A_2A_3、A_3B 中，每条线段的长度都超过 $\frac{1}{4}$，即 $AA_1>\frac{1}{4}$、$A_1A_2>\frac{1}{4}$、$A_2A_3>\frac{1}{4}$、$A_3B>\frac{1}{4}$，

A　A_1　A_2　A_3　B

图 1 - 7

$\therefore AA_1+A_1A_2+A_2A_3+A_3B>\frac{1}{4}\times 4=1$.

即　$AB>1$，这是不可能的. 所以四条线段至少有一条不超过 $\frac{1}{4}$.

题 13　如图 1 - 8，$\angle AOC=\angle BOC$

求证：$\frac{1}{2}(\angle AOD-\angle BOD)=\angle COD$.

证明　$\angle COD=\angle AOD-\angle AOC$，

又 $\because \angle AOC=\angle BOC$，

$\therefore \angle COD=\angle AOD-\angle BOC$，

又$\angle BOC=\angle COD+\angle BOD$，

$\therefore \angle COD=\angle AOD-(\angle COD+\angle BOD)$，

$\therefore \angle COD=\angle AOD-\angle COD-\angle BOD$.

$\therefore 2\angle COD=\angle AOD-\angle BOD$，

$\therefore \angle COD=\frac{1}{2}(\angle AOD-\angle BOD)$.

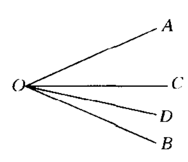


图 1 - 8

题 14 计算下列各题：

(1)$133°19'42''+26°40'28''$；(2)$90°3''-57°21'44''$；

(3)$33°15'16''\times 5$；　　(4)$175°16'30''-47°30'\div 6+4°12'50''\times 3$.

解 (1) $133°19'42''+26°40'28''=159°+59'+70''$

$=159°+60'+10''=160°10''$.

(2) $90°3''-57°21'44''=89°59'63''-57°21'44''=32°38'19''$；

(3) $33°15'16''\times 5=165°+75'+80''=165°+76'+20''=166°16'20''$；

(4) $175°16'30''-47°30'\div 6+4°12'50''\times 3$

$=175°16'30''-7°-330'\div 6+12°36'150''$

$=175°16'30''-7°-55'+12°38'30''$

$=187°54'60''-7°55'=180°$.

题 15 一个角的补角加上 10°后等于这个角的余角的 3 倍，求：这个角的余角.

解 设这个角为 $x°$，则它的余角为$(90-x)°$，补角为$(180-x)°$.

依题意有 $180-x+10=3(90-x)$，

整理得 $2x=80$，$\therefore x=40$.

$\therefore$它的余角为 $90°-40°=50°$.

说明 有关余角和补角的计算题目，常设未知数，根据题意列方程或方程组去解；所设未知数不同，所得方程也不同，设一个未知数列一个方程，设两个未知数，列两个方程，总之设几个未知数，需列几个方程. 下面我们再给两种解法.

另解一 设这个角的余角为 $x°$，则这个角为$(90-x)°$，补角为$[180-(90-x)]°$.

依题意有 $90+x+10=3x$，

$\therefore$ $2x=100$，$\therefore x=50$.

另解二 设这个角为 $x°$，余角为 $y°$，补角为 $z°$.

依题意有

$$\begin{cases}x+y=90,\\x+z=180,\\z+10=3x.\end{cases}$$ 解得 $y=50$.

题 16 一个锐角的补角与这个锐角的余角的差是(　　).

A. 平角　　B. 直角　　C. 钝角　　D. 锐角

解　设此锐角为 α，则它的补角为 $180°-\alpha$，余角为 $90°-\alpha$.

则 $(180°-\alpha)-(90°-\alpha)=180°-\alpha-90°+\alpha=90°$. ∴应选 B.

题 17　一个角等于它的补角的 5 倍，那么这个角的补角的余角是(　　).

A. 30°　　B. 60°　　C. 45°　　D. 150°

解　设这个角为 α，则它的补角为 $180°-\alpha$，依题意，有

$\alpha=5(180°-\alpha)$，∴ $\alpha=150°$.

则 150°角的补角的余角为 60°. ∴应选 B.

题 18　如果∠1 和∠2 是邻补角，且∠1>∠2，那么∠2 的余角是(　　).

A. $\frac{1}{2}(\angle 1\pm\angle 2)$　　B. $\frac{1}{2}\angle 1$

C. $\frac{1}{2}(\angle 1-\angle 2)$　　D. $\frac{1}{2}\angle 2$

解　∵∠1 和∠2 是邻补角，

∴ $\angle 1+\angle 2=180°$，∴ $\angle 2=180°-\angle 1$.

∴∠2 的余角为 $90°-\angle 2=90°-(180°-\angle 1)=\angle 1-90°$，

∵ $\angle 1+\angle 2=180°$，

∴ $\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)=90°$，

∴ $90°-\angle 2=\angle 1-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)=\frac{1}{2}(\angle 1-\angle 2)$. ∴应选 C.

题 19　如果 $\alpha+\beta=100°40'$，$\alpha-\beta=20°$，求出角 α 的补角与角 β 的余角各是多少度？

解　∵ $\alpha+\beta=100°40'$，$\alpha-\beta=20°$，∴ $\alpha=60°20'$，$\beta=40°20'$.

∴角 α 的补角是 $119°40'$，角 β 的余角是 $49°40'$.

题 20　已知：如图 1 - 9，OE、OD 分别平分∠AOB 和∠BOC，若∠AOB=90°，∠EOD=70°，求：∠BOC 的度数.

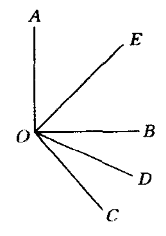


图 1 - 9

解　∵OE 平分∠AOB，

∴ $\angle EOB=\frac{1}{2}\angle AOB=45°$.

又∵ $\angle EOD=70°$，

∴ $\angle BOD=\angle EOD-\angle EOB=25°$.

又∵OD 平分∠BOC，

∴ $\angle BOC=2\angle BOD=50°$.

题 21　已知线段 $AB=100\text{cm}$，M 为 AB 的中点，在 AB 所在的直线上有一点 P，N 为 AP 的中点，若 $MN=15\text{cm}$，求：AP 的长.

解 据题意，N 点可在 M 点的左侧或右侧.

图 1-10

(1)若 N 点在 M 点左侧(如图)，则

$$AP=2AN=2\times(AM-NM)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}AB-NM\right)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times100-15\right)=70(\text{cm}).$$

(2)若 N 点在 M 点的右侧(如图)，则

$$AP=2AN=2\times(AM+MN)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}AB+MN\right)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times100+15\right)=130(\text{cm}).$$

答:AP 的长为 70cm 或 130cm.

题 22 有三条线段 a、b、c，已知它们间的长度关系为:a 是 b 的 $\frac{2}{3}$，c 是 b 的 $\frac{3}{2}$，求：a、c 的关系.

解 $\because c=\frac{3}{2}b$，$\therefore b=\frac{2}{3}c$.

又 $\because a=\frac{2}{3}b$，

$\therefore a=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}c=\frac{4}{9}c$ 或 $c=\frac{9}{4}a$.

题 23 设相邻两个角 $\angle AOB$、$\angle BOC$ 的平分线分别为 OM、ON，且 $OM\perp ON$，求证:OA、OC 成一条直线.

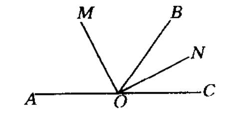


图 1-11

证明 根据题意，得

$\angle AOM=\angle MOB$，$\angle BON=\angle NOC$，

$\angle MON=90°$，

$\therefore \angle MOB+\angle BON=90°$.

$\therefore (\angle AOM+\angle MOB)+(\angle BON+\angle NOC)$

$=2\times90°=180°$，

即 $\angle AOB+\angle BOC=180°$，

$\angle AOC=180°$，

$\therefore AO$、OC 成一条直线.

题 24 已知 $\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 互为补角，并且 $2\beta-\alpha=15°$，求:$\angle\alpha$ 和 $\angle\beta$ 的差是多少度?

解 根据题意，得 $\alpha+\beta=180°$，

又 $2\beta-\alpha=15°$，

解得 $\alpha=65°$，$\beta=65°$，

$\therefore \alpha-\beta=50°$.

答:两角的差为 50°.

题 25 已知:如图 1 - 12,$AM=BM$,P 为 AM 上一点.

图 1 - 12

求证:$PM=\frac{1}{2}(PB-AP)$.

证明 $\because PM=PB-MB$,

又$\because AM=BM$,

$\therefore PM=PB-AM$,

又 $AM=AP+PM$,

$\therefore PM=PB-(AP+PM)$,

$\therefore PM=PB-AP-PM$.

$\therefore 2PM=PB-AP$,

$\therefore PM=\frac{1}{2}(PB-AP)$.

第二章　相交线　平行线

题 1　试述两点间的距离，点到直线的距离，平行线间的距离的概念.

答　连结两点的线段的长叫两点间的距离.

从直线外一点向这条直线引垂线，该点与垂足之间线段的长叫点到直线的距离.

从两条平行线中一条上的任意一点向另一条引垂线，该点与垂足之间线段的长叫平行线间的距离.

题 2　试述平行线公理.

答　过已知直线外一点，有且只有一条直线与已知直线平行.

题 3　如图 2－1，AB、CD 为直线，则图中对顶角共有（　　）.

A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 4 对

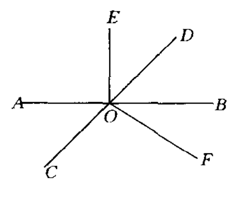


图 2－1

解　由对顶角定义，对顶角是两条直线相交构成的，因此，图中只有$\angle AOC$与$\angle BOD$和$\angle AOD$与$\angle COB$两对对顶角.

∴应选 B.

题 4　已知：如图 2－2，$AD\perp BC$ 于 D，$DE/\!/AB$，交 AC 于 E，则$\angle CDE$与$\angle BAD$的关系是（　　）.

A. 互为余角　　　　B. 互为补角

C. 相等　　　　　　D. 不能确定

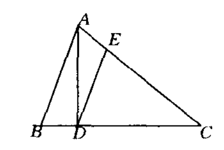


图 2－2

解　$\because DE/\!/AB$，$\therefore \angle BAD=\angle ADE$.

又$\because AD\perp BC$ 于 D，$\therefore \angle ADC=90°$，

又$\angle ADE+\angle CDE=90°$，

即$\angle BAD+\angle CDE=90°$，

$\therefore \angle CDE$、$\angle BAD$ 互为余角，∴应选 A.

题 5　下列说法中，不正确的是（　　）.

A. 在同一平面内，已知直线 a 和 a 外一点 P，则过 P 点的所有直线中，有且只有一条直线与 a 平行，有且只有一条直线与 a 垂直

B. 两直线平行，则同旁内角互补

C. 如果两个角不相等,那么这两个角一定不是对顶角

D. 所有的补角都相等

解 在D中,只有同角或等角的补角才相等,因此D是错误的.

∴应选D.

题6 在同一平面内,直线a、b相交于P,$a/\!/c$,b与c的关系是(　　).

A. 平行　　B. 相交　　C. 重合　　D. 平行或相交

解 在同一个平面内的两条直线的位置关系只有两种:相交或平行. 若$b/\!/c$,由已知$a/\!/c$,所以$a/\!/b$. 这与已知a与b交于P矛盾,故b与c只能相交.

∴应选B.

题7 如图2-3,图中显示的同旁内角共有(　　).

A. 7对　　B. 8对　　C. 9对　　D. 10对

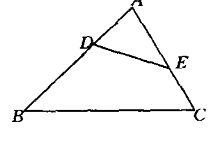


图2-3

解 图中的同旁内角有$\angle A$和$\angle ADE$、$\angle A$和$\angle AED$、$\angle A$和$\angle B$、$\angle A$和$\angle C$、$\angle ADE$和$\angle AED$、$\angle B$和$\angle BDE$、$\angle C$和$\angle DEC$、$\angle BDE$和$\angle DEC$、$\angle B$和$\angle C$. ∴应选C.

题8 平面上三条直线,它们的交点个数可能是(　　).

A. 1或3　　B. 0或1或3

C. 0或1或2　　D. 0或1或2或3

解 如图2-4,平面上的三条直线可能的位置关系有:

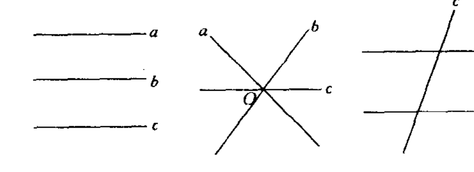


图2-4

交点可能情况为0或1或2或3. ∴应选D.

题9 下列说法中,正确的个数是(　　).

(1)在同一平面内不相交的两条线段必平行;

(2)在同一平面内不相交的两条直线必平行;

(3)在同一平面内不平行的两条线段必相交;

(4)在同一平面内不平行的两条直线必相交.

A. 4个　　B. 3个　　C. 2个　　D. 1个

解 其中(2)、(4)是正确的. ∴应选C.

题10 如果两条平行线被第三条直线所截,那么一组同位角的平分线的位置关系

是(　　).

A. 互相垂直　　B. 互相平行

C. 相交但不垂直　D. 以上都不正确

解　如图 2-5,平行线 AB、CD 被 EF 所截,同位角 $\angle EGB$ 与 $\angle GHD$ 相等,又 GM、HN 分别为角平分线,所以 $\angle 1=\angle 2$,∴ $GM /\!/ HN$. ∴应选 B.

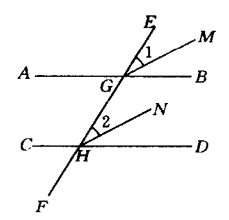


图 2-5

题 11　如果两个角的一边在同一直线上,另一边互相平行,那么这两个角只能(　　).

A. 相等　　B. 互补

C. 相等或互补　　D. 相等且互补

解　如图 2-6,$CE /\!/ DF$,则 $\angle 1$ 与 $\angle 2$,$\angle 1$ 与 $\angle 3$ 都满足题中条件,所以这两个角可能相等或互补.

∴应选 C.

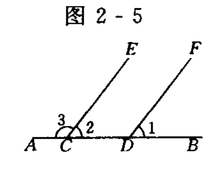


图 2-6

题 12　α 和 β 是同旁内角,若 $\alpha=50°$,则 β 的度数为(　　).

A. 50°　　B. 130°

C. 50°或 130°　　D. 不能确定

解　由于没有两条直线平行的条件. 因此同旁内角的数量关系是不确定的. ∴应选 D.

题 13　两条平行线被第三条直线所截,则下列结论中(　　).

(1)一对同位角的角平分线互相平行;

(2)一对内错角的角平分线互相平行;

(3)一对同旁内角的角平分线互相平行.

A. 都正确　B. 只有一个正确　C. 只有一个不正确　D. 都不正确

解　如图 2-7,平行线 AB、CD 被直线 EF 所截,由图可知,同位角及内错角的角平分线平行,同旁内角的角平分线互相垂直.

∴应选 C.

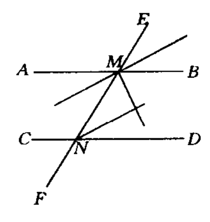


图 2-7

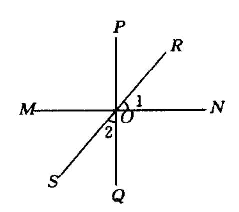


图 2-8

题 14 如图 2 - 8,已知直线 MN 和 PQ 互相垂直,O 是垂足,RS 是过 O 点的直线,$\angle 1=50°$,则$\angle 2$ 是(　　).

A. 50°　　B. 40°　　C. 60°　　D. 以上都不对

解 ∵MN 与 PQ 互相垂直,∴$\angle PON=90°$.

又∵$\angle 1=50°$,　∴$\angle POR=40°$,又∵$\angle POR=\angle 2$(对顶角相等),

∴$\angle 2=40°$. ∴应选 B.

题 15 如图 2 - 9,已知 $AB/\!/CD$,$HI/\!/FG$,$EF\perp CD$,$\angle 1=40°$,那么$\angle EHI$ 为(　　).

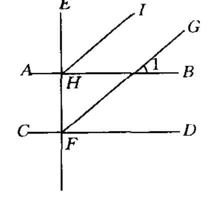


图 2 - 9

A. 40°　　B. 45°　　C. 50°　　D. 55°

解 ∵$AB/\!/CD$,∴$\angle 1=\angle GFD=40°$.

又∵$CD\perp EF$,

∴$\angle HFD=90°$,∴$\angle HFG=50°$.

又∵$HI/\!/FG$,∴$\angle EHI=\angle HFG=50°$.

∴应选 C.

题 16 如图 2 - 10,$CD/\!/AB$,OE 平分$\angle AOD$,$OF\perp OE$,$\angle D=50°$,则$\angle BOF$ 为(　　).

图 2 - 10

A. 35°　B. 30°　C. 25°　D. 20°

解 ∵OE 平分$\angle AOD$,∴$\angle AOE=\angle EOD$.

又∵$OE\perp OF$,∴$\angle EOF=90°$.

又∵AOB 是直线,

∴$\angle AOE+\angle FOB=90°$.

又$\angle EOD+\angle DOF=90°$,

∴$\angle DOF=\angle FOB$,

又∵$AB/\!/CD$,

∴$\angle D=\angle DOB=50°$. ∴$\angle DOF=\angle BOF=25°$.

∴应选 C.

题 17 如图 2 - 11,若$\angle 1=\angle 2$,则在结论:①$\angle 3=\angle 4$,②$AB/\!/CD$,③$AD/\!/BC$ 中(　　).

A. 三个都正确　　B. 只有一个正确

C. 三个都不正确　D. 只有一个不正确

解 ∵$\angle 1=\angle 2$,∴$AB/\!/CD$,上述结论中只有一个是正确的.

∴应选 B.

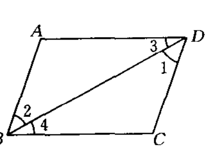
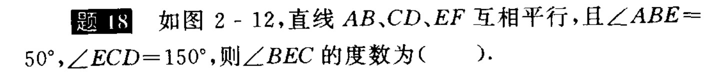


图 2 - 11



题 18 如图 2 - 12,直线 AB、CD、EF 互相平行,且$\angle ABE=50°$,$\angle ECD=150°$,则$\angle BEC$ 的度数为(　　).

A. 50°　　B. 30°　　C. 20°　　D. 60°

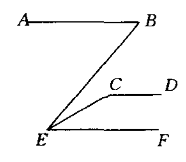


图 2 - 12

解　∵$AB /\!/ EF$，∴$\angle ABE=\angle BEF=50°$.

又∵$CD /\!/ EF$，∴$\angle ECD+\angle CEF=180°$.

∵$\angle ECD=150°$，∴$\angle CEF=30°$，

∴$\angle BEC=20°$.　∴应选 C.

题 19　有下列四个命题：

(1) 对顶角的平分线是一条直线；

(2) 一个锐角与另一个钝角的和必等于一个平角；

(3) 同角的余角相等；

(4) 平行于一条直线的两条直线平行.

其中真命题有(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

解　命题(1)、(3)是正确的，因此是真命题.　∴应选 B.

题 20　如果两个角的两边分别平行，而其中一个角比另一个角的 4 倍还多 5°，那么这两个角的度数是(　　).

A. 135°和 45°　B. 都是 90°　C. 145°和 35°　D. 155°和 25°

解　根据已知条件可知，这两个角互补，设其中的一个角的度数为 $x°$，则另一角的度数为$(4x+5)°$，因此有 $x+4x+5=180$.

∴$x=35$，另一个角为 135°.　∴应选 C.

题 21　如图 2 - 13，$FB\perp AB$，$EC\perp AB$，$\angle 1=\angle D=45°$，则图中与$\angle CED$ 相等的角共有(　　)个.

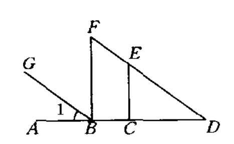


图 2 - 13

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

解　∵$FB\perp AD$，$EC\perp AD$，　∴$FB /\!/ EC$.

又$\angle 1=\angle D=45°$，∴$GB /\!/ FD$.

$\angle 1=45°$，∴$\angle FBG=45°$.

∵$GB /\!/ FD$，∴$\angle GBF=\angle BFD=45°$.

又 $FB /\!/ EC$，∴$\angle BFD=\angle CED=45°$，

∴与$\angle CED$ 相等的角共 4 个.　∴应选 B.

题 22　已知：如图 2 - 14，直线 AB、CD 交于 O，OE 平分$\angle BOD$，若$\angle 3:\angle 2=8:1$，求：$\angle AOC$ 的度数.

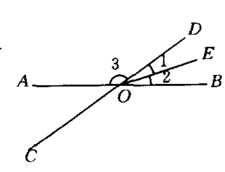


图 2 - 14

解　∵OE 平分$\angle BOD$，∴$\angle 1=\angle 2$.

∵$\angle 3:\angle 2=8:1$，

∴$\angle 3:\angle BOD=8:2=4:1$，

∴$\angle 3=4\angle BOD$.

∵$\angle 3+\angle BOD=180°$(邻补角定义)，

$\therefore 4\angle BOD+\angle BOD=5\angle BOD=180°$,

$\therefore \angle BOD=36°$.

$\because \angle AOC=\angle BOD$(对顶角相等),

$\therefore \angle AOC=36°$.

答:$\angle AOC$ 的度数是 $36°$.

题 23 已知:如图 2 - 15,$AO\perp BO$,OD 平分$\angle AOC$,$\angle BOC=3\angle AOD$.

求:$\angle DOC$ 的度数.

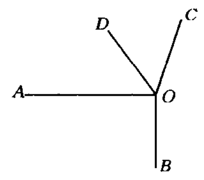


图 2 - 15

解 $\because AO\perp BO$(已知),

$\therefore \angle AOB=90°$(垂直定义).

$\because OD$ 平分$\angle AOC$(已知),

$\therefore \angle AOD=\angle DOC$(角平分线定义).

$\because \angle BOC=3\angle AOD$(已知),

$\therefore \angle BOC=3\angle DOC$.

$\because \angle AOB+\angle AOD+\angle DOC+\angle BOC=360°$(周角定义),

$\therefore 90°+\angle DOC+\angle DOC+3\angle DOC=360°$.

$\therefore 5\angle DOC=270°$,$\therefore \angle DOC=54°$.

题 24 已知:如图 2 - 16,直线 AB、CD 交于 O,$OE\perp AB$,OB 平分$\angle DOF$,若$\angle EOC=150°$,

求证:$\angle BOF=\angle FOC$.

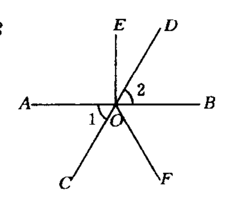


图 2 - 16

证明 $\because OE\perp AB$(已知),

$\therefore \angle AOE=90°$(垂直定义).

$\because \angle EOC=150°$(已知),

$\therefore \angle 1=\angle EOC-\angle AOE=150°-90°=60°$.

$\because OB$ 平分$\angle DOF$(已知),

$\therefore \angle BOF=\angle 2$(角平分线定义).

$\therefore \angle BOF=60°$.

又$\because \angle 1+\angle FOC+\angle BOF=180°$,

$\therefore \angle FOC=180°-\angle 1-\angle BOF=180°-60°-60°=60°$,

$\therefore \angle BOF=\angle FOC$.

题 25 已知:如图 2 - 17,$\angle ABC=\angle BCD$,BE、CF 分别平分$\angle ABC$ 和$\angle BCD$.

求证:$BE/\!/CF$.

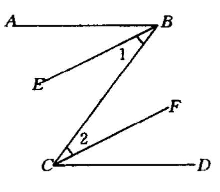


图 2 - 17

证明 $\because BE$、CF 分别平分$\angle ABC$、$\angle BCD$.

$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle BCD$.

$\because \angle ABC=\angle BCD$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore BE/\!/CF$（内错角相等，两直线平行）.

题 26 已知：如图 2 - 18，BD 平分$\angle ABC$，$\angle 1=\angle 2$.

求证：$DE/\!/BC$.

证明 $\because BD$ 平分$\angle ABC$，

$\therefore \angle 2=\angle 3$（角平分线定义）.

又$\because \angle 1=\angle 2$，　　$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\therefore DE/\!/BC$（内错角相等，两直线平行）.

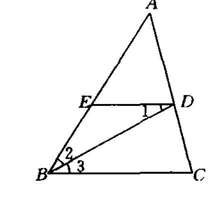


图 2 - 18

题 27 已知：如图 2 - 19，$AB/\!/CD$，$\angle ABE=130°$，$\angle CDE=152°$.

求：$\angle BED$ 的度数.

解 过 E 作 $EF/\!/AB$，则 $EF/\!/CD$.

$\because AB/\!/EF$，

$\therefore \angle ABE+\angle BEF=180°$.

同理$\angle CDE+\angle DEF=180°$.

$\therefore \angle BED=\angle BEF+\angle DEF$

$=180°-\angle ABE+180°-\angle CDE$

$=360°-(130°+152°)=78°$.

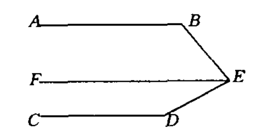


图 2 - 19

题 28 如图 2 - 20，$CD\perp AB$，垂足为 D，点 F 是 BC 上任意一点，$FE\perp AB$，垂足为 E，且$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=80°$.

求：$\angle BCA$ 的度数.

解 $\because EF\perp AB$，$CD\perp AB$，$\therefore EF/\!/CD$.

$\therefore \angle DCB=\angle 2$.

又$\because \angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle 1=\angle DCB$. $\therefore DG/\!/BC$.

$\therefore \angle BCA=\angle 3=80°$.

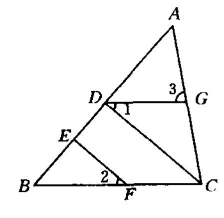
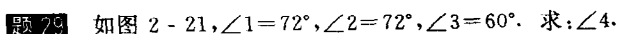


图 2 - 20


题 29 如图 2 - 21，$\angle 1=72°$，$\angle 2=72°$，$\angle 3=60°$. 求：$\angle 4$.

解 $\because \angle 1=72°$，$\angle 2=72°$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，$\therefore AB/\!/CD$.

$\therefore \angle 3+\angle 4=180°$（两直线平行，同旁内角互补）.

又$\angle 3=60°$，$\therefore \angle 4=120°$.

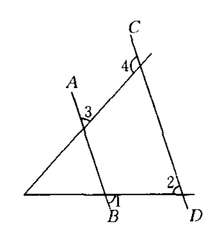


图 2 - 21

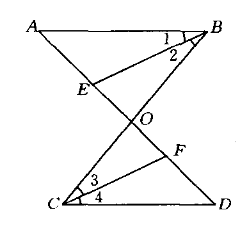


图 2 - 22

题 30 如图 2 - 22，$AB /\!/ CD$，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$.

求证：$BE /\!/ CF$.

证明 $\because AB /\!/ CD$（已知），

$\therefore \angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$（两直线平行，内错角相等）.

又$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore \angle 2=\angle 3$，

$\therefore BE /\!/ CF$（内错角相等，两直线平行）.

题 31 已知：如图 2 - 23，$AD \perp BC$，$EF \perp BC$，$\angle 4=\angle C$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

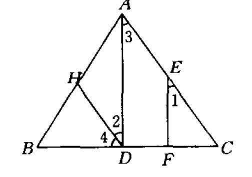


图 2 - 23

证明 $\because AD \perp BC$，$EF \perp BC$，

$\therefore AD /\!/ EF$（垂直于同一条直线的两直线平行），

$\therefore \angle 1=\angle 3$（两直线平行，同位角相等）.

又$\because \angle 4=\angle C$，

$\therefore AC /\!/ GD$（同位角相等，两直线平行），

$\therefore \angle 2=\angle 3$（两直线平行，内错角相等），

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

题 32 如图 2 - 24，$BE /\!/ AO$，$\angle 1=\angle 2$，$OE \perp OA$ 于 O，$EH \perp CD$ 于 H.

求证：$\angle 5=\angle 6$.

证明 $\because BE /\!/ AO$，

$\therefore \angle 2=\angle 5$（两直线平行，内错角相等）.

又$\because OE \perp OA$，

$\therefore \angle 2+\angle 3=90°$（垂直定义），

$\therefore \angle 5+\angle 3=90°$（等量代换）.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=180°$（平角定义），

而$\angle 2+\angle 3=90°$，

$\therefore \angle 1+\angle 4=90°$.

$\because \angle 1=\angle 2$，$\angle 2=\angle 5$，

$\therefore \angle 4+\angle 5=90^\circ$(等量代换).

又 $EH\perp OD$, $\therefore \angle 4+\angle 6=90^\circ$,

$\therefore \angle 5=\angle 6$(同角的余角相等).

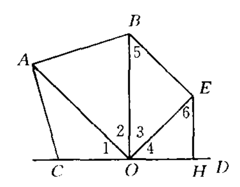


图 2 - 24

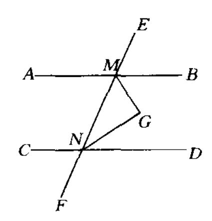


图 2 - 25

题 33　证明　两条平行线被第三条直线所截的一对同旁内角的角平分线互相垂直.

已知:如图 2 - 25, $AB/\!/CD$, $\angle BMN$ 与 $\angle MND$ 是一对同旁内角, MG、NG 分别是两个角的角平分线.

求证: $MG\perp NG$.

证明　$\because AB/\!/CD$,

$\therefore \angle BMN+\angle MND=180^\circ$(两直线平行,同旁内角互补).

又 $\because MG$、NG 为角平分线,

$\therefore \angle NMG=\frac{1}{2}\angle BMN$, $\angle MNG=\frac{1}{2}\angle MND$,

$\therefore \angle NMG+\angle MNG$

$=\frac{1}{2}(\angle BMN+\angle MND)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$,

$\therefore \angle MGN=90^\circ$.　$\therefore MG\perp NG$.

题 34　已知:如图 2 - 26, $\angle D=\angle 1$, $\angle E=\angle 2$, $DC\perp EC$.

求证: $AD/\!/BE$.

证明　过 C 点作 $CM/\!/AD$,则 $\angle 3=\angle D$.

$\because \angle D=\angle 1$, $\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\because DC\perp EC$,

$\therefore \angle 3+\angle 4=90^\circ$, $\angle 1+\angle 4=90^\circ$.

$\because \angle 1+\angle 3+\angle 4+\angle 2=180^\circ$,

$\therefore \angle 1+\angle 2=90^\circ$,

$\therefore \angle 4=\angle 2$,而 $\angle E=\angle 2$, $\therefore \angle 4=\angle E$,

$\therefore CM/\!/BE$, $\therefore AD/\!/BE$.

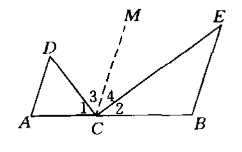


图 2 - 26

题 35　证明　一组对顶角的平分线互为反向延长线.

已知:如图 2 - 27,$\angle AOC$、$\angle BOD$ 是对顶角,OE 平分$\angle AOC$,OF 平分$\angle BOD$.

求证:OE、OF 互为反向延长线.

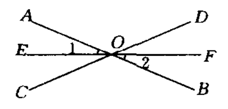


图 2 - 27

证明 ∵OE、OF 分别平分$\angle AOC$、$\angle BOD$.

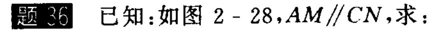
$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle 2=\frac{1}{2}\angle BOD$.

又∵$\angle AOC=\angle BOD$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.

∵AOB 为直线,$\therefore \angle AOF+\angle 2=180°$,

$\therefore \angle AOF+\angle 1=180°$, 即$\angle EOF=180°$.

∴OE、OF 互为反向延长线.



题36 已知:如图 2 - 28,$AM /\!/ CN$,求:

(1) $\angle MAB+\angle ABC+\angle BCN$ 的度数.

(2) $\angle MAE+\angle AEF+\angle EFC+\angle FCN$ 的度数.

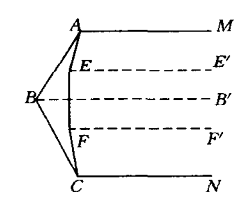


图 2 - 28

解 (1) 过 B 点作 $BB' /\!/ AM$,

则 $BB' /\!/ AM /\!/ CN$.

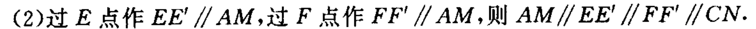
∵$AM /\!/ BB'$,$\therefore \angle MAB+\angle ABB'=180°$.

又∵$BB' /\!/ CN$,$\therefore \angle B'BC+\angle BCN=180°$.



$\therefore \angle MAB+\angle ABB'+\angle B'BC+\angle BCN=180°\times 2=360°$,

即$\angle MAB+\angle ABC+\angle BCN=360°$.



(2)过 E 点作 $EE' /\!/ AM$,过 F 点作 $FF' /\!/ AM$,则 $AM /\!/ EE' /\!/ FF' /\!/ CN$.

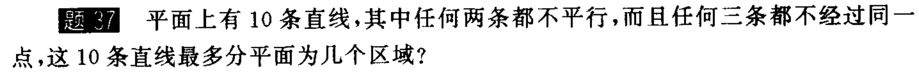
∵$AM /\!/ EE'$,$\therefore \angle MAE+\angle AEE'=180°$.

$EE' /\!/ FF'$,$\therefore \angle E'EF+\angle EFF'=180°$.

$FF' /\!/ CN$,$\therefore \angle F'FC+\angle FCN=180°$.

$\therefore \angle MAE+\angle AEE'+\angle E'EF+\angle EFF'+\angle F'FC+\angle FCN=180°\times 3$,

即$\angle MAE+\angle AEF+\angle EFC+\angle FCN=540°$.



题37 平面上有 10 条直线,其中任何两条都不平行,而且任何三条都不经过同一点,这 10 条直线最多分平面为几个区域?

解 ∵一条直线将平面分成 2 个区域,加上第二条直线,区域数增加 2,加上第三直线,区域数又增加 3……,加上第 10 条直线,区域数又增加 10.

∴10 条直线,按已知条件,将平面分成的区域数为 n.

则 $n=2+2+3+4+\cdots+10=1+(1+2+3+4+\cdots+10)=56$.

第三章　三　角　形

一、三角形的边角关系

题 1　试述三角形边与边之间的关系.

解　在一个三角形中,任何两边之和都大于第三边,任何两边之差都小于第三边.

题 2　试述三角形角与角之间的关系.

解　在三角形中,三个内角之和等于 $180°$. 三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角之和. 三角形的一个外角大于任何一个和它不相邻的内角.

题 3　试述三角形边与角的关系.

解　在一个三角形中,相等的边所对的角相等,相等的角所对的边也相等,不相等的边所对的角也不相等,其中较大的边所对的角也较大;不相等的角所对的边也不相等,其中较大的角所对的边也较大.

题 4　试述三角形的分类.

解　按角分可分为锐角三角形、直角三角形、钝角三角形. 按边分可分为不等边三角形和等腰三角形,其中等腰三角形又可分为腰和底边不等的等腰三角形与腰与底边相等的等边三角形.

题 5　如果三角形的一个角等于其它两个角的差,则这个三角形一定是(　　).

A. 等腰三角形　　B. 锐角三角形　　C. 直角三角形　　D. 钝角三角形

解　设三角形的三个内角为 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$,依题意有 $\angle A=\angle B-\angle C$,又 $\because \angle A+\angle B+\angle C=180°$, $\therefore \angle B-\angle C+\angle B+\angle C=180°$, $\therefore 2\angle B=180°$.

$\therefore \angle B=90°$,则此三角形为直角三角形. $\therefore$应选 C.

题 6　锐角三角形 ABC 中, $\angle C=2\angle B$,则 $\angle B$ 的范围是(　　).

A. $10°<\angle B<20°$　　B. $20°<\angle B<30°$

C. $30°<\angle B<45°$　　D. $45°<\angle B<60°$

解　因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $\therefore 0°<\angle C<90°$.

$\therefore 0°<2\angle B<90°$，$\therefore 0°<\angle B<45°$.

又$\because \angle A$ 为锐角，$\therefore \angle A=180°-(\angle B+\angle C)$为锐角，

$\therefore \angle B+\angle C>90°$，

$\therefore 3\angle B>90°$，$\therefore \angle B>30°$，$\therefore 30°<\angle B<45°$. $\therefore$应选 C.

题 7 三角形中至少有一个角不小于(　　).

A. 30°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 80°

解 因为三角形的三个内角之和为 180°. 如果三角形的每个内角都小于 60°，则三角形的三个内角之和一定小于 180°，这与三角形的内角和矛盾，所以三角形中至少有一个角不小于 60°. 所以应选 B.

题 8 $\triangle ABC$ 中的三边为 a、b、c，$\angle A$ 的外角为 α，$\angle B$ 的外角为 β，下面判断正确的是(　　).

A. $a=b+c$　　B. $\angle\beta=\angle\alpha$

C. $\alpha>120°$，$\beta\geqslant120°$，$\angle C<60°$　　D. $\angle B+\angle C=\alpha$

解 根据三角形角与角之间的关系，三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和，应有 $\alpha=\angle B+\angle C$. 所以应选 D.

题 9 $\triangle ABC$ 中，三边长分别是 3、$1-2k$、8，则实数 R 的取值范围是(　　).

A. $-5<k<-2$　　B. $k>-5$

C. $k<-2$　　D. $k<3$

解 根据三角形三边关系应有：$\begin{cases}3+1-2k>8, & ①\\ 3+8>1-2k, & ②\end{cases}$

解①得 $k<-2$，

解②得 $k>-5$.

则 k 的取值范围为 $-5<k<-2$.

$\therefore$应选 A.

题 10 等腰三角形一边长为 $2\sqrt{3}$，周长为 $4\sqrt{3}+7$，那么这个等腰三角形的腰长为(　　).

A. $2\sqrt{3}$　B. 7　C. $\sqrt{3}+\frac{7}{2}$　D. $2\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}+\frac{7}{2}$

解 等腰三角形的一边长为 $2\sqrt{3}$，若 $2\sqrt{3}$ 是三角形的腰，则三角形的三边长为分别为 $2\sqrt{3}$、$2\sqrt{3}$、7，而 $2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}=\sqrt{48}$，$7=\sqrt{49}$.

$\therefore 2\sqrt{3}+2\sqrt{3}<7$，故不满足三角形三边条件，所以 $2\sqrt{3}$ 只能是三角形的底边长，其腰长为 $\sqrt{3}+\frac{7}{2}$.

$\therefore$应选 C.

题 11 已知线段 a、b、c，且 $c<b<a$；满足下列哪个条件才能组成三角形(　　).

A. $a+b>c$　　B. $a+c>b$　　C. $a-b<c$　　D. $b-c<a$

解　组成三角形的三边应满足任意两边之和大于第三边，或任意两边之差小于第三边，对于C，$a-b<c$，根据等式的性质有 $a-c<b$. 由已知条件 $a>b>c$，显然 $b-c>a$，因此满足任意两边之差小于第三边. 所以应选C.

题12　三条线段 $a=5$，$b=3$，c 的值为整数，由 a、b、c 为边可组成三角形（　　）.

A. 1个　　B. 3个　　C. 5个　　D. 无数个

解　由三角形三条边的关系可知，$2<c<8$，而 c 是整数，所以，$c=3$、4、5、6、7. 因此，可以组成5个三角形，所以应选C.

题13　下列命题中正确的是（　　）.

A. 三角形的角平行线、中线及高都在三角形内

B. 直角三角形的高只有一条

C. 三角形至少有一条高在形内

D. 钝角三角形的三条高都在形外

解　对于钝角三角形，它的高不都在三角形内，因此A是错误的. 对于直角三角形，它也有三条高，其中两条直角边也是它的高，因此B是错误的，钝角三角形的两条高在三角形的外部，其中的一条高在三角形内，因此D也是错误的. 所以应选C.

题14　如果 α、β、γ 分别是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角，$\alpha:\beta:\gamma=4:2:3$，则 $\angle BAC$ 等于（　　）.

A. 20°　　B. 40°　　C. 60°　　D. 80°

解　因为 $\triangle ABC$ 的三个外角和为 360°，设 $\alpha=4x$，$\beta=2x$，$\gamma=3x$，

则有 $2x+4x+3x=360°$，$\therefore x=40°$.

$\therefore \alpha=160°$，$\beta=80°$，$\gamma=120°$.

$\because \alpha$ 是 $\angle BAC$ 的外角，$\therefore \angle BAC=20°$. $\therefore$ 应选A.

题15　已知：如图3-1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=38°$，$\angle B=70°$，$CD\perp AB$ 于 D，CE 平分 $\angle ACB$，$DP\perp CE$ 于 P，则 $\angle CDP$ 的大小是（　　）.

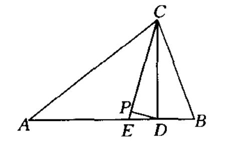


图3-1

A. 74°　　B. 16°　　C. 36°　　D. 72°

解　$\because \angle A=38°$，$\angle B=70°$，$\therefore \angle ACB=72°$.

又 CE 平分 $\angle ACB$，$\therefore \angle BCE=36°$.

$\angle B=70°$，$CD\perp AB$，$\therefore \angle DCB=20°$，$\angle DCE=16°$.

又 $DP\perp CE$，$\therefore \angle CDP=74°$，$\therefore$ 选择A.

题16　在 $AB=AC$ 的 $\triangle ABC$ 中，D 点在 AC 边上，使 $BD=BC$，E 点在 AB 边上，使 $AD=DE=EB$，则 $\angle EDB$ 等于（　　）.

A. 22.5°　　B. 25°　　C. 30°　　D. 37.5°

解 如图 3-2,设$\angle BDE=x$,$\because BE=ED$,

$\therefore \angle EBD=\angle EDB=x$,

则$\angle AED=\angle EBD+\angle EDB=2x$.

又$\because AD=DE$, $\therefore \angle A=\angle AED=2x$.

又$\angle BDC=\angle A+\angle ABD=3x$,

$\because BD=BC$,$\therefore \angle C=\angle BDC=3x$,

又$\because AB=AC$,$\therefore \angle ABC=\angle C=3x$.

根据三角形内角和定理:$3x+3x+2x=180°$,

$\therefore x=22.5°$. $\therefore$应选 A.

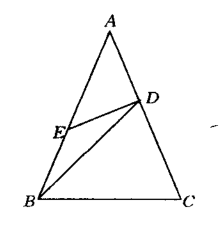


图 3-2

题 17 在$AB=BC$的$\triangle ABC$中,D点在BC的延长线上,且$AD=BC$,$\angle BCA=\alpha$,$\angle CAD=\beta$,则α和β间的关系为( ).

A. $\beta=\frac{1}{2}\alpha$ B. $2\alpha-\beta=180°$

C. $\alpha-\beta=180°$ D. $3\alpha-\beta=180°$

解 如图 3-3,$\because AB=BC$,

$\therefore \angle BCA=\angle BAC=\alpha$.

又$\because AD=BC$,$\therefore AD=AB$,$\therefore \angle D=\angle B$.

又$\because \angle BCA=\angle D+\beta$,

$\therefore \angle D=\alpha-\beta$.

$\therefore \angle B=\alpha-\beta$,根据三角形的内角和,有

$2\alpha+\alpha-\beta=180°$,

$\therefore 3\alpha-\beta=180°$. $\therefore$应选 D.

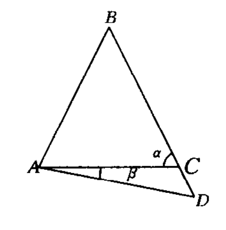


图 3-3

题 18 以下列各组数为边的三角形中,不是直角三角形的是( ).

A. $\sqrt{3}+1,\sqrt{3}-1,2\sqrt{2}$ B. 4,7.5,8.5

C. 7,24,25 D. 3.5,4.5,5.5

解 由勾股定理的逆定理可知,D 中$3.5^2+4.5^2\neq 5.5^2$,所以这组数据为边的三角形不是直角三角形,所以选择 D.

题 19 已知三角形的两边$a=5$,$b=7$,则第三边c的范围是( ).

A. 大于 2 B. 小于 12 C. 大于 2 小于 12 D. 不确定

解 根据三角形的三边关系应有$7-5<c<7+5$,即$2<c<12$.

$\therefore$应选 C.

题 20 如图 3-4,如果$\triangle ABC$的$\angle B$与$\angle C$的平分线交于P点,$\angle BPC=134°$,则$\angle BAC$等于( ).

A. 68° B. 80° C. 88° D. 46°

解 $\because \angle BPC=134^\circ$,

$\therefore \angle PBC+\angle PCB=46^\circ$.

又$\because BP$、CP为$\angle B$、$\angle C$的平分线,

$\therefore \angle PBC=\frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle PCB=\frac{1}{2}\angle ACB$,

$\therefore \angle PBC+\angle PCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)$,

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=2\times 46^\circ=92^\circ$,

$\therefore \angle BAC=180^\circ-\angle ABC-\angle ACB=88^\circ$.

$\therefore$应选 C.

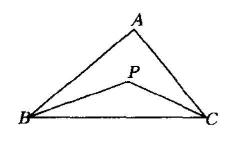


图 3 - 4

题 21 如图 3 - 5,已知:$AC=CD$,$AE=BE$,$\angle CFE=117^\circ$,则$\angle A$的度数为(　　).

A. 73°　　B. 81°　　C. 117°　　D. 183°

解 $\because AC=CD$, $\therefore \angle A=\angle CDA$.

同理 $\angle A=\angle ABE$.

又$\because \angle BFD=\angle CFE=117^\circ$,

$\therefore \angle A+\angle ABE+\angle BFD+\angle FDA$

$=3\angle A+117^\circ=360^\circ$,

$\therefore \angle A=120^\circ-39^\circ=81^\circ$.

$\therefore$应选 B.

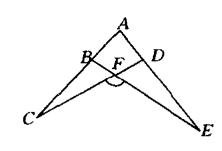
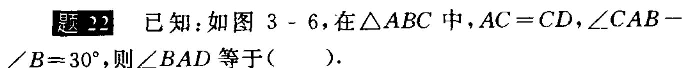


图 3 - 5



题 22 已知:如图 3 - 6,在$\triangle ABC$中,$AC=CD$,$\angle CAB-\angle B=30^\circ$,则$\angle BAD$等于(　　).

A. 30°　　B. 22.5°　　C. 10°　　D. 15°

解 $\because \angle CDA=\angle DAB+\angle B$,

$\angle CAD=\angle CAB-\angle DAB$,

$\angle CDA=\angle CAD$,

$\therefore \angle DAB+\angle B=\angle CAB-\angle DAB$,

$\therefore 2\angle DAB=\angle CAB-\angle B$.

$\therefore 2\angle DAB=30^\circ$. $\therefore \angle DAB=15^\circ$. $\therefore$应选 D.

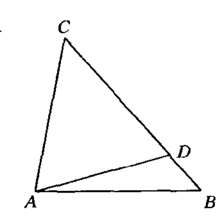


图 3 - 6

题 23 已知:如图 3 - 7,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,D为BC上一点,$BF=CD$,$CE=BD$,则$\angle EDF$等于(　　).

A. $90^\circ-\angle A$　　B. $90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

C. $180^\circ-\angle A$　　D. $45^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

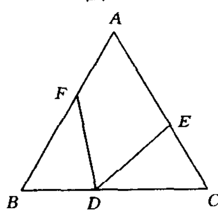


图 3 - 7

解 $\because AB=AC$, $\angle B=\angle C$, 又 $BF=CD$, $CE=BD$, $\therefore$

$\triangle BFD \cong \triangle CDE$.

$\therefore \angle FDB=\angle DEC$，则$\angle EDF=\angle C$.

而$\angle C=90°-\frac{1}{2}\angle A$，$\therefore \angle EDF=90°-\frac{1}{2}\angle A$，$\therefore$选择 B.

题24 如图 3 - 8，已知$\triangle ABC$中，$\angle DEC=x$，$AB=AC$，$AD=AE$，则x等于(　　).

A. 7.5°　　B. 10°

C. 12.5°　　D. 15°

解 $\because AD=AE$，

$\therefore \angle ADE=\angle AED$.

$x=\angle AEC-\angle ADE=(\angle B+30°)-\angle ADE$

$=(\angle B+30°)-(\angle C+x)$.

$\because AB=AC$，

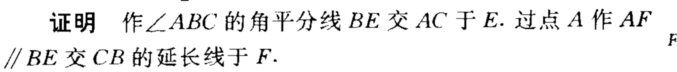
$\therefore \angle B=\angle C$，　$\therefore 2x=30°$，　$\therefore x=15°$.

$\therefore$应选 D.

图 3 - 8

题25 如图 3 - 9，已知：在$\triangle ABC$中，$AB\leqslant\frac{1}{2}AC$.

求证：$\angle C<\frac{1}{2}\angle B$.



证明 作$\angle ABC$的角平分线BE交AC于E. 过点A作$AF /\!/ BE$交CB的延长线于F.

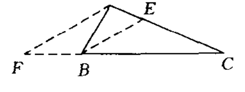
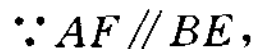


图 3 - 9



$\because AF /\!/ BE$，

$\therefore \angle F=\angle EBC$，　$\angle FAB=\angle ABE$.

又$\because BE$平分$\angle ABC$，　$\therefore \angle EBC=\angle ABE$.

$\therefore \angle F=\angle FAB$，　$\therefore AB=BF$.

又$\because AB+FB>AF$，　即$2AB>AF$.

又$\because AB\leqslant\frac{1}{2}AC$，　$\therefore AC>AF$，

$\therefore \angle F>\angle C$.　又$\because \angle F=\frac{1}{2}\angle ABC$，$\therefore \angle C<\frac{1}{2}\angle B$.

题26 求证：直角三角形的两个锐角的相邻外角的平分线所夹的角等于 45°.

已知：如图 3 - 10，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$\angle EAB$、$\angle ABD$是$\triangle ABC$的外角，AF、BF分别平分$\angle EAB$及$\angle ABD$.

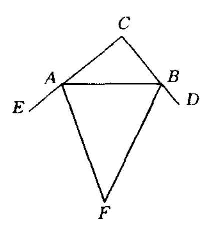


图 3 - 10

求证：$\angle AFB=45°$.

证明 $\because \angle EAB=\angle ABC+\angle C$，

$\angle ABD=\angle CAB+\angle C$，

$\angle C+\angle ABC+\angle CAB=180^\circ$，$\angle C=90^\circ$，

$\therefore \angle EAB+\angle ABD$

$=\angle ABC+\angle C+\angle CAB+\angle C=180^\circ+90^\circ$

$=270^\circ$.

$\because AF$、BF 分别平分 $\angle EAB$ 及 $\angle ABD$，

$\therefore \angle FAB+\angle FBA=\frac{1}{2}(\angle EAB+\angle ABD)$

$=\frac{1}{2}\times 270^\circ=135^\circ$.

在 $\triangle ABF$ 中，$\angle AFB=180^\circ\quad(\angle FAB+\angle FBA)=180^\circ-135^\circ=45^\circ$.

题 27 如图 3-11，$\angle C=\angle BDC=36^\circ$，$\angle A=\angle ABD$，求：$\angle ADE$ 的度数.

图 3-11

解 $\because \angle BDC=\angle C=36^\circ$，

又 $\angle ABD=\angle BDC+\angle C$，

$\because \angle BDC+\angle C=72^\circ$，

即 $\angle ABD=72^\circ$.

又 $\because \angle A=\angle ABD=72^\circ$，

$\angle ADE=\angle A+\angle C$，

$\therefore \angle ADE=108^\circ$.

题 28 已知：如图 3-12，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

求证：$\angle BAC=\angle DFE$，$\angle ABC=\angle FDE$，$\angle BCA=\angle DEF$.

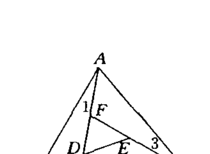


图 3-12

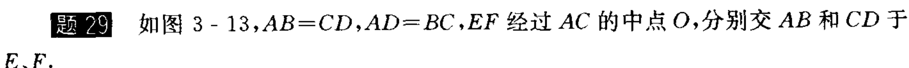
证明 $\because \angle DFE=\angle FAC+\angle 3$，

而 $\angle 1=\angle 3$，$\therefore \angle DFE=\angle FAC+\angle 1$，

即 $\angle BAC=\angle DFE$.

同理可证：$\angle ABC=\angle FDE$，

$\angle BCA=\angle DEF$.



题 29 如图 3-13，$AB=CD$，$AD=BC$，EF 经过 AC 的中点 O，分别交 AB 和 CD 于 E、F.

求证：$OE=OF$.

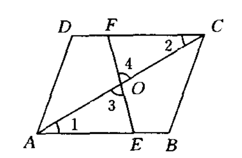


图 3-13

证明 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$\because AB=CD$，$BC=AD$，$AC=AC$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CDA$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

Rt$\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，

$\because \angle 1=\angle 2$，$OA=OC$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore \triangle AOE=\triangle COF$，$\therefore OE=OF$.

题30 如图 3-14，已知：点 D、E 在 BC 上，$AB=AC$，$AD=AE$.

求证：$BD=CE$.

证明 过点 A 作 $AF\perp BC$，F 为垂足.

$\because AB=AC$，$AF\perp BC$，$\therefore BF=CF$.

又 $\because AD=AE$，$AF\perp BC$，

$\therefore DF=EF$.

$\therefore BF-DF=CF-EF$，即 $BD=CE$.

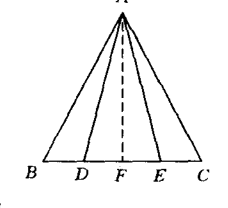


图 3-14

题31 如图 3-15，在 $\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 边中点，$\angle C$ 的平分线交 DE 于 F，连 AF.

求证：$AF\perp FC$.

证明 CF 平分 $\angle ACB$. $\therefore \angle ACF=\angle FCB$.

又 $\because ED$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线，$\therefore DE\parallel BC$，

$\therefore \angle FCB=\angle EFC$，　$\therefore \angle ACF=\angle EFC$，

$\therefore EC=EF$.　又 $\because AE=EC$，

$\therefore AE=EF$，$\therefore AE=EF=EC$.

$\therefore E$ 是 AC 的中点，$EF=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore \angle AFC=90°$，$\therefore AF\perp CF$.

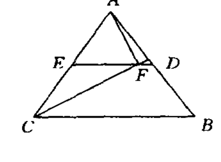


图 3-15

题32 如图 3-16，已知：在 $\triangle ABC$ 中，

(1) $\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 外角平分线交于点 D，$\angle D=30°$，求：$\angle A$ 的度数.

(2) $\angle ACB$ 的外角平分线与 BA 的延长线交于 D，则 $\angle BAC>\angle B$.

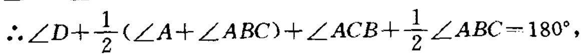
解 (1) 如图 3-16(1)，$\angle ACE=\angle A+\angle ABC$，

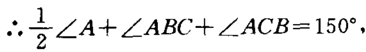
又 $\because CD$ 平分 $\angle ACE$，

$\therefore \angle ACD=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)$.

在 $\triangle BDC$ 中，

$\angle D+\angle ACD+\angle ACB+\angle DBC=180°$，


$\therefore \angle D+\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)+\angle ACB+\frac{1}{2}\angle ABC=180°$，


$\therefore \frac{1}{2}\angle A+\angle ABC+\angle ACB=150°$，

$\therefore \frac{1}{2}\angle A+(180°-\angle A)=150°$，

即 $\frac{1}{2}\angle A=30°$，$\therefore \angle A=60°$.

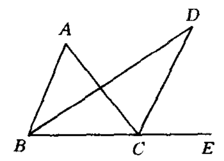
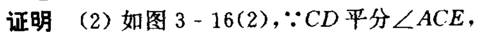


图 3-16(1)


证明 (2) 如图 3-16(2)，$\because CD$ 平分 $\angle ACE$，

$\therefore \angle ACD=\angle DCE$.

$\because \angle BAC$ 是 $\triangle ACD$ 的外角，

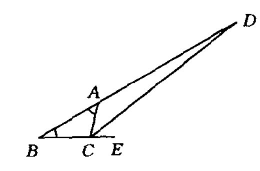


图 3-16(2)

$\therefore \angle BAC > \angle ACD$.

又$\because \angle DCE$是$\triangle DBC$的外角，

$\therefore \angle DCE > \angle B$.

又$\because \angle ACD = \angle DCE$，　　$\therefore \angle BAC > \angle B$.

题33　如图3-17，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle B = 40°$，$\angle C = 20°$，$AD \perp AC$，交BC于D. 求证：$CD = 2AB$.

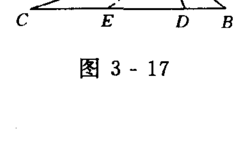


图3-17

证明　取CD的中点E，连AE.

$\because AC \perp AD$，在Rt$\triangle ACD$中，$AE = \frac{1}{2}CD$，

且$AE = CE$.　　$\therefore \angle C = \angle CAE = 20°$.

又$\because \angle AED = \angle C + \angle CAE$，

$\therefore \angle AED = 40°$.

$\therefore \angle AED = \angle B$，　　$\therefore AE = AB$.

$\therefore \frac{1}{2}CD = AB$，　　即$CD = 2AB$.

题34　如图3-18，已知：M是Rt$\triangle ABC$斜边AB的中点，D点在AC边上，使$CD = BM$，DM与CB的延长线交于E点.

求证：$2\angle E = \angle A$.

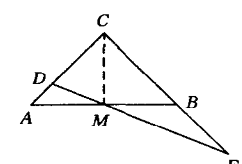


图3-18

证明　连CM，$\because M$为AB中点，

$\therefore CM = MB = AM$.

又$CD = BM$，$\therefore CM = CD = BM$.

$\therefore \angle CBM = \angle BCM$，$\angle CDM = \angle CMD$.

$\because \angle CBM = \angle E + \angle BME$

　$\angle CMA = \angle CBM + \angle BCM$，

即$\angle CMA = 2\angle CBM$.　$\therefore \angle CMA = 2\angle E + 2\angle BME$.

即$\angle CMD + \angle DMA = 2\angle E + 2\angle BME$.

又$\angle CMD = \angle CDM$，$\therefore \angle CDM + \angle DMA = 2\angle E + 2\angle BME$.

而$\angle CDM = \angle A + \angle DMA$，

$\therefore \angle A + 2\angle DMA = 2\angle E + 2\angle BME$.

$\because \angle DMA = \angle BME$，$\therefore \angle A = 2\angle E$.

题35　如图3-19，已知：$\triangle ABC$中，$AC = AD$，$BC = BE$，$\angle ACB = 100°$，求：$\angle ECD$.

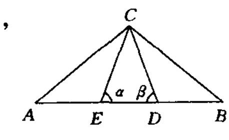
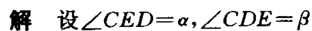


图3-19

解　设$\angle CED = \alpha$，$\angle CDE = \beta$



$\because AC = AD$，

$\therefore \beta = 90° - \frac{1}{2}\angle A$.

同理，$\alpha=90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle B$.

$\therefore \angle ECD=180^\circ-(\alpha+\beta)$

$=180^\circ-\left[\left(90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle B\right)+\left(90^\circ-\dfrac{1}{2}\angle A\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B)=\dfrac{1}{2}(180^\circ-100^\circ)=40^\circ$.

题 36　如图 3 - 20，在$\triangle ABC$中，$\angle C=42^\circ$，$\angle A$与$\angle B$的三等分线分别交于D、E，求：$\angle ADB$的度数.

解　$\because \angle C=42^\circ$.

$\therefore \angle B+\angle A=180^\circ-42^\circ=138^\circ$.

$\because BD$、AD是$\angle B$、$\angle A$的三等分线，

$\therefore \angle CBD=\dfrac{1}{3}\angle B$，$\angle CAD=\dfrac{1}{3}\angle A$.

$\therefore \angle ADB=\angle C+\angle CAD+\angle CBD$

$=42^\circ+\dfrac{1}{3}(\angle A+\angle B)$

$=42^\circ+\dfrac{1}{3}\times 138^\circ=88^\circ$.

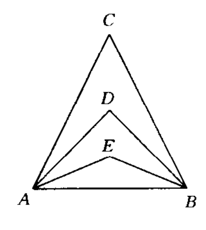


图 3 - 20

题 37　如图 3 - 21，$AB=BC=CD$，$AD=AE$，$DE=BE$，求：$\angle C$的度数.

解　设$\angle C=x$，$\angle BDC=\angle 1$，$\angle BDE=\angle 2$，$\angle ADE=\angle 3$，

$\therefore AB=BC$，$\therefore \angle A=x$，$\angle ABC=180^\circ-2x$.

$\because BC=CD$，　$\therefore \angle 1=90^\circ-\dfrac{x}{2}$.

同理，$\angle 3=90^\circ-\dfrac{x}{2}=\angle 1$.

图 3 - 21

由$DE=BE$，$\angle 2=\angle DBE=\angle ABC-\angle 1$，

$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3=\angle 1+\angle 1+\angle ABC-\angle 1$

$=\angle ABC+\angle 1=180^\circ-2x+90^\circ-\dfrac{x}{2}$.

$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3=180^\circ$，

$\therefore 270^\circ-\dfrac{5}{2}x=180^\circ$，$\therefore x=36^\circ$.

题 38　如图 3 - 22，五角星的顶点为A、B、C、D、E，求：$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$的度数.

解　$\because \angle 1+\angle A+\angle D=180^\circ$，

$\angle 2+\angle B+\angle E=180^\circ$，

$\angle 3+\angle C+\angle A=180^\circ$，

$\angle 4+\angle D+\angle B=180^\circ$，

$\angle 5+\angle E+\angle C=180^\circ$.

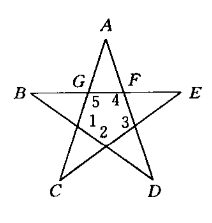


图 3 - 22

相加得$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+2(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E)=5\times 180°$，

$\because \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=3\times 180°$，

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=180°$.

题39 如图 3-23，$AB=AD$，$DC>BC$.

求证：$\angle B>\angle D$.

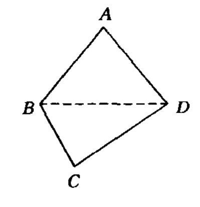


图 3-23

证明 连 BD.

$\because AB=AD$，　$\therefore \angle ABD=\angle ADB$.

又$\because CD>BC$，　$\therefore \angle CBD>\angle CDB$.

$\therefore \angle ABD+\angle CBD>\angle ADB+\angle CDB$，

即$\angle ABC>\angle ADC$.

题40 如图 3-24，已知：在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，D为垂足，CE平分$\angle BCA$交AB于E，交AD于F.

求证：$\angle AEF=\angle AFE$.

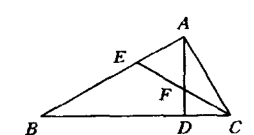


图 3-24

证明 $\because \angle AEC$是$\triangle BEC$的外角，

$\therefore \angle AEC=\angle B+\angle ECB$，

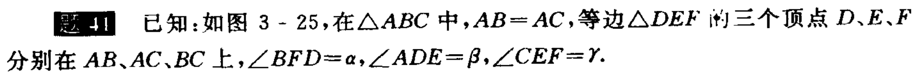
$\angle AFE=\angle FAC+\angle ACF$，

又$\because \angle BAC=90°$，$AD\perp BC$，

$\therefore \angle FAC=\angle B$.

$\because EC$平分$\angle ACB$，$\therefore \angle ACF=\angle FCD$.

$\therefore \angle AEF=\angle AFE$.



题41 已知：如图 3-25，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，等边$\triangle DEF$的三个顶点D、E、F分别在AB、AC、BC上，$\angle BFD=\alpha$，$\angle ADE=\beta$，$\angle CEF=\gamma$.

求证：$2\alpha=\beta+\gamma$.

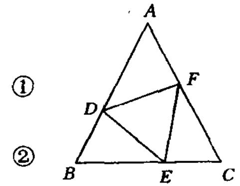


图 3-25

证明 $\because F$点在BC上，$\triangle DEF$是等边三角形.

$\therefore \alpha=\gamma+\angle C-60°$，　①

$\beta=\alpha+\angle B-60°$，

$\alpha=\beta-\angle B+60°$.　②

$\because AB=AC$，　$\therefore \angle B=\angle C$.

①+②，得

$2\alpha=\gamma+\angle C-60°+\beta-\angle B+60°$，

得　$2\alpha=\gamma+\beta$.

题42 求证：三角形的两个外角平分线所成的角等于第三个外角的一半.

证明 如图 3-26，设$\triangle ABC$的$\angle BAC$和$\angle ABC$的外角平分线交于点D.

$\because \angle FAB=\angle ABC+\angle ACB$，

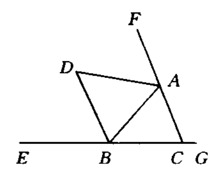


图 3 - 26

$\angle EBA=\angle BAC+\angle ACB$,

$\therefore \angle DAB+\angle DBA$

$=\frac{1}{2}(\angle FAB+\angle EBA)$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)+\angle ACB$.

则$\angle ADB=180°-(\angle DAB+\angle DBA)$

$=(\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC)-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)-\angle ACB$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)$.

而$\frac{1}{2}\angle ACG=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)$，$\therefore \angle ADB=\frac{1}{2}\angle ACG$.

题 43 如图 3 - 27，已知$\triangle ABC$中，$AC>AB$，$AE\perp BC$于E，AF平分$\angle CAB$交BC于F.

求证：$\angle EAF=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

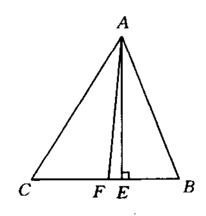


图 3 - 27

证明 $\angle EAF=\angle FAB-\angle EAB$,

$\because AF$平分$\angle CAB$,

$\therefore \angle FAB=\frac{1}{2}\angle CAB$

又$\because \angle EAB=180°-(90°+\angle B)=90°-\angle B$,

$\therefore \angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAC-90°+\angle B$,

$\angle BAC=180°-(\angle B+\angle C)$,

$\therefore \angle EAF=\frac{1}{2}[180°-(\angle B+\angle C)]-90°+\angle B$,

$\angle EAF=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)$.

题 44 如图 3 - 28，在$\triangle ABC$中，P是三角形内一点.

求证：$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<PA+PB+PC<AB+AC+BC$.

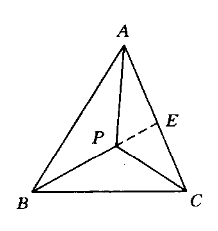


图 3 - 28

证明 在$\triangle PAB$中，$AB<PA+PB$,

同理$BC<PB+PC$，$AC<PA+PC$,

相加得：$AB+AC+BC<2(PA+PB+PC)$.

即$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<PA+PB+PC$.

延长BP交AC于E，则$AB+AE>BP+PE$,

$PE+CE>PC$，两式相加得

$$AB+AC>PB+PC. \quad ①$$

同理 $AB+BC>PA+PC$. ②

$AC+BC>PA+PB$. ③

①+②+③得:$AB+AC+BC>PA+PB+PC$.

综上有

$$\frac{1}{2}(AB+AC+BC)<PA+PB+PC<AB+AC+BC.$$

题 45 已知三角形的一边是另一边的两倍,求证:它的最小边在它的周长的$\frac{1}{6}$与$\frac{1}{4}$之间.

证明 如图 3 - 29,设$\triangle ABC$的三边为a、b、c,其中$a=2c$,$\because b>a-c$,$a=2c$,$\therefore b>c$.

因此,c是最小边,$\therefore\ b<3c$

因此,$a+b+c<2c+3c+c$,

即$\frac{1}{6}(a+b+c)<c$,

又$\because 4c=2c+c+c<a+b+c$,

$\therefore c<\frac{1}{4}(a+b+c)$,

即 $\frac{1}{6}(a+b+c)<c<\frac{1}{4}(a+b+c)$.

故最小边在周长的$\frac{1}{6}$与$\frac{1}{4}$之间.

图 3 - 29

题 46 如图 3 - 30,在$AB>AC$的$\triangle ABC$中,AD平分$\angle A$,$CD\perp AD$,D为垂足,H为BC边中点,求证:$DH=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

证明 延长CD交AB于E. $\because AD\perp CE$,

AD平分$\angle BAC$,则$AE=AC$,$ED=DC$.

$\therefore AB-AC=AB-AE=BE$.

又$\because H$为BC中点,D为EC中点.

$\therefore DH$为$\triangle BEC$的中位线,$\therefore DH=\frac{1}{2}BE$,

$\therefore DH=\frac{1}{2}(AB-AC)$.

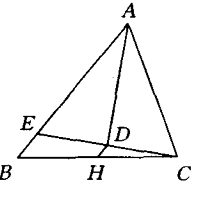


图 3 - 30

题 47 在$\triangle ABC$中,若$AB\leqslant\frac{1}{2}AC$,求证:$\angle ACB<\frac{1}{2}\angle ABC$.

证明 如图 3 - 31,延长CB至D,使$BD=BA$,连AD. 则$\angle D=\frac{1}{2}\angle ABC$.

$\because AB\leqslant\frac{1}{2}AC$,即$2AB\leqslant AC$.

$\therefore AD<AB+BD=2AB<AC$.

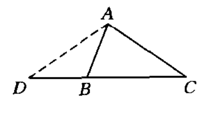


图 3 - 31

$\therefore \angle D > \angle C$，即$\angle ACB < \frac{1}{2}\angle ABC$.

题 48 已知：如图 3 - 32，在$\angle A = 90°$的$\triangle ABC$中，在BC边上截取$BD = AB$，截取$CE = AC$，求证：$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle B$，$\angle BAE = \frac{1}{2}\angle C$.

证明 $\because \angle BAE = 90° - \angle CAE$，

又$\because CA = CE$，　　$\therefore \angle CAE = \angle CEA$.

$\angle CAE = \angle CEA = \frac{180° - \angle C}{2}$

$= 90° - \frac{1}{2}\angle C$.

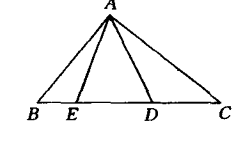


图 3 - 32

$\therefore \angle BAE = 90° - (90° - \frac{1}{2}\angle C) = \frac{1}{2}\angle C$.

同理可证：$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle B$.

题 49 如图 3 - 33，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，$\angle A = 80°$，D、E、F分别是BC、AB、CA边上的点，且$BD = BE$，$CD = CF$，$\angle EFD$度数：$\angle FED$度数$= 3:2$，求：$\angle AEF$的度数.

解 $\because \angle A = 80°$，且$AB = AC$，

$\therefore \angle B = \angle C = 50°$.

$\because BD = BE$，　　$\therefore \angle BED = \angle BDE = 65°$，

同理有$\angle CDF = \angle CFD = 65°$，

$\therefore \angle EDF = 180° - 65° - 65° = 50°$.

$\therefore \angle DEF + \angle DFE = 130°$.

$\therefore \angle DEF = 130° \times \frac{2}{3+2} = 52°$.

$\therefore \angle AEF = 180° - \angle DEF - \angle BED$

$= 180° - 52° - 65° = 63°$.

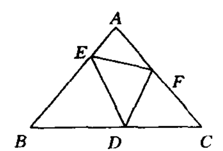


图 3 - 33

题 50 设h_a、h_b、h_c是$\triangle ABC$三边上的高，求证：$\frac{1}{2} < \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1$.

证明 如图 3 - 34，在$Rt\triangle ADC$中，

$\because AC > AD$，$\therefore b > h_a$.

同理可证：$c > h_b$，$a > h_c$.

$\therefore h_a + h_b + h_c < a + b + c$.

$\therefore \frac{h_a + h_b + h_c}{a + b + c} < 1$.

设$\triangle ABC$的垂心为H. 则有

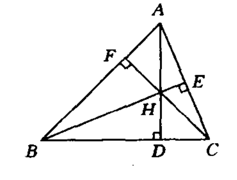


图 3 - 34

$$\begin{cases} HA+HF>AF, \\ HF+HB>FB, \\ HB+HD>BD, \\ HD+HC>DC, \\ HC+HE>CE, \\ HE+HA>EA. \end{cases} \quad \therefore 2\left(\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}\right)>1.$$

$\therefore \frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}>\frac{1}{2}.$

综上：$\frac{1}{2}<\frac{h_a+h_b+h_c}{a+b+c}<1.$

题 51 若 P 是边长为 1 的等边$\triangle ABC$ 内的一点，

求证：PA、PB、PC 中至少有一条，其长度不超过$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

证明 如图 3 - 35，取等边$\triangle ABC$ 的中心 O，连 OA、OB、OC，则 $OA=OB=OC=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

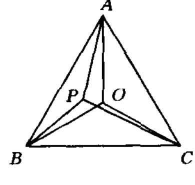


图 3 - 35

$\because P$ 点必在$\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CAO$ 中的一个内部或边上，不妨设 P 点在$\triangle ABO$ 的内部或边上.

$\therefore PA+PB\leqslant OA+OB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore PA$、PB 中必有一个不超过$\frac{\sqrt{3}}{3}$.

如若不然，即 $AP>\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $BP>\frac{\sqrt{3}}{3}$，$AP+BP>\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$结论成立.

二、全等三角形

题 52 如何判定三角形的全等？

答 全等三角形的判定主要有以下几种：(1)两边及其夹角对应相等的两个三角形全等，记作 SAS. (2)两角及其夹边对应相等的两个三角形全等，记做 ASA. (3)三边对应相等的两个三角形全等，记作 SSS. (4)两角及其一角的对边对应相等的两个三角形全等，记作 AAS. 这是一般三角形全等的判定方法，对于特殊三角形直角三角形全等的判定，除了上述的判定方法外，还有自己特定的判定方法：斜边和直角边对应相等的两个直角三角形

全等,记作 HL.

题53 试述全等三角形的性质.

答 如果两个三角形全等,那么它们的对应边相等、对应角相等、对应的角平分线、中线、高相等,面积也相等.

题54 试述等腰三角形的定义、判定和性质.

答 定义:两边相等的三角形叫做等腰三角形.

判定:(1) 在一个三角形中,有两个角相等的三角形是等腰三角形.

(2) 在一个三角形中,有两条边相等的三角形是等腰三角形.

(3) 一条边上的中线和高线重合或一条边上的高和这条边所对的角平分线重合的三角形是等腰三角形.

性质:(1) 等腰三角形两底角相等,两腰上的中线相等,两底角平分线相等.

(2) 顶角的平分线与底边上的中线、高重合.

(3) 以底边上的高所在直线为对称轴的轴对称图形.

题55 试述等边三角形的定义、判定及性质.

答 定义:三边都相等的三角形叫做等边三角形.

性质:(1) 三个内角都相等,等于 60°.

(2) 三条边都相等.

(3) 有三条对称轴.

(4) 任何一个角的平分线,是这个角所对的边上的高、中线和垂直平分线.

判定:(1) 三条边相等.

(2) 三个角都相等的三角形是等边三角形.

(3) 有一个角是 60°的等腰三角形是等边三角形.

题56 试述直角三角形的定义、判定及性质.

答 定义:有一个角是直角的三角形叫做直角三角形.

判定:(1) 三角形的三个内角有一个是直角,这个三角形是直角三角形.

(2) 两个角的和等于第三个角的三角形是直角三角形.

(3) 一边的平方等于其它两边平方和的三角形是直角三角形.

(4) 一边上的中线等于这边的一半的三角形是直角三角形.

性质:(1) 勾股定理 $AB^2=AC^2+BC^2$.

(2) 两个锐角互余 $\angle A+\angle B=90°$.

(3) 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

(4) 若一个角为 30°,则 30°角所对的边等于斜边的一半.

(5) 两直角边的乘积等于斜边与其高线的乘积.

题57 三角形内有一点,到三边的距离都相等,那么它是(　　).

A. 三角形两条边的中线的交点　　B. 三角形两内角平分线的交点

C. 三角形两条边上的垂直平分线的交点

D. 三角形两条高线的交点

解 根据角平分线的性质,角分线上的点到角两边的距离相等.

∴应选 B.

题 58 三角形中三个内角的比为 1∶2∶3,最小边的边长为 1,则最大边长为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{2}$

解 如图 3-36,三角形的内角和为 180°,其三内角的比为 1∶2∶3,所以三个内角分别为 30°,60°,90°,BC 边应为最小边,其长为 1. 根据直角三角形的性质,$BC=\frac{1}{2}AB$

∴$AB=2$. ∴应选 B.

A

C　B

图 3-36

题 59 下列能够判定$\triangle ABC\cong\triangle DEF$ 的是(　　).

A. $AB=DE,BC=EF,\angle A=\angle D$

B. $\angle A=\angle D,\angle C=\angle F,AC=EF$

C. $AB=DE,BC=EF$,$\triangle ABC$ 的周长等于$\triangle DEF$ 的周长

D. $\angle A=\angle D,\angle B=\angle E,\angle C=\angle F$

解 根据全等三角形的判定,条件 C 满足三边对应相等,则此两三角形全等. 所以应选 C.

题 60 在$\triangle ABC$ 与$\triangle A'B'C'$中,$\angle A+\angle B=\angle C,\angle B'+\angle C'=\angle A'$,且 $b-a=b'-c',b+a=b'+c'$,则这两个三角形(　　).

A. 不一定全等　　B. 不全等

C. 根据“SAS”全等　　D. 根据“ASA”全等

解 ∵$\angle A+\angle B=\angle C,\angle B'+\angle C'=\angle A'$,∴$\angle C=\angle A'=90°$.

又∵$b-a=b'-c',b+a=b'+c'$,两式相加,得 $b=b'$,则 $a=c'$.

则$\triangle ABC\cong\triangle C'B'A'(SAS)$,∴选择 C.

题 61 下列命题正确的是(　　).

A. 有两边和一角对应相等的两个三角形全等

B. 有一边对应相等的两个等边三角形全等

C. 有一角对应相等的两个等边三角形全等

D. 有一角对应相等的两个直角三角形全等

解 对于 B,如果两个等边三角形的一组对应边相等,说明两个等边三角形的边都相等,满足三条边对应相等,因此,这两个三角形全等. 所以应选 B.

题 62 下列说法正确的是(　　).

A. 所有的等边三角形全等

B. 所有的等腰三角形都全等

C. 等腰三角形角的平分线平分底边

D. 所有的等边三角形内角都相等

解 对于等边三角形,其每个内角都为 60°,因此,所有的等边三角形的各角都相等.所以应选 D.

题 63 如图 3 - 37,$\angle A=15^\circ$,$AB=BC=CD=DE=EF$,那么$\angle FEM$等于(　　).

A. 90°　　B. 75°　　C. 70°　　D. 60°

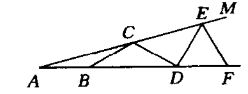


图 3 - 37

解 $\because AB=BC$,

$\therefore \angle A=\angle ACB=15^\circ$.

$\therefore \angle CBD=\angle A+\angle ACB=30^\circ$.

又$\because CB=CD$,

$\therefore \angle CBD=\angle CDB=30^\circ$.

$\therefore \angle ECD=\angle A+\angle CDB=45^\circ$.

又$\because CD=DE$,　$\therefore \angle DCE=\angle DEC=45^\circ$,

$\therefore \angle EDF=\angle A+\angle DEC=60^\circ$.

$\because ED=EF$,　$\therefore \angle EDF=\angle EFD=60^\circ$.

$\therefore \angle FEM=\angle A+\angle EFD=75^\circ$.

$\therefore$应选 B.

题 64 如果三角形的一个角等于其它两个角的差,则这个三角形一定是(　　).

A. 等腰三角形　B. 锐角三角形　C. 直角三角形　D. 钝角三角形

解 设三角形的三个内角分别为α、β、γ,设$\alpha=\beta-\gamma$,则有$\alpha+\gamma=\beta$,又$\because \alpha+\beta+\gamma=180^\circ$,$\therefore \alpha+\gamma=\beta=90^\circ$,为直角三角形. $\therefore$应选 C.

题 65 若$\triangle ABC$的边长为a、b、c,且满足等式$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,则$\triangle ABC$的形状是(　　).

A. 直角三角形　　B. 等腰直角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等边三角形

解 $\because a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,　$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$.

$\therefore 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0$.

$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$,$\therefore a=b$,$b=c$,$a=c$,

$\therefore a=b=c$. $\therefore$应选 D.

题 66 如图 3 - 38,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,$\angle A=50^\circ$,P是$\triangle ABC$内的一点,且$\angle PBC=\angle PCA$,则$\angle BPC$为(　　).

A. 115°　B. 100°　C. 130°　D. 不能确定

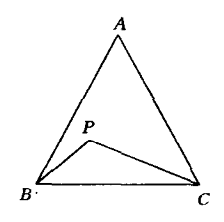


图 3 - 38

解　$\because AB=AC, \angle A=50°$,

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=65°$.

又$\angle PBC=\angle PCA$，　$\therefore \angle ABP=\angle PCB$.

$\therefore \angle PBC+\angle PCB=\angle PCA+\angle ABP$.

又$\because \angle PBC+\angle PCB+\angle PCA+\angle ABP=130°$.

$\therefore \angle PBC+\angle PCB=65°$,

$\therefore \angle BPC=115°$.

∴应选 A.

题 67　如图 3 - 39，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$BD\perp AC$，$CE\perp AB$，O是BD与CE的交点．求证：$BO=CO$.

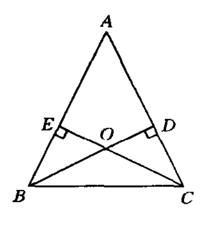


图 3 - 39

证明　$\because BD\perp AC$，$\therefore \angle BDC=90°$.

又$\because CE\perp AB$，$\therefore \angle BEC=90°$.

又$\because \angle EOB=\angle DOC$，$\therefore \angle ABO=\angle ACO$.

又$\because AB=AC$，　$\therefore \angle ABC=\angle ACB$.

$\therefore \angle ABC-\angle ABO=\angle ACB-\angle ACO$,

即$\angle OBC=\angle OCB$，$\therefore BO=CO$.

题 68　如图 3 - 40，已知$AB=CD$，$DE\perp AC$，$BF\perp AC$，E、F为垂足，$DE=BF$.

求证：$AE=CF$，$AB/\!/CD$.

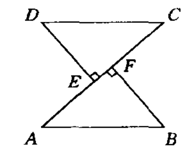


图 3 - 40

证明　$\because DE\perp AC$，$BF\perp AF$,

$\therefore \triangle DCE$与$\triangle BAF$均为直角三角形.

又$\because AB=CD$，$DE=BF$,

$\therefore \text{Rt}\triangle DCE\cong \text{Rt}\triangle BAF$,

$\therefore AF=CE$，$\angle A=\angle C$.

$\therefore AE=CF$，$AB/\!/CD$.

题 69　如图 3 - 41，如果AB是直角三角形的斜边，CD是高，$AD=12$，$DB=13$，求BC的值.

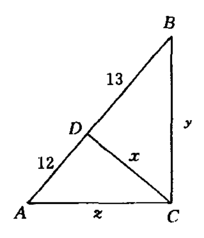


图 3 - 41

解　由题设可知：

$$\begin{cases} y^2-x^2=13^2; \\ z^2-x^2=12^2; \\ y^2+z^2=25^2. \end{cases}$$

由上式求得　　$y=BC=5\sqrt{13}$.

题 70　已知：等腰直角三角形ABC中，$\angle A=90°$，$\angle B$的平分线交AC于D，过C作BD的垂线交BD的延长线于E，交BA的延长线于F.

求证：(1) $\triangle BCF$ 是等腰三角形；

(2) $BD=2CE$.

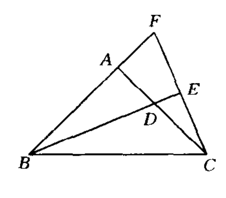


图 3 - 42

证法一 (1)如图 3 - 42，在$\triangle FBE$和$\triangle CBE$中，

$\because BE$ 是$\angle FBC$的平分线，

$\therefore \angle FBE=\angle CBE$.

又$\because CE\perp BE$，

$\therefore \angle FEB=\angle CEB=90^\circ$.

又 BE 为公共边，$\therefore \triangle FBE\cong\triangle CBE$.

$\therefore BC=BF$， 即$\triangle FBC$是等腰三角形.

(2) $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\therefore AB=AC$.

又$\because \angle BAC=\angle BEC=\mathrm{Rt}\angle$，

$\angle ABD+\angle F=90^\circ$，$\angle ACF+\angle F=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle ACF$，

$\therefore \triangle BDA\cong\triangle CFA$，$\therefore BD=CF$.

又$\because BE$ 是等腰三角形 CBF 的顶角平分线，

$\therefore CE=EF$，故 $CF=2CE$. $\therefore BD=2CE$.

证法二 如图 3 - 43，连 AE，取 BD 中点 G，连 AG.

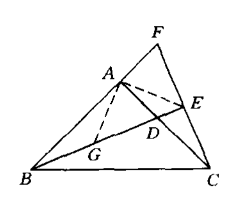


图 3 - 43

在 $\mathrm{Rt}\triangle CFA$ 中，CF 是斜边，E 是 CF 的中点，

$\therefore AE=\frac{1}{2}CF=CE$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，BD 是斜边，G 是 BD 的中点，

$\therefore AG=\frac{1}{2}BD=BG$，$\therefore \angle ABG=\angle BAG$.

又$\because \angle BAC=90^\circ$，$BE$ 平分$\angle ABC$，$AB=AC$，

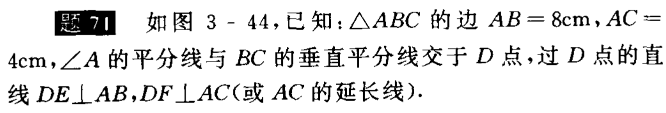
$\therefore \angle ABG=\angle BAG=22.5^\circ$，$\therefore \angle AGD=45^\circ$.

又$\because \angle BAC=\angle BEC=\mathrm{Rt}\angle$，

$\therefore B$、C、E、A 四点共圆，

$\therefore \angle AEB=\angle ACB=45^\circ$，$\therefore AG=AE$.

$\because AG=\frac{1}{2}BD$，而 $AE=CE$，$\therefore BD=2CE$.



题 71 如图 3 - 44，已知：$\triangle ABC$ 的边 $AB=8\mathrm{cm}$，$AC=4\mathrm{cm}$，$\angle A$ 的平分线与 BC 的垂直平分线交于 D 点，过 D 点的直线 $DE\perp AB$，$DF\perp AC$(或 AC 的延长线).

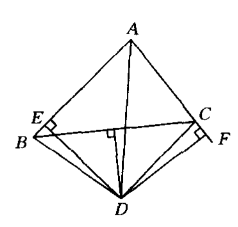


图 3 - 44

求证：(1)$AE=AF$；(2)$BE=CF$；(3)求 AE 的长.

证明 (1)D 是$\angle BAC$平分线上一点，

$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

$\therefore AE=AF$.

(2)连结 BD、CD，

$\because D$ 是 BC 的垂直平分线上的点，

$\therefore DB=DC$，

又由(1)证得　$DE=DF$，$\angle DEB=\angle DFC=90°$.

$\therefore \triangle DEB\cong\triangle DFC$，$\therefore BE=CF$.

(3)设 $AE=AF=x$cm，则 $BE=(8-x)$cm，$CF=(x-4)$cm，

$\because BE=CF$，$\therefore 8-x=x-4$，$\therefore x=6$.

$\therefore AE=6$cm.

题 72 已知：如图 3-45，在$\triangle ABC$ 中，BD、CE 分别是边 AC、AB 上的高，F、G 分别是 BC、DE 的中点.

求证：$FG\perp ED$.

证明 连结 EF、DF，$\because BD\perp AC$，$CE\perp AB$，

$\therefore \triangle BCE$ 及$\triangle BCD$ 是有公共斜边 BC 的两个直角三角形.

又$\because F$ 是斜边 BC 的中点，

$\therefore FE$ 及 FD 分别是 Rt$\triangle BCE$ 及 Rt$\triangle BCD$ 的斜边上的中线.

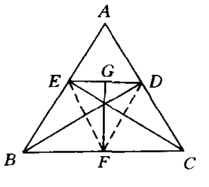


图 3-45

由直角三角形的斜边上中线的性质，得 $FE=FD$.

$\because G$ 是 DE 的中点，$\therefore FG\perp ED$.

题 73 如图 3-46，$\angle BEC=\angle CDB$，$CE=BD$，$AE=AD$.

求证：$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

证明 $\because \angle AEC+\angle BEC=180°$，

$\angle ADB+\angle CDB=180°$，

$\therefore \angle AEC+\angle BEC=\angle ADB+\angle CDB$.

又$\angle BEC=\angle CDB$，$\therefore \angle AEC=\angle ADB$.

在$\triangle ABD$ 和$\triangle AEC$ 中，

$\because AD=AE$，$BD=CE$，$\angle AEC=\angle ADB$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle AEC$，$\therefore AB=AC$.

故$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

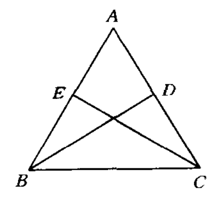


图 3-46

题 74 已知：如图 3-47，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 是有公共顶点的等腰直角三角形.

求证：(1)$BD=CE$；　(2)$\angle 1=\angle 2$.

证明 $\because \angle BAC=\angle EAD=90°$，

$\therefore \angle BAC+\angle DAC=\angle EAD+\angle DAC$.

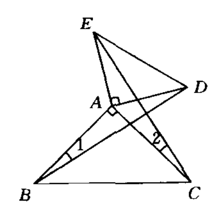


图 3-47

即$\angle BAD=\angle EAC$.

又$\because AE=AD$，　$AB=AC$，

$\therefore \triangle EAC\cong\triangle DAB$，

$\therefore BD=CE$，　$\angle 1=\angle 2$.

题75　已知:如图 3 - 48,$AB\perp BD$,$ED\perp BD$,$AB=CD$,$BC=DE$.

求证:$AC\perp CE$.

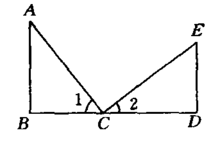


图 3 - 48

证明　$\because AB=CD, BC=DE, AB\perp BD$,

$ED\perp BD$,$\therefore \angle B=\angle D=90°$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CDE$，　$\therefore \angle 1=\angle E$.

又$\angle 2+\angle E=180°-\angle D=90°$,

$\therefore \angle 1+\angle 2=90°$,

$\because \angle ACE=180°-(\angle 1+\angle 2)°=90°$,

故 $AC\perp CE$.

题76　已知,如图 3 - 49,$AB=AC$,$\angle 1=\angle 2$,$AB\perp CD$,$AC\perp BE$.

求证:$\triangle ADE$ 是等腰三角形.

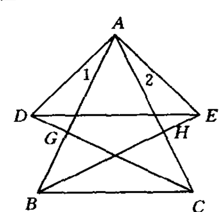


图 3 - 49

证明　在$\triangle ADC$ 和$\triangle AEB$ 中

$\because AB\perp CD, AC\perp BE, \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \angle ADC=\angle AEB$.

$\therefore \angle 1+\angle BAC=\angle 2+\angle BAC$,

即$\angle DAC=\angle EAB$.

又 $AC=AB$,$\therefore \triangle ADC\cong\triangle AEB$.

$\therefore AD=AE$，　$\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形.



题77　如图 3 - 50,M 是$\triangle ABC$ 的 BC 边上的一点,$BE\parallel CF$,且 $BE=CF$.

求证:AM 是$\triangle ABC$ 的中线.

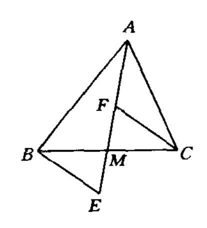


图 3 - 50

证明　$\because BE\parallel CF$,

$\therefore \angle FCM=\angle MBE$,$\angle CFM=\angle BEM$.

又$\because BE=CF$,

$\therefore \triangle CFM\cong\triangle BEM$，　$\therefore CM=BM$.

$\therefore AM$ 为$\triangle ABC$ 的中线.

题78　已知:如图 3 - 51,$\angle BAC=\angle DAE$,$\angle ABD=\angle ACE$,$AB=AC$.

求证:$BD=CE$.

证明　$\because \angle BAC=\angle DAE$,

$\therefore \angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$,

即$\angle BAD=\angle CAE$.

又$\because \angle ABD=\angle ACE$，　　$AB=AC$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$.　　$\therefore BD=CE$.

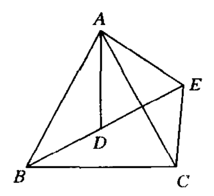


图 3 - 51

题 79　已知：如图 3 - 52，$AD=AC$，$BD=BC$，求证：$\angle 1=\angle 2$.

图 3 - 52

证明　$\because AD=AC$，$BD=BC$，

又 $AB=AB$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ABD$.

$\therefore \angle ABC=\angle ABD$.

又$\because \angle 1+\angle ABD=\angle 2+\angle ABC$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

题 80　已知：如图 3 - 53，$AB=AC$，$BE=CF$，$BF=CE$，$BF\perp AC$.

求证：$CE\perp AB$.

图 3 - 53

证明　$\because AB=AC$，$BE=CF$，$BF=CE$.

$\therefore AB-BE=AC-CF$，　即 $AE=AF$.

$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ACE$.

$\therefore \angle AFB=\angle AEC$，

$\because BF\perp AC$，

$\therefore \angle AFB=90°$，$\angle AEC=90°$，

$\therefore CE\perp AB$.

题 81　已知：如图 3 - 54，$AB=CD$，$AD=CB$，AC 和 BD 交于 O 点.

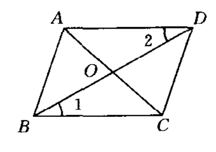


图 3 - 54

求证：$AO=OC$，$BO=OD$.

证明　在$\triangle ABD$和$\triangle CDB$中，

$\because AB=CD$，$AD=CB$，

又 $BD=BD$，　　$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CDB$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

在$\triangle AOD$和$\triangle COB$中，

$\because \angle AOD=\angle COB$，$\angle 1=\angle 2$，$AD=CB$.

$\therefore \triangle AOD\cong\triangle COB$，

$\therefore AO=OC$，$BO=OD$.

题 82　已知：如图 3 - 55，$AB=CD$，$AE=DF$，$CE=FB$.

求证：$AF=DE$.

证明　在$\triangle ABE$和$\triangle CDF$中，

$\because AB=CD, AE=DF, BF=CE,$

$\therefore BF+EF=CE+EF$，即　$BE=CF$.

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$，　　$\therefore \angle B=\angle C$.

在$\triangle ABF$和$\triangle CDE$中，

$\because AB=CD, BF=CE$，又$\angle B=\angle C$，

$\therefore \triangle CDE \cong \triangle BAF$.

$\therefore AF=DE$.

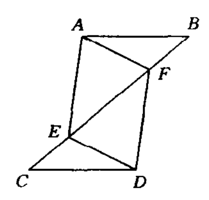


图 3 - 55

题 83　已知：如图 3 - 56，$BF=CE, BC=EF, AB=DE$.

求证：$\angle A=\angle D, \angle 1=\angle 2$.

证明　连结BE.

在$\triangle BCE$和$\triangle FEB$中，

$\because BF=CE, BC=EF$，

又$BE=BE$，　$\triangle BEC \cong \triangle FEB$，

$\therefore \angle C=\angle F$，　$\angle BEC=\angle FBE$.

$\therefore BF /\!/ CE$.

又$\because AB=DE$　　$\therefore AC=DF$.

在$\triangle ACE$和$\triangle DFB$中，

$\because CE=FB$，又$AC=DF, \angle C=\angle F$，

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle DFB$，

$\therefore \angle A=\angle D, \angle AEC=\angle DBF$.

$\because BF /\!/ CE, \therefore \angle 2=\angle AEC, \angle 1=\angle DBF$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

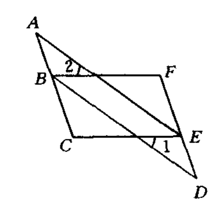


图 3 - 56

题 84　已知：如图 3 - 57，分别以$\triangle ABC$的AB、AC为边，在三角形外作等边三角形ABD、ACE.

求证：$BE=CD$.

证明　$\because \triangle ABD$和$\triangle ACE$均为等边三角形，

$\therefore \angle DAB=\angle CAE=60°, AD=AB, AC=AE$，

$\therefore \angle DAB+\angle BAC=\angle CAE+\angle BAC$，

即$\angle DAC=\angle BAE$，

$\therefore \triangle DAC \cong \triangle BAE$.　$\therefore BE=CD$.

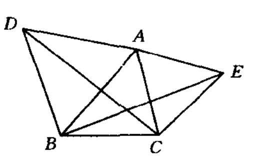


图 3 - 57

题 85　已知：如图 3 - 58，在$\triangle ABC$中，AD是$\angle A$的平分线，$DE \perp AB$于E，$DF \perp AC$于F.

求证：$EF \perp AD$.

证明　在$\triangle AED$和$\triangle AFD$中，

$\because AD=AD$，

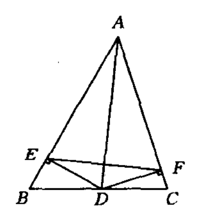


图 3 - 58

又$\angle EAD=\angle FAD$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

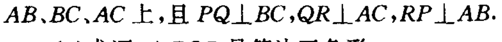
$\therefore \angle AED=\angle AFD=90°$，

$\therefore \triangle AED\cong\triangle AFD$. $\therefore AE=AF$.

故$\triangle AEF$是等腰三角形.

又AD是$\angle A$的平分线，$\therefore AD\perp EF$.

题 86 已知：如图 3 - 59，等边$\triangle ABC$中，点P、Q、R分别在AB、BC、AC上，且$PQ\perp BC$，$QR\perp AC$，$RP\perp AB$.



(1)求证：$\triangle PQR$是等边三角形；

(2)如果$\triangle ABC$的面积是S，求$\triangle PQR$的面积.

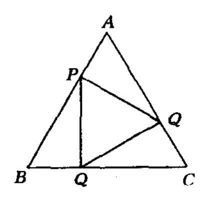


图 3 - 59

解 (1)$\because \angle C=60°$，$\angle QRC=90°$，$\therefore \angle RQC=30°$，

又$\because \angle PQB=90°$，$\therefore \angle PQR=60°$.

同理$\angle QRP=60°$，$\angle RPQ=60°$，

$\therefore \triangle PQR$是等边三角形.

(2)设$BQ=a$，则$BP=QC=2a$，$QR=\sqrt{3}a$.

$\because \frac{\sqrt{3}}{4}(3a)^2=S$，

$\therefore S_{\triangle PQR}=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}a)^2=\frac{1}{3}S$.

题 87 已知：如图 3 - 60，$AB=AC$，$BD>CD$.

求证：$\angle B>\angle C$.

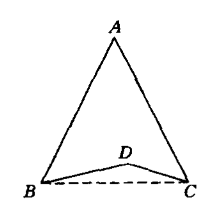


图 3 - 60

证明 连结BC.

$\because AB=AC$， $\therefore \angle ABC=\angle ACB$，

又$\because BD>CD$， $\therefore \angle DCB>\angle DBC$.

$\therefore \angle ABC-\angle DBC>\angle ACB-\angle DCB$.

即 $\angle ABD>\angle ACD$.

题 88 已知：如图 3 - 61，在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，$CD\perp AB$.

求证：$\angle A=2\angle 1$.

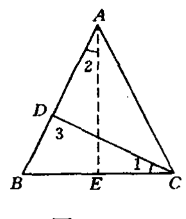


图 3 - 61

证明 如图 3 - 61，作$\angle A$的平分线AE交BC于E.

$\because AB=AC$， $\therefore AE\perp BC$.

又$CD\perp AB$， $\therefore \angle 3=\angle AEB=90°$.

$\because \angle 1=180°-\angle B-\angle 3$.

$\angle 2=180°-\angle B-\angle AEB$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$. $\therefore \angle A=2\angle 2$，

$\therefore \angle A=2\angle 1$.

题 89 已知：如图 3 - 62，AD是$\triangle ABC$的角平分线，$BE\perp AD$，交AD的延长线于

E,$EF /\!/ AC$,交 AB 于 F.

求证:F 是 AB 的中点.

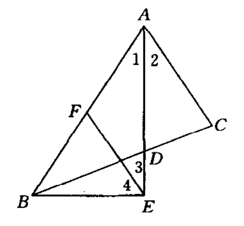


图 3 - 62

证明 $\because AD$ 是$\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle 1=\angle 2$,

$\because EF /\!/ AC$, $\therefore \angle 3=\angle 2$, $\therefore \angle 1=\angle 3$,

$\therefore AF=EF$, 又$\because BE\perp AD$,

$\therefore \angle AEB=\angle 3+\angle 4=90°$.

$\because \angle FBE+\angle 1=180°-\angle AEB$,

即$\angle FBE+\angle 1=90°$.

$\therefore \angle 3+\angle 4=\angle FBE+\angle 1$,$\angle 4=\angle FBE$,

$\therefore BF=EF$, $\therefore BF=FA$.

$\therefore F$ 是 AB 的中点.

题 90 已知:如图 3 - 63,在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=2\angle C$,$BC=2AB$,AD 是中线.

求证:$\triangle ABD$ 是等边三角形.

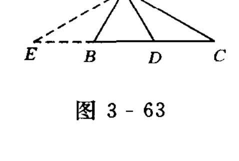


图 3 - 63

证明 延长 CB 至 E,使 $BE=AB$,连结 AE.

$\therefore \angle E=\angle EAB$.

$\because \angle ABC=\angle E+\angle EAB$,

$\therefore \angle ABC=2\angle E$.

$\because \angle ABC=2\angle C$, $\therefore \angle E=\angle C$.

$\therefore AE=AC$,

$\because EB+BD=BD+DC$, 即 $ED=CB$,

$\therefore \triangle AED\cong\triangle ACB$, $\therefore AB=AD$.

又 $AB=BD=DC$, $\therefore AB=AD=BD$.

即$\triangle ABD$ 是等边三角形.

题 91 已知:如图 3 - 64,等边三角形 ABC 中,延长 BC 到 D,延长 BA 到 E,使 $AE=BD$,连结 CE、DE.

求证:$CE=DE$.

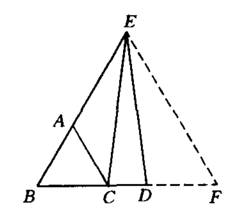


图 3 - 64

证明 延长 BD 到 F,使 $BF=BE$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle B=60°$,

$\therefore \triangle EBF$ 是等边三角形.

$BE=FE$,$\angle B=\angle F=60°$,

又 $DF=BF-BD=BE-AE=AB$,

$\therefore \triangle EBC\cong\triangle EFD$,

$\therefore CE=DE$.

题 92 已知:如图 3-65,$BD\perp AC$,$CE\perp AB$,$BE=CD$.

求证:AO 平分$\angle BAC$.

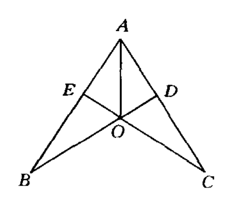


图 3-65

证法一 $\because BD\perp AC$,$CE\perp AB$,

$\therefore \angle BDC=\angle CEB=90°$,

在$\triangle BOE$和$\triangle COD$中,

$\because BE=CD$,$\angle BEC=\angle CDB$,$\angle BOE=\angle COD$,

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle COD$,$\therefore \angle B=\angle C$,

$OB=OC$,$OD=OE$.

$\therefore OB+OD=OE+OC$,即 $BD=CE$.

在$\triangle ABD$和$\triangle ACE$中,

$\because \angle B=\angle C$,$\angle BAD=\angle CAE$,$BD=CE$,

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$, $\therefore AD=AE$

在$\triangle AOE$和$\triangle AOD$中,

$\because AE=AD$,$OE=OD$,$AO=AO$,

$\therefore \triangle AOE\cong\triangle AOD$, $\therefore \angle BAO=\angle CAO$,

$\therefore AO$ 平分$\angle BAC$.

证法二 如图 3-66,连结 BC.

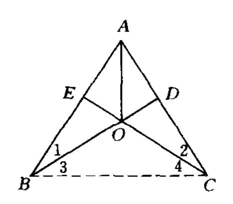


图 3-66

$\because BD\perp AC$,$CE\perp AB$, $\therefore \angle BDC=\angle CEB=90°$.

在$\triangle BOE$和$\triangle COD$中,

$\because BE=CD$,$\angle CEB=\angle BDC$,$\angle BOE=\angle COD$,

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle COD$,$\therefore \angle 1=\angle 2$,$OB=OC$.

$\because OB=OC$,$\therefore \angle 3=\angle 4$.

$\therefore \angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$. $\therefore AB=AC$.

在$\triangle ABO$和$\triangle ACO$中,

$\because AB=AC$,$\angle 1=\angle 2$,$OB=OC$,

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle ACO$,$\therefore \angle BAO=\angle CAO$.

$\therefore AO$ 平分$\angle BAC$.

题 93 已知:如图 3-67,$\angle 1=\angle 2$,$DA=DB$,$AC=\frac{1}{2}AB$.

求证:$DC\perp AC$.

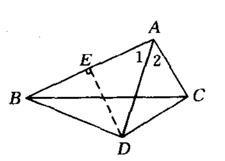


图 3-67

证法一 作 $DE\perp AB$ 于 E,$\therefore \angle DEA=90°$.

$\because DA=DB$, $\therefore AE=\frac{1}{2}AB$.

$\because AC=\frac{1}{2}AB$, $\therefore AC=AE$.

在$\triangle ADE$和$\triangle ADC$中，

$\because AE=AC, \angle 1=\angle 2, AD=AD$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ADC$,

$\therefore \angle ACD=\angle AED=90°$, $\therefore AC \perp DC$.

证法二 如图 3 - 68，延长AC到F，使$CF=AC$，连DF.

$\therefore AC=\frac{1}{2}AF$,

$\because AC=\frac{1}{2}AB$, $\therefore AF=AB$.

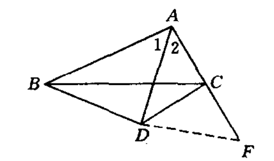


图 3 - 68

在$\triangle ADB$和$\triangle ADF$中，

$\because AB=AF, \angle 1=\angle 2, AD=AD$,

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle ADF$，　$\therefore BD=FD$.

$\because DA=DB$，　$\therefore DA=DF$,

$\because AC=CF, DA=DF$，　$\therefore DC \perp AC$.

题 94 已知：如图 3 - 69，在$\triangle ABC$中，AD为BC的中线，E为AC上一点，BE与AD交于F，若$AE=EF$，则$AC=BF$.

证法一 延长AD到M，使$DM=AD$，连BM.

在$\triangle ADC$和$\triangle MDB$中，

$\because AD=DM, \angle ADC=\angle BDM, DC=BD$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle MDB$,

$\therefore AC=BM, \angle 1=\angle M$.

$\because AE=EF$，　$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又$\because \angle 2=\angle 3$，　$\therefore \angle 3=\angle M$,

$\therefore BF=BM$.　$\therefore BF=AC$.

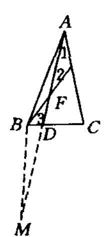


图 3 - 69

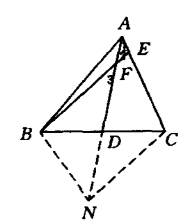


图 3 - 70

证法二 如图 3 - 70，延长FD到N，使$DN=FD$，连CN，

在$\triangle BFD$和$\triangle CND$中，

$\because FD=DN, \angle BDF=\angle CDN, BD=DC$,

$\therefore \triangle BFD \cong \triangle CND$，$\therefore BF=CN$，$\angle 3=\angle N$.

又$\because AE=EF$，　$\therefore \angle 1=\angle 2$，　　$\because \angle 2=\angle 3$，

$\therefore \angle 1=\angle N$，$\therefore CN=AC$，　　$\therefore BF=AC$.

题 95　已知：如图 3-71，$\triangle ABC$ 中，点 D 在 CA 的延长线上，且 $AD=\frac{1}{2}AC$，E 为 BC 的中点，DE 交 AB 于 F，过 F 引直线 $MN\perp DE$，P 为 MN 上一点.

求证：$PD=PE$.

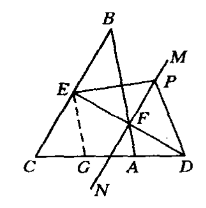


图 3-71

证明　取 AC 的中点 G，连结 EG.

$\because E$ 为 BC 的中点，

$\therefore EG$ 为$\triangle ABC$ 的中位线，$EG /\!/ AB$.

又 $AD=AG$，$\therefore AF$ 是$\triangle DEG$ 的中位线，

$\therefore EF=FD$.

又 $MN\perp DE$ 于 F，$\therefore P$ 是 DE 的垂直平分线 MN 上一点，$\therefore PD=PE$.

题 96　已知：如图 3-72，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，$AD=\frac{1}{4}BC$.

求：$\angle C$ 的度数.

图 3-72

解　取 BC 中点 E，连结 AE.

$\because \angle BAC=90°$，$BE=AE=\frac{1}{2}BC$，

$\because AD=\frac{1}{4}BC$，$\therefore AD=\frac{1}{2}AE$.

$\because AD\perp BC$，$\therefore \angle 1=30°$.

$\because AE=BE$，$\therefore \angle B=\angle 2$，

$\because \angle 1=\angle 2+\angle B$，$\therefore 2\angle B=30°$，$\therefore \angle B=15°$.

又$\because \angle BAC=90°$，$\therefore \angle B+\angle C=90°$.

$\therefore \angle C=75°$.

题 97　已知：如图 3-73，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是中线，$BE=CF$.

(1)求证：$\triangle BDE\cong\triangle CDF$.

(2)当$\angle B=60°$时，过 AB 中点 G，作 $GH /\!/ BD$，求证：$GH=\frac{1}{4}AB$.

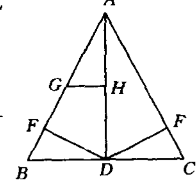


图 3-73

证明　(1)$\because AB=AC$，$\therefore \angle B=\angle C$.

又$\because BE=CF$，$BD=DC$，

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle CDF$.

(2)$\because G$ 是 AB 的中点，$GH /\!/ BD$，$\therefore AH=HD$，$GH=\frac{1}{2}BD$.

又∵$AB=AC,BD=DC$,∴$AD\perp BC$.

而$\angle B=60°$,∴$\angle BAD=30°$,

∴$BD=\frac{1}{2}AB$,

∴$GH=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{4}AB$.

题 98 已知:如图 3 - 74,$\angle B=90°$,$AD=AB=BC$,$DE\perp AC$.

求证:$BE=DC$.

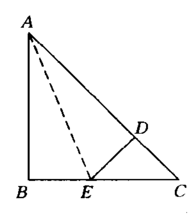


图 3 - 74

证明 连 AE.

∵$ED\perp AC$, ∴$\angle ADE=90°$

∵$\angle B=90°$, 在 Rt△ABE 和 Rt△ADE 中,

∵$AB=AD,AE=AE$,

∴Rt△ABE≌Rt△ADE,∴$ED=BE$.

∵$AB=BC$, ∴$\angle C=\angle BAC$

∵$\angle B=90°$, ∴$\angle C+\angle BAC=90°$,

∴$\angle C=45°$, ∵$DE\perp AC$,

∴$\angle DEC+\angle C=90°$, ∴$\angle DEC=\angle C=45°$.

∴$DC=DE$, ∴$BE=DC$.

题 99 已知:如图 3 - 75,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$,$AE=EB$,$\angle BCD:\angle ACD=1:3$. 求证:$DC=DE$.

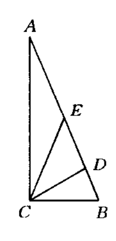


图 3 - 75

证明 ∵$\angle ACB=90°$,∴$\angle BCD+\angle ACD=90°$,

∵$\angle BCD:\angle ACD=1:3$,∴$\angle BCD=22.5°$.

∵$\angle ACB=90°$, $CD\perp AB$,

∴$\angle A+\angle B=\angle BCD+\angle B=90°$.

∴$\angle A=\angle BCD=22.5°$.

∵$\angle ACB=90°$,$AE=EB$, ∴$AE=CE$,

∴$\angle ECA=\angle A=22.5°$.

∴$\angle DCE=90°-22.5°-22.5°=45°$.

∵$\angle DEC=\angle A+\angle ECA=45°$,

∴$\angle DCE=\angle DEC$, ∴$DE=DC$.

题 100 已知:如图 3 - 76,$\angle 1=\angle 2$,$AD=DB$,$CE\perp AD$,$CE=\frac{1}{2}AC$.

求证:$CD=\frac{1}{2}BD$.

证明 ∵$CE\perp AD,CE=\frac{1}{2}AC$,

∴$\angle 1=30°$.

$\because \angle 1=\angle 2$，　$\therefore \angle 2=30°$，

$\therefore \angle 1+\angle 2=60°$.

$\because AD=DB, \angle B=\angle 2=30°$，

$\because \angle ACB+\angle 1+\angle 2+\angle B=180°$，

$\therefore \angle ACB=90°$，　　$\because \angle 1=30°$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BD$.

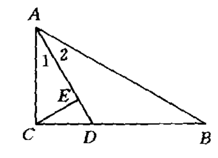


图 3 - 76

题 101　已知:如图 3 - 77,$\angle C=90°, AC=BC, AE=CF, AD=DB$.

求证:$DE\perp DF$.

证明　连 CD.

$\because AC=BC, AD=DB$，

$\therefore \angle 1=\angle 2, \angle 3+\angle 4=90°$，

$\because \angle ACB=90°, AD=DB$，

$\therefore CD=AD$，　$\therefore \angle 1=\angle A$，

$\therefore \angle 2=\angle A$，

在$\triangle ADE$和$\triangle CDF$中，

$\because AE=CF, \angle A=\angle 2, AD=CD$，

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDF$，　$\therefore \angle 3=\angle 5$，

$\because \angle 3+\angle 4=90°$，　$\therefore \angle 5+\angle 4=90°$，

$\therefore DE\perp DF$.

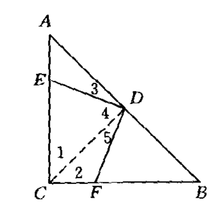


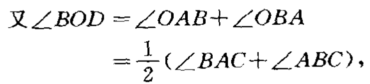
图 3 - 77

题 102　已知:如图 3 - 78,$\triangle ABC$各角的平分线AD、BE、CF交于O,作$OG\perp BC$于G.

求证:$\angle BOD=\angle COG$.

证明　在 $Rt\triangle OCG$ 中，

$$\begin{aligned}\angle COG &= 90°-\angle OCG \\ &= 90°-\frac{1}{2}\angle ACB \\ &= \frac{1}{2}(180°-\angle ACB) \\ &= \frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC),\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}又\angle BOD &= \angle OAB+\angle OBA \\ &= \frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC),\end{aligned}$$

$\therefore \angle BOD=\angle COG$.

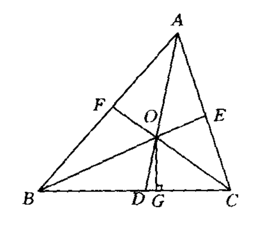


图 3 - 78

题 103　已知:如图 3 - 79,$\angle BAC=90°, AB=AC, AD=DC, AE\perp BD$.

求证:$\angle ADB=\angle CDE$.

证法一　作 $AM\perp BC$ 交 BD 于 M.

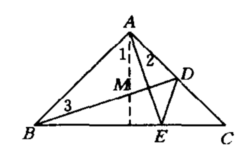


图 3 - 79

$\because AB=AC$，　$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle BAC$，

且 $\angle C=\angle ABC$，　$\because \angle BAC=90°$，

$\therefore \angle 1=45°, \angle C+\angle ABC=90°$，

$\therefore \angle C=\angle 1=45°$.

$\because AE\perp BD, \angle BAC=90°$，

$\therefore \angle 2+\angle ADB=\angle 3+\angle ADB=90°$，

$\therefore \angle 2=\angle 3$，同理：$\angle C=\angle DAM$.

在 $\triangle ABM$ 和 $\triangle CAE$ 中，

$\because \angle 1=\angle C, AB=AC, \angle 3=\angle 2$，

$\therefore \triangle ABM\cong\triangle CAE$，　$\therefore AM=CE$.

在 $\triangle ADM$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$\because AM=CE, \angle DAM=\angle C, AD=DC$，

$\therefore \triangle ADM\cong\triangle CDE$，　$\therefore \angle ADB=\angle CDE$.

证法二　如图 3 - 80，作 $MC\perp AC$ 交 AE 的延长线于 M.

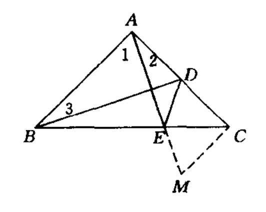


图 3 - 80

$\therefore \angle ACM=\angle BAC=90°$.

由证法(一)知：$\angle 2=\angle 3$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAM$ 中，

$\angle 2=\angle 3, AC=AB, \angle ACM=\angle BAD$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle CAM$，

$\therefore \angle ADB=\angle M, AD=CM$.

由证法(一)知：$\angle ACB=45°$，

$\therefore \angle MCE=45°$.

$\because AD=DC, \therefore DC=CM$，

在 $\triangle DCE$ 和 $\triangle MCE$ 中，

$\because DC=CM, \angle DCE=\angle MCE, CE=CE$，

$\therefore \triangle DCE\cong\triangle MCE$，

$\therefore \angle CDE=\angle M=\angle ADB$.

证法三　如图 3 - 81，作 $AM\perp BC$ 于 M 交 BD 于 N，连 MD.

$\because AB=AC$，　$\therefore BM=CM$.

$\because \angle BAC=90°$，　$\therefore AM=BM=CM$.

$\because AD=DC$，

$\therefore \angle ADB+\angle BDM=\angle CDE+\angle EDM=90°$，

$\angle 1=\angle 2$.

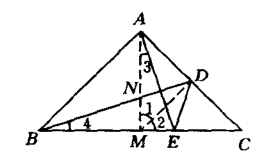


图 3-81

$\because AE \perp BD$,

$\therefore \angle 3+\angle AND=\angle 4+\angle BNM=90^\circ$.

$\because \angle AND=\angle BNM$, $\therefore \angle 3=\angle 4$.

$\because AM \perp BC$, $\therefore \angle BMN=\angle AME=90^\circ$.

在$\triangle AME$和$\triangle BMN$中，

$\because \angle 3=\angle 4, AM=BM, \angle AME=\angle BMN$,

$\therefore \triangle AME \cong \triangle BMN$. $\therefore ME=MN$.

在$\triangle DMN$和$\triangle DME$中，

$\because MN=ME, \angle 1=\angle 2, DM=DM$,

$\therefore \triangle DMN \cong \triangle DME$, $\therefore \angle NDM=\angle EDM$.

$\because \angle ADB+\angle BDM=\angle CDE+\angle EDM$,

$\therefore \angle ADB=\angle CDE$.

证法四 如图 3-82，延长BD至M，使$DM=BD$，连结CM，作$\angle DCN=\angle ACB$.

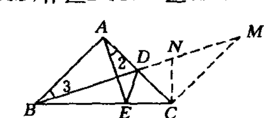


图 3-82

$\because AD=DC, \angle ADB=\angle CDM, BD=DM$,

$\angle ACM=\angle BAC=90^\circ$,

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CDM$.

$\therefore AB=CM, \angle 3=\angle M$,

$\angle ACM=\angle CAB=90^\circ$

由证法(一)知：$\angle 2=\angle 3$,

$\therefore \angle 2=\angle M$,

又$\angle ACE=\angle MCN=45^\circ$,

$AC=AB=CM$,

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle MCN$,

$\therefore CN=CE$,

$\because \angle DCN=\angle DCE, CD=CD$,

$\therefore \triangle DCE \cong \triangle DCN$,

$\therefore \angle CDE=\angle CDN=\angle ADB$.

题 10 已知：如图 3-83，等边$\triangle ABC$中，D是AC的中点，E在BC的延长线上，$CE=CD$，$DM \perp BE$于M.

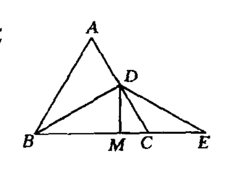


图 3-83

求证：M是BE的中点.

证明 $\because$在等边$\triangle ABC$中，D是AC的中点，

$\therefore \angle DBC=30^\circ$.

又$\angle ACB=60^\circ, CE=CD, \angle E=\angle CDE=30^\circ$.

在$\triangle BDE$中，$\angle DBE=\angle E, DM \perp BE$于$M$，$\therefore BM=ME$，$M$是$BE$的中点.

题 105 已知:如图 3 - 84,以 Rt$\triangle ABC$ 的两直角边 AB、BC 分别作等边$\triangle ABE$ 和等边$\triangle BCF$,连 EF、EC.

求证:(1)$EF=EC$,(2)$EB\perp CF$.

证明 如图 3 - 5,∵$\triangle ABE$ 和$\triangle BCF$ 是等边三角形,

∴$\angle ABE=\angle FBC=60°$,$BC=BF$.

$\angle EBF=360°-(\angle EBA+\angle ABC+\angle CBF)$

$=360°-(60°+90°+60°)=150°$,

∵$BE=BE$,$\angle EBF=\angle EBC$,

∴$\triangle EBF\cong\triangle EBC$.

∴$EC=EF$,$\angle CEB=\angle FEB$,

在$\triangle ECF$ 中,

∵$EC=EF$,BE 平分$\angle CEF$,

∴$EB\perp CF$.

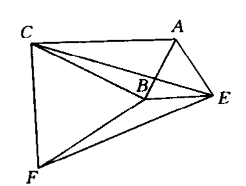


图 3 - 84

题 106 如图 3 - 85,以$\triangle ABC$ 的三边分别作等边$\triangle ABD$、$\triangle BCF$ 和$\triangle ACE$,求证:$DF=AE$.


证明 ∵$\triangle FBC$、$\triangle DBA$ 是等边三角形,

∴$DB=AB$,$FB=BC$,$\angle DBA=\angle FBC=60°$,

又∵$\angle DBF=\angle DBA-\angle FBA=60°-\angle FBA$,

$\angle ABC=\angle FBC-\angle FBA=60°-\angle FBA$,

∴$\angle DBF=\angle ABC$,

∴$\triangle DBF\cong\triangle ABC(SAS)$.

∴$DF=AC$.

又∵$\triangle ACE$ 是等边三角形,

∴$AC=AE$,$DF=AE$.

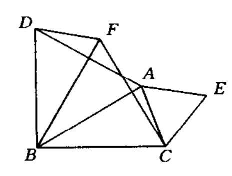


图 3 - 85

题 107 已知:如图 3 - 86,等边$\triangle ABC$ 和等边$\triangle BDE$,且点 A 在 DE 的延长线上.

求证:$BD+DC=AD$.

证明 ∵等边$\triangle ABC$ 和等边$\triangle BED$ 中,

$AB=BC$,$BE=BD$,

又∵$\angle ABE+\angle EBC=\angle EBC+\angle CBD=60°$,

∴$\angle ABE=\angle DBC$,

∴$\triangle ABE\cong\triangle DBC$,

∴$AE=DC$,

∴$AD=AE+ED=DC+BD$.

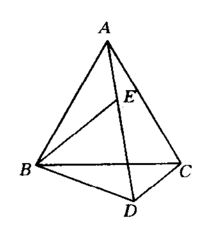


图 3 - 86

题 108 已知:如图 3-87,$\triangle ABC$ 中 $AB=AC$,在 AB 上取一点 E,在 AC 延长线上取一点 F,使 $BE=CF$,设 EF 交 BC 于 G. 求证:$EG=FG$.

证明 过 E 作 $EM /\!/ AC$ 交 BC 于 M.

$\therefore \angle EMB=\angle ACB$.

$\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle ACB=\angle EMB$

$\because BE=CF$,$\therefore ME=BE=CF$

在$\triangle EGM$ 和$\triangle FGC$ 中,

$\because EM=CF$,$\angle EGM=\angle FGC$,$\angle EMG=\angle FCG$

$\therefore \triangle EGM \cong \triangle FCG$,$\therefore EG=FG$.

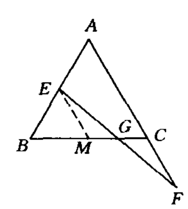
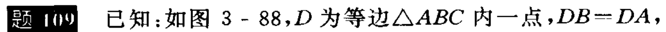
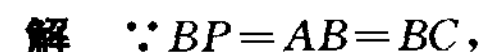


图 3-87


题 109 已知:如图 3-88,D 为等边$\triangle ABC$ 内一点,$DB=DA$,$BP=AB$,$\angle DBP=\angle DBC$,求:$\angle BPD$ 的度数.


解 $\because BP=AB=BC$,

且$\angle DBP=\angle DBC$,

$\therefore \triangle BDP \cong \triangle BDC$,

$\therefore \angle BPD=\angle BCD$.

$\because DA=DB$,$AC=BC$,

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDC$.

$\therefore \angle BCD=\angle ACD$,

$\therefore \angle BCD=30°$.

$\therefore \angle BPD=30°$.

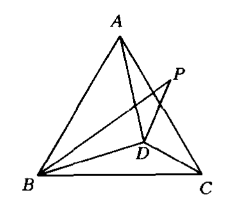
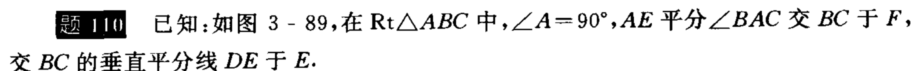


图 3-88


题 110 已知:如图 3-89,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle A=90°$,AE 平分$\angle BAC$ 交 BC 于 F,交 BC 的垂直平分线 DE 于 E.

求证:$\angle DAE=\angle DEA$.

证明 过 A 作 $AH \perp BC$ 于 H.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,D 是 BC 的中点,

$\therefore AD=DC$,$\angle C=\angle DAC$,

又 $AH \perp BC$,$\therefore \angle BAH=\angle C$.

$\therefore \angle BAH=\angle CAD$.

$\because AE$ 平分$\angle BAC$,

$\therefore \angle BAF=\angle CAF$,$\therefore \angle HAF=\angle DAF$.

$\because AH \perp BC$,$DE \perp BC$,

$\therefore AH /\!/ CE$,$\therefore \angle HAF=\angle E$,

$\therefore \angle DAE=\angle DEA$.

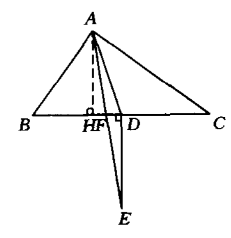


图 3-89

题 111 已知:如图 3 - 90,若$\angle ABD=\angle ACD=60°$,$\angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$,且$\angle BAC=20°$,求:$\angle ACB$的度数.

解 延长CD至E,使$DE=DB$,

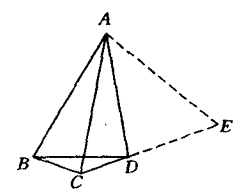


图 3 - 90

$\because \angle ADB=90°-\frac{1}{2}\angle BDC$,

$\therefore 2\angle ADB=180°-\angle BDC$.

$\therefore \angle ADB=\angle ADE$.

又$AD=AD$,$DB=DE$,

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle ADE$,

$\therefore AB=AE$,$\angle E=\angle ABD=60°$,

$\therefore \angle E=\angle ACD$, $\therefore AC=AE=AB$,

$\therefore \angle ACB=\frac{180°-20°}{2}=80°$.

题 112 如图 3 - 91,在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°$,D为AB上一点,$DE\perp BC$交BC于E,若$BE=AC$,$BD=\frac{1}{2}$,$DE+BC=1$,求:$\angle ABC$的度数.

解 延长BC至F,使$CF=DE$,连结AF.

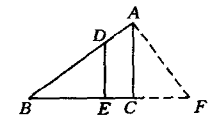


图 3 - 91

易证$Rt\triangle BDE\cong Rt\triangle AFC$.

$\therefore AF=BD=\frac{1}{2}$, $CF=DE$,

$\angle CAF=\angle B$.

$\therefore \angle BAF=90°$,

又$\because BF=BC+DE=1$,

$\therefore \angle ABC=30°$.

题 113 已知:如图 3 - 92,设AT为$\triangle ABC$的内角A的平分线,M为BC中点,$ME\parallel AT$交AB、AC或其延长线于D、E,求证:$BD=CE$.

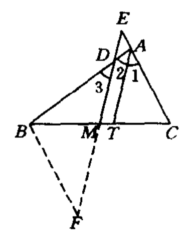


图 3 - 92

证明 过B作AC的平行线与EM的延长线交于F.

易证:$\triangle BMF\cong\triangle CME$,$\therefore BF=CE$.

又$\because ME\parallel AT$,

$\therefore \angle 1=\angle E$,$\angle 2=\angle 3$,

又$\because \angle 1=\angle 2$, $\therefore \angle E=\angle 3$.

又$\because \angle E=\angle F$,

$\therefore \angle 3=\angle F$.

$\therefore BD=BF=CE$.

题 114 如图 3 - 93,已知:P是$\triangle ABC$的$\angle B$、$\angle C$的平分线的交点,过P作$DE\parallel$

BC 分别与 AB、AC 交于 D、E.

求证：(1) $PD=DB$；

(2) $DB+EC=DE$.

证明 $\because BP$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle ABP=\angle PBC$，

又 PC 平分 $\angle ACB$，$\therefore \angle PCB=\angle PCA$.

又 $\because DE /\!/ BC$，

$\therefore \angle PBC=\angle DPB$，$\angle PCB=\angle CPE$，

$\therefore \angle DBP=\angle DPB$，$\angle EPC=\angle ECP$，

$\therefore BD=PD$，$EC=PE$，

$DB+EC=DP+PE=DE$.

图 3 - 93

题 115 已知：如图 3 - 94，$\triangle ABC$ 的中线 $AD<\frac{1}{2}BC$.

求证：$\angle BAC>90°$.

证明 $\because D$ 是 BC 的中点，

$\therefore BD=DC$. $AD<\frac{1}{2}BC$，

$\therefore AD<DC$，$\therefore \angle DAC>\angle C$.

同理 $\angle BAD>\angle B$.

$\therefore \angle DAC+\angle DAB>\angle C+\angle B$，

$\therefore \angle BAC>90°$.

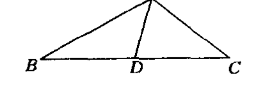


图 3 - 94

题 116 已知：如图 3 - 95，在 $\triangle ABC$ 中，D 在 BC 上，$BD=DC$，$\angle FDE=90°$，F、E 分别在 AB、AC 上.

求证：$BF+CE>EF$.

证明 延长 FD 到 G，使得 $DG=DF$，连结 CG、EG.

$\because BD=DC$，$FD=DG$，$\angle BDF=\angle CDG$，

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDG$，$\therefore CG=BF$.

$\because FD=DG$，$\angle FDE=\angle GDE=90°$，$DE=DE$，

$\therefore \triangle FDE \cong \triangle GDE$，$\therefore EF=EG$.

在 $\triangle ECG$ 中，$CG+CE>EG$，$\therefore BF+CE>EF$.

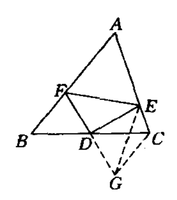


图 3 - 95

题 117 如图 3 - 96，在 $AB>AC$ 的 $\triangle ABC$ 中，M 为底边 BC 的中点，过 M 点引直线垂直于 $\angle A$ 的平分线，分别交 AB、AC 于 D、E，求证：

(1) $AD=AE$； (2) $BD=CE$；

(3) 设 $AB=a$，$AC=b$，试用含 a、b 的代数式表示 AD 的长.

证明 (1) AN 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAN=\angle EAN$，

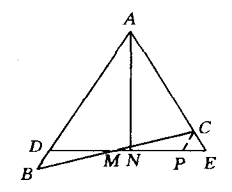


图 3 - 96

又 $AN \perp DE$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ADN \cong \mathrm{Rt}\triangle AEN$，

$\therefore AD=AE$.

(2)过点 C 作 $CP/\!/AB$，交 DE 于点 P.

$\therefore \angle B=\angle MCP$，$\angle DMB=\angle CMP$.

又$\because BM=MC$，

$\therefore \triangle DBM \cong \triangle PCM$，

$\therefore DB=CP$，　　$\therefore \angle BDM=\angle MPC$.

$\therefore \angle ADN=\angle CPE$.

又$\because \angle ADN=\angle E$，

$\therefore \angle CPE=\angle E$，　　$\therefore CP=CE$，

$\therefore DB=CE$.

(3)设 $DB=CE=x$，　　$\because AD=AE$，

$\therefore a-x=b+x$，　$\therefore x=\dfrac{a-b}{2}$.

$\therefore AD=AB-DB=a-\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b}{2}$.

题 118　如图 3 - 97，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，过 BC、AD 的中点 E、F 作直线与 BA、CD 的延长线交得$\angle 1$、$\angle 2$.

求证：$\angle 1=\angle 2$.

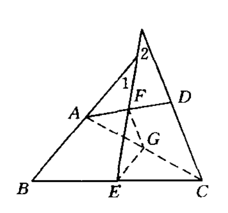


图 3 - 97

证明　连结 AC，取其中点为 G，连结 EG、FG.

$\because E$、G、F 分别是 BC、AC、AD 的中点，

$\therefore EG=\dfrac{1}{2}AB$，$FG=\dfrac{1}{2}CD$，

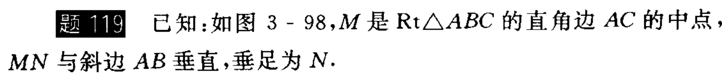
且 $EG/\!/AB$，$FG/\!/CD$.

$\because AB=CD$，于是 $EG=FG$，

$\therefore \angle FEG=\angle EFG$，

又$\because \angle 1=\angle FEG$，$\angle 2=\angle EFG$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$.



题 119　已知：如图 3 - 98，M 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AC 的中点，MN 与斜边 AB 垂直，垂足为 N.

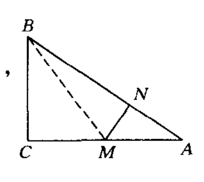


图 3 - 98

求证：$BC^2=BN^2-AN^2$.

证明　连结 BM，由勾股定理可得

$BN^2=BM^2-MN^2=BC^2+CM^2-MN^2$，

$AN^2=AM^2-MN^2$，

又 $CM=MA$，

$\therefore BC^2=BN^2-AN^2$.

题 120 如图 3 - 99，在$\triangle ABC$中，$\angle C$为直角，$\angle A=30^\circ$，分别以AB、AC为边在$\triangle ABC$的外侧作正$\triangle ABE$与正$\triangle ACD$，DE与AB交于F，求证：$EF=FD$.

证明 过E作$EG\perp AB$于G. 则$\angle AEG=30^\circ$.

在$\triangle AEG$与$\triangle ABC$中，

$AE=AB$，$\angle AEG=\angle CAB=30^\circ$，

$\angle BCA=\angle EGA=90^\circ$，

$\therefore \triangle EAG\cong\triangle ABC$，

$\therefore EG=AC=AD$.

又在$\triangle ADF$与$\triangle GEF$中，

$AD=GE$，$\angle AFD=\angle GFE$，

$\angle DAF=\angle EGF=90^\circ$，

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle GEF$，$\therefore DF=EF$.

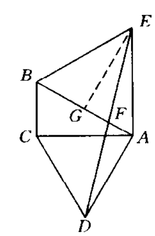


图 3 - 99

题 121 如图 3 - 100，Rt$\triangle ABC$中，$\angle C=90^\circ$，AD是$\angle CAB$的平分线，$CD=1.5$，$BD=2.5$，求AC的长.

解 过D作$DE\perp AB$于E.

$\because \angle C=\angle DEA=90^\circ$，$\angle CAD=\angle EAD$，

$AD=AD$，

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle AED$，$DE=CD=1.5$.

在Rt$\triangle DEB$中，$BD=2.5$，$DE=1.5$，

$\therefore BE=2$.

又$AC=AE$，设$AC=x$，则$AB=x+2$，$BC=4$，

$\therefore x^2+4^2=(x+2)^2$，$x=3$.

$\therefore AC=3$.

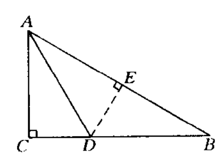


图 3 - 100

题 122 已知：如图 3 - 101，在$\triangle ABC$中，$AC=CB$，AD是CB上的中线，$AE=2BE$，延长ED到F，使$EF=EC$.

求证：$CF\parallel AB$.

证明 取AE的中点G.

$\because AE=2BE$，

$\therefore BE=GE$，又D是BC的中点，

$\therefore DE$是$\triangle BGC$的中位线，

$\angle FEC=\angle ECG$.

又$\triangle CBE\cong\triangle CAG$，

$\therefore CG=CE$，且$CE=CF$，

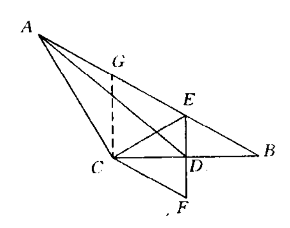


图 3 - 101

$\therefore \triangle CEG$、$\triangle ECF$ 是全等的等腰三角形，

$\therefore \angle AEC=\angle ECF$，$\therefore CF /\!/ AB$.

题 123 如图 3 - 102，在等边$\triangle ABC$ 中，$AE=CD$，AD、BE 交于点 P，$BQ\perp AD$ 于 Q，求证：$BP=2PQ$.

证明 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB=AC \quad \angle BAE=\angle C=60°$，

又$\because AE=DC$，　$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CAD$.

$\therefore \angle ABE=\angle CAD$.

$\because \angle BPQ$ 是$\triangle ABP$ 的外角，

$\therefore \angle BPQ=\angle ABP+\angle BAP$

$=\angle CAD+\angle BAP$

$=\angle BAC=60°$.

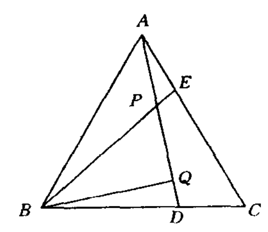


图 3 - 102

在 Rt$\triangle BPQ$ 中，

$\because \angle PBQ=90°-\angle BPQ=30°$，

$\therefore BP=2PQ$.

题 124 已知：如图 3 - 103，$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，E、F 是 BC 上的点，$\angle EAF=45°$.

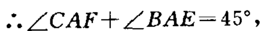
求证：$BE^2+CF^2=EF^2$.

证明 过 B 作 $BG\perp BC$，取 $BG=CF$，连结 GE、GA.

$\because AB=AC$，$BG=CF$，$\angle ABG=\angle C=45°$，

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle ACF$，$AF=AG$，且$\angle CAF=\angle BAG$.

又$\angle CAB=90°$，$\angle EAF=45°$，



$\therefore \angle CAF+\angle BAE=45°$，

即$\angle BAG+\angle BAE=45°$，

$\therefore \angle GAE=\angle FAE=45°$.

又 $AG=AF$，$AE=AE$，

$\therefore \triangle GAE\cong\triangle FAE$，$\therefore EG=EF$.

在 Rt$\triangle BEG$ 中，$BE^2+BG^2=EG^2$，则 $BE^2+CF^2=EF^2$.

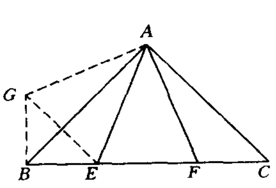


图 3 - 103

题 125 已知：如图 3 - 104，$\angle BAD=\angle CAD$，$DE /\!/ AC$ 交 AB 于 E，$EF\perp AD$ 交 BC 于 F.

求证：$\angle B=\angle FAC$.

证明 $\because \angle BAD=\angle CAD$，$DE /\!/ AC$，

$\therefore \angle EDA=\angle CAD$，$\therefore \angle EDA=\angle EAD$，

又 $EF\perp AD$，$\therefore EF$ 是 AD 的垂直平分线.

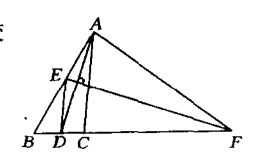


图 3 - 104

$\therefore FA=DF, \angle FAD=\angle FDA$.

又$\angle FAD=\angle FAC+\angle CAD$,

$\angle FDA=\angle B+\angle BAD$,

$\therefore \angle B=\angle FAC$.

题 126 已知:如图 3 - 105,Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$AD\perp AB$,$AD=AB$,$BE\perp DC$ 于 E,$AF\perp AC$ 交 EB 于 F.

求证:CF 平分$\angle ACB$.

证明 $\because FA\perp AC, BC\perp AC$,

$\therefore AF /\!/ CB$,

$\therefore \angle AFB=\angle CBE$.

$\because BE\perp CE$, $\therefore \angle CBE$ 与$\angle BCE$ 互余.

又$\because AC\perp CB$,

$\therefore \angle ACD$ 与$\angle BCE$ 互余,

$\therefore \angle ACD=\angle CBE$,

$\therefore \angle ACD=\angle AFB$.

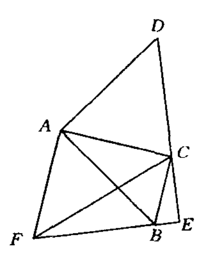


图 3 - 105

又$\because FA\perp AC, DA\perp AB$, $\therefore \angle DAC=\angle FAB$.

又$\because DA=AB$, $\therefore \triangle DAC\cong\triangle BAF$,

$\therefore AC=AF$.

在 Rt$\triangle AFC$ 中, $AC=AF$, $\therefore \angle ACF=45°$,

$\therefore \angle ACF=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore CF$ 平分$\angle ACB$.

题 127 如图 3 - 106 等腰$\triangle ABC$ 中,顶角$\angle A=100°$,作$\angle B$ 的平分线交 AC 于 E,求证:$BC=AE+EB$.

证明 延长 BE 至 F,使 $EF=AE$,连结 FC.

由于 BE 是$\angle B$ 的平分线,因此以 BE 为对称轴,作$\triangle BAE$ 的对称图形$\triangle BA'E$. 则 A' 落在 BC 上. 且$\triangle BAE\cong\triangle BA'E$. 因为$\angle A=\angle 100°$,$AB=AC$,

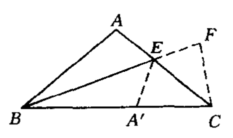
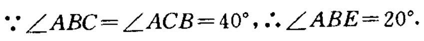


图 3 - 106


$\because \angle ABC=\angle ACB=40°$, $\therefore \angle ABE=20°$.

$\angle AEB=\angle BEA'=\angle A'EC=60°$.

$\therefore \angle FEC=\angle A'EC$.

又$\because EA'=EA=EF$, $\therefore$ $\triangle EFC\cong\triangle EA'C$.

$\therefore \angle FCE=\angle A'CE=40°$, $\angle BCF=80°$.

因为$\angle FBC=20°$, $\therefore \angle BFC=80°$.

$\therefore \angle BFC=\angle BCF$.

故 $BC=BF=BE+EF=BE+AE$.

题 128 已知:如图 3-107,Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AB=AC$,D 为 BC 上任意一点.

求证:$2AD^2=BD^2+CD^2$.

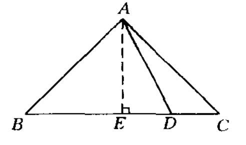


图 3-107

证明 作 $AE\perp BC$ 于 E,则在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,

$\therefore AE=BE=CE$.

$$\begin{aligned}BD^2+CD^2&=(BE+DE)^2+(CE-DE)^2\\&=BE^2+2BE\cdot DE+DE^2+CE^2-2CE\cdot DE+DE^2\\&=2AE^2+2DE^2=2AD^2.\end{aligned}$$

题 129 已知:如图 3-108,在$\triangle ABC$ 中,$AD\perp BC$ 于 D,$\angle B=2\angle C$.

求证:$AC^2=AB^2+AB\cdot BC$.

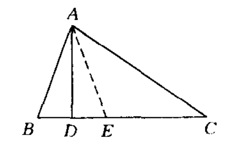


图 3-108

证明 在 DC 上取一点 E,使 $DE=BD$,$AD\perp BC$,

$\therefore AB=AE$,$\angle B=\angle AEB=2\angle C$.

$\therefore \angle C=\angle EAC$,$AE=EC$,$\therefore AB=EC$.

$$\begin{aligned}AC^2&=AD^2+DC^2=AB^2-BD^2+DC^2\\&=AB^2+(DC+BD)(DC-BD)\\&=AB^2+BC\cdot(DC-DE)\\&=AB^2+BC\cdot CE=AB^2+AB\cdot BC.\end{aligned}$$

题 130 如图 3-109,在$\triangle ABC$ 中,$\angle ABC=2\angle C$,AD 平分$\angle BAC$,过 BC 的中点 M 作 AD 的垂线,交 AD 的延长线于 F,交 AB 的延长线于 E,求证:$BE=\frac{1}{2}BD$.

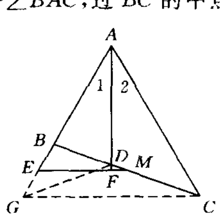


图 3-109

证明 延长 BE 至 G,使 $EG=BE$,连 GC、GD.

$\because BM=MC$,$EG=BE$,$\therefore EM/\!/GC$

又$\because \angle 1=\angle 2$,$AD\perp EM$,

$\therefore \triangle AGC$ 为等腰三角形.

$\therefore AG=AC$.

$\therefore \triangle AGD\cong\triangle ADC$,$\therefore \angle ACD=\angle AGD$.

又$\because \angle ABC=2\angle ACB=2\angle AGD$,

$\angle ABC=\angle AGD+\angle BDG$,

$\therefore \angle AGD=\angle BDG$,$\therefore BD=BG=2BE$,

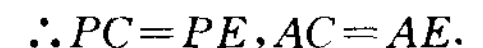
$\therefore BE=\frac{1}{2}BD$.

题 131 如图 3-110,在$\triangle ABC$ 中,$AB>AC$,$AD\perp BC$ 于 D,P 是 AD 上任意一点,

求证:$PB-PC>AB-AC$.

证明 ∵$AB>AC$,$AD\perp BC$,

∴由勾股定理可得$BD>DC$,在DB上截取$DE=DC$,连EA、EP,AE交BP于O.



∴$PC=PE$,$AC=AE$.

在△AOB中,$AO+BO>AB$, ①

同理,$EO+PO>PE$, ②

①+②得 $AE+BP>AB+PE$.

∴$PB-PE>AB-AE$,

∴$PB-PC>AB-AC$.

图 3 - 110

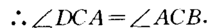
题 132 已知:如图 3 - 111,$DC/\!/AB$,$AB=BC$,$AD\perp DC$于D,$AE\perp BC$于E.

求证:$CD=CE$.

证明 连AC.

∵$CD/\!/AB$,$\angle DCA=\angle CAB$,

又∵$AB=BC$,∴$\angle CAB=\angle BCA$.



∴$\angle DCA=\angle ACB$.

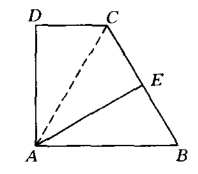


图 3 - 111

又∵$AD\perp CD$,$AE\perp BC$,

∴$\angle D=\angle AEC=90°$.

又$AC=AC$,∴△ADC≌△AEC,∴$CD=CE$.

题 133 已知:如图 3 - 112,在△ABC中,$\angle C=90°$,中线$AD=5$,$BE=\sqrt{40}$.

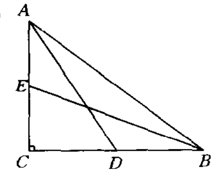


图 3 - 112

求AB的长.

解 设$CE=x$,则$AC=2x$;$CD=y$,则$BC=2y$.

在Rt△ACD与Rt△BCE中,根据勾股定理,得

$$\begin{cases}(2x)^2+y^2=5^2,\\x^2+(2y)^2=(\sqrt{40})^2.\end{cases}$$

两式相加,得$5x^2+5y^2=65$,$x^2+y^2=13$.

∴$AB^2=AC^2+BC^2=4x^2+4y^2=4(x^2+y^2)=52$,

∴$AB=2\sqrt{13}$.

三、三角形的面积

题 134 试述有关三角形的面积公式.

答 设△ABC 的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对的边分别为 a、b、c，h 表示 c 边上的高，$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$.

设△ABC 的内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ch=rp$

题 135 面积为 $25\sqrt{3}\text{cm}^2$ 的正三角形的边长是(　　).

A. 15cm　　B. 10cm　　C. $5\sqrt{2}$ cm　　D. 5cm

解 设△ABC 的边长为 a，则其边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$，则

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=25\sqrt{3}$.

$\therefore a^2=100$，$\therefore a=10$. $\therefore$应选 B.

题 136 在△ABC 中，D、E 分别是 AB、AC 边上的中点，△ADE 的面积为 15cm^2，则△ABC 的面积为(　　).

A. 30cm^2　　B. 60cm^2

C. 45cm^2　　D. 90cm^2

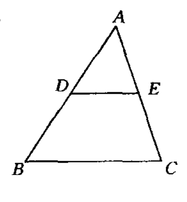
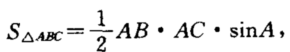


图 3 - 113

解 如图 3 - 113，$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin A$，



$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A$，

又 $AB=2AD$，$AC=2AE$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle ADE}=15\text{cm}^2\times4=60\text{cm}^2$.

$\therefore$应选 B.

题 137 等腰三角形两边长为 4 和 6，则它的面积为(　　).

题 A. $8\sqrt{2}$　　B. $8\sqrt{2}$ 或 15

C. 15　　D. $8\sqrt{2}$ 或 $3\sqrt{7}$

解 满足条件的三角形有两个，当腰为 4，底边为 6 时，它的面积为$3\sqrt{7}$；当腰为 6，底边为 4 时，其面积为 $8\sqrt{2}$. $\therefore$应选 D.

题 138 等腰三角形 ABC 中，一腰上的高为 $3\sqrt{3}$，这条高与底边的夹角为 60°，则 $\triangle ABC$ 的面积为(　　).

A. 27　　B. $27\sqrt{3}$

C. $18\sqrt{3}$　　D. $9\sqrt{3}$

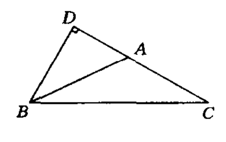


图 3 - 114

解 如图 3 - 114，由题意知：$BD=3\sqrt{3}$，

$\angle DBC=60°$.

$\therefore \angle C=30°$，　$\therefore \angle DBA=30°$.

$AB=\dfrac{DB}{\cos 30°}=6$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$.

$\therefore$ 应选 D.

题 139 已知：如图 3 - 115，等腰 $\triangle ABC$，$AB=AC$，AB 上的高线 $CD=\sqrt{3}$，$\angle BCD=30°$，求：$\triangle ABC$ 的面积.

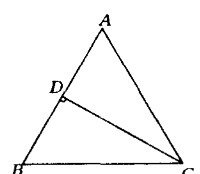


图 3 - 115

解 $\because CD\perp AB$，$\angle DCB=30°$，

$\therefore BC=2BD$.

设 $DB=x$，则 $x^2+(\sqrt{3})^2=(2x)^2$，解得 $x=1$.

则 $BC=2$，又 $AB=AC$，

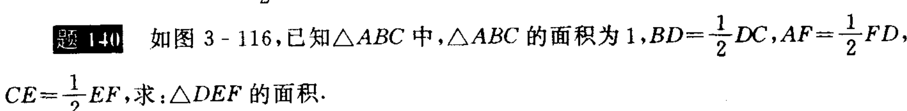
$\therefore \angle B=\angle ACB=60°$.

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB=AC=2$.

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}CD\times AB$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2=\sqrt{3}$.



题 140 如图 3 - 116，已知 $\triangle ABC$ 中，$\triangle ABC$ 的面积为 1，$BD=\dfrac{1}{2}DC$，$AF=\dfrac{1}{2}FD$，$CE=\dfrac{1}{2}EF$，求：$\triangle DEF$ 的面积.

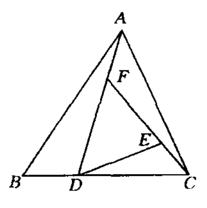


图 3 - 116

解 $\because CE=\dfrac{1}{2}EF$，

$\therefore EF=2CE$，　$\therefore EF=\dfrac{2}{3}FC$.

$\therefore \triangle DEF$ 面积 $=\dfrac{2}{3}\triangle CDF$ 面积.

用同样方法可知：

$\triangle CDF$ 面积 $=\dfrac{2}{3}\triangle ACD$ 面积；

$\triangle ACD$ 面积 $=\frac{2}{3}\triangle ABC$ 面积；

$\therefore \triangle DEF$ 面积 $=\frac{2}{3}\triangle CDF$ 面积 $=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\triangle ACD$ 面积

$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\triangle ABC$ 面积 $=\frac{8}{27}$.

题 141 如图 3 - 117，已知：在 $\angle C=90°$ 的 $\triangle ABC$ 内有一点 O，且 $S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OCA}$.

求证：$OA^2+OB^2=5\cdot OC^2$.

证明 作 $OM\perp AC$，$ON\perp BC$，M、N 分别为垂足，由此可得：

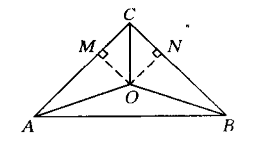


图 3 - 117

$OA^2+OB^2=(OM^2+AM^2)+(ON^2+BN^2)$，

$\because S_{\triangle OCA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，

即 $\frac{1}{2}AC\cdot OM=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AC\cdot BC\right)$，

$\therefore OM=\frac{1}{3}BC$，即 $BN=2\cdot OM$，

同理：$AM=2\cdot ON$，

$\therefore OA^2+OB^2=(OM^2+4ON^2)+(ON^2+4OM^2)$

$=5(OM^2+ON^2)=5(OM^2+MC^2)=5\cdot OC^2$.

题 142 如图 3 - 118，P 为 $\triangle ABC$ 内一点，AP、BP、CP 与对边相交，把 $\triangle ABC$ 分成六个小三角形，其中四个小三角形面积已在图上标明，求：$\triangle ABC$ 的面积.

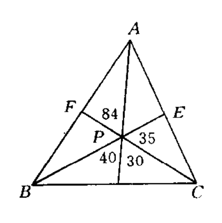
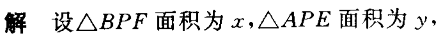


图 3 - 118



解 设 $\triangle BPF$ 面积为 x，$\triangle APE$ 面积为 y，

由题设 $\frac{DB}{DC}=\frac{40}{30}=\frac{4}{3}$，

$\therefore \frac{\triangle ABD\text{ 面积}}{\triangle ACD\text{ 面积}}=\frac{84+x+40}{y+35+30}=\frac{4}{3}$.

又 $\frac{BP}{PE}=\frac{\triangle BPC\text{ 面积}}{\triangle EPC\text{ 面积}}=\frac{40+30}{35}=\frac{2}{1}$，

$\therefore \triangle ABP$ 面积 $=2\times\triangle APE$ 面积，

$\therefore 84+x=2y$，则 $x=2y-84$，

$\therefore 3(2y-84)=4y-112$，得 $\begin{cases}x=56,\\ y=70,\end{cases}$

$\therefore S_{\triangle ABC}=(x+y)+84+40+30+35$

$=126+189=315$.

题 143 如图 3 - 119，设 $ABCD$ 为一任意四边形，E、F 将 AB 三等分，G、H 将 CD 三等分，连结 FG 和 EH，则原四边形被分为三个小的四边形，试证中间的四边形与原四边形的三分之一面积相等.

证明 连结 DB、DF、BH、HF. 因为

$S_{\triangle DFB}=\frac{1}{3}S_{\triangle DAB}$,$S_{\triangle BHD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}$.

所以 $S_{\triangle DFB}+S_{\triangle BHD}=\frac{1}{3}(S_{\triangle DAB}+S_{\triangle BCD})$,

即 $S_{DFBH}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$,

因为 $S_{\triangle HEF}=S_{\triangle HFB}$,$S_{\triangle FGH}=S_{\triangle FHD}$,

所以 $S_{\triangle HEF}+S_{\triangle FGH}=S_{\triangle HFB}+S_{\triangle FHD}$,

即 $S_{HEFG}=S_{DFBH}$.

因此 $S_{HEFG}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

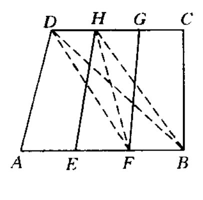
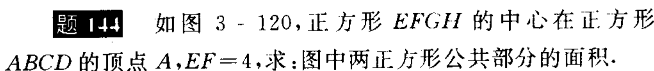


图 3-119



题 144 如图 3-120,正方形 $EFGH$ 的中心在正方形 $ABCD$ 的顶点 A,$EF=4$,求:图中两正方形公共部分的面积.

解 过 A 作 $AP\perp HG$ 于 P,$AQ\perp GF$ 于 Q,并设 AD 与 HG 交于 M,AB 与 GF 交于 N,则

$\angle PAQ=\angle MAN=90°$,

所以 $\angle MAP=\angle NAQ$.

因为 $AP=AQ$,所以 $\text{Rt}\triangle APM\cong\text{Rt}\triangle AQN$.

因此,$S_{AMGN}=S_{APGQ}=\frac{1}{4}S_{EFGH}=\frac{1}{4}\times 4^2=4$.

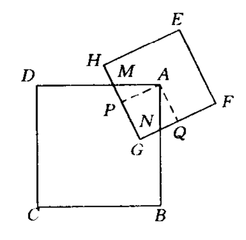


图 3-120

题 145 如图 3-121,在任意四边形 $ABCD$ 中,M、N 分别是 AB、DC 的中点,BN、AN 交 CM、DM 分别于 P、Q. 求证:$S_{\triangle BPC}+S_{\triangle AQD}=S_{MQNP}$.

证明 设 N 到 AB 的距离为 h,点 C、D 到 AB 的距离为 h_1、h_2,则

$h=\frac{1}{2}(h_1+h_2)$.

$S_{\triangle DAM}=\frac{1}{2}AM\cdot h_2$,$S_{\triangle CMB}=\frac{1}{2}MB\cdot h_1$,

$$\begin{aligned}\therefore S_{\triangle DAM}+S_{\triangle CMB}&=\frac{1}{2}AM\cdot h_2+\frac{1}{2}MB\cdot h_1\\&=\frac{1}{2}AM(h_2+h_1)\\&=\frac{1}{2}AM\cdot 2h=AM\cdot h.\end{aligned}$$

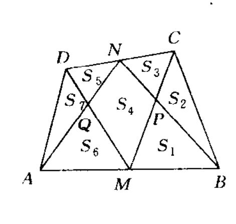


图 3-121

而 $S_{\triangle NAB}=\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}(2AM)\cdot h=AM\cdot h$.

$\therefore S_{\triangle NAB}=S_{\triangle DAM}+S_{\triangle CMB}$,

$\therefore S_4+S_5+S_1=S_6+S_5+S_1+S_2$,

$\therefore S_4=S_6+S_2$,$S_{\triangle BPC}+S_{\triangle AQD}=S_{MQNP}$.

题 146　如图 3 - 122，已知 Rt△ABC 的两直角边 $AB=4$，$AC=3$，△ABC 内有一点 P，$PD\perp BC$ 于 D，$PE\perp AC$ 于 E，$PF\perp AB$ 于 F，且$\frac{AB}{PF}+\frac{AC}{PE}+\frac{BC}{PD}=12$.

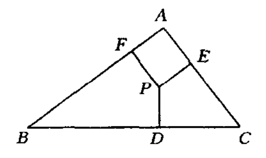


图 3 - 122

求：PD、PE、PF.

解　由勾股定理知 $BC=5$，

设 $PF=x$，$PE=y$，$PD=z$，则

$$\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=12. \quad ①$$

$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}=S_{\triangle ABC}$，

所以$\frac{1}{2}AB\cdot x+\frac{1}{2}AC\cdot y+\frac{1}{2}BC\cdot z=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，

$AB\cdot x+AC\cdot y+BC\cdot z=AB\cdot AC$，

$$4x+3y+5z=12, \quad ②$$

①+②得 $4x+3y+5z+\frac{4}{x}+\frac{3}{y}+\frac{5}{z}=24$，

配方得$\left(\sqrt{4x}-\sqrt{\frac{4}{x}}\right)^2+\left(\sqrt{3y}-\sqrt{\frac{3}{y}}\right)^2+\left(\sqrt{5z}-\sqrt{\frac{5}{z}}\right)^2=0.$

所以

$\left(\sqrt{4x}-\sqrt{\frac{4}{x}}\right)=0,\left(\sqrt{3y}-\sqrt{\frac{3}{y}}\right)=0,\left(\sqrt{5z}-\sqrt{\frac{5}{z}}\right)=0.$

解之得　$x=1,y=1,z=1$.

即 $PD=PE=PF=1$.

题 147　如图 3 - 123，P 为△ABC 内一点，三边 a、b、c 的高分别为 h_a、h_b、h_c，且 P 到 a、b、c 的距离分别为 t_a、t_b、t_c.

求证：$\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$.

证明　连结 PA、PB、PC.

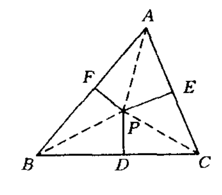


图 3 - 123

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}$，

$\therefore \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}+\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=1$.

又 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}ct_c$，$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}at_a$，$S_{\triangle PCA}=\frac{1}{2}bt_b$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ch_c=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b$.

$\therefore \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}ct_c}{\frac{1}{2}ch_c}=\frac{t_c}{h_c}$.

同理 $\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{t_a}{h_a},\frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{t_b}{h_b}$.

$\therefore \frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$.

题 148 如图 3 - 124，P 是$\triangle ABC$ 内一点，延长 AP、BP、CP 与对边相交于 F、D、E，已知 $PA=x,PB=y,PC=z,x+y+z=43$，$PF=PD=PE=3$.

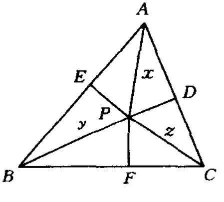


图 3 - 124

求：xyz 的值.

解 设 P 到 BC、CA、AB 的距离分别为 t_a、t_b、t_c，BC、CA、AB 边上的高分别为 h_a、h_b、h_c. 则有

$\frac{t_a}{h_a}=\frac{3}{x+3},\frac{t_b}{h_b}=\frac{3}{y+3},\frac{t_c}{h_c}=\frac{3}{z+3}$,

由上例知 $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$,

$\therefore \frac{3}{x+3}+\frac{3}{y+3}+\frac{3}{z+3}=1$,

$3[(xy+yz+zx)+6(x+y+z)+27]$

$=xyz+3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)+27$.

$\therefore xyz=9(x+y+z)+54=9\times43+54=441$.

题 149 如图 3 - 125，已知点 D、E、F 分别在$\triangle ABC$ 三边上，AD、BE 都经过 CF 的中点 O，且 $S_{\triangle COE}=167\text{cm}^2,S_{\triangle COD}=\frac{4}{5}S_{\triangle COE}$，求：$S_{\triangle ABC}$.

解 设 $S_{\triangle COE}=1,S_{\triangle BOF}=x,S_{\triangle AOE}=y$，则 $S_{\triangle COD}=\frac{4}{5}$，而 $OC=OF$,

$\therefore S_{\triangle AOF}=S_{\triangle AOC}=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle COE}=y+1$,

$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle BOF}=x$.

$\therefore S_{\triangle BOD}=S_{\triangle BOC}-S_{\triangle COD}=x-\frac{4}{5}$.

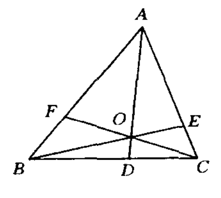


图 3 - 125

又 $\frac{S_{\triangle BOA}}{S_{\triangle BOD}}=\frac{AO}{DO}=\frac{S_{\triangle COA}}{S_{\triangle COD}}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle BOF}+S_{\triangle AOF}}{S_{\triangle BOD}}=\frac{x+y+1}{x-\frac{4}{5}}=\frac{y+1}{\frac{4}{5}}$.

即为 $5xy+x-8y-8=0$.

又 $\frac{S_{\triangle BAE}}{S_{\triangle BCE}}=\frac{AE}{CE}=\frac{S_{\triangle OAE}}{S_{\triangle COE}}$,

$\therefore \frac{x+y+1+y}{x+\frac{4}{5}-\frac{4}{5}+1}=\frac{y}{1}$.

即是 $xy-x-y-1=0$,

解方程组$\begin{cases}5xy+x-8y-8=0,\\xy-x-y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle AOF}+S_{\triangle BOF}+S_{\triangle BOD}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle COE}$.

$=y+y+1+x+x-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+1$

$=2x+2y+2=12$.

$\because S_{\triangle COE}=167\text{cm}^2$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=12\times 167=2004\text{cm}^2$.

第四章　四　边　形

一、多边形及其性质

题 1　试述多边形的定义、分类及其表示法.

答　(1)定义:所谓多边形是指在平面内不在同一直线上的由一些线段顺次首尾相接组成的图形. 三角形、四边形、五边形等是特殊的多边形.

(2)分类:分为凸多边形和凹多边形. 凸多边形是指延长多边形的任一边之后,其余各边均在这边所在直线的同侧;凹多边形是指延长多边形的某一边之后,其条各边不同在这边所在直线同侧. 如图 4 - 1、图 4 - 2,分别为凸多边形和凹多边形,我们本书所研究的在没有特别说明的情况下,均指凸多边形.

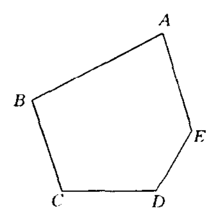


图 4 - 1

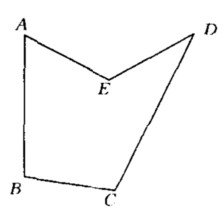


图 4 - 2

(3)表示法:如图 4 - 1、图 4 - 2 所示多边形,分别表示为“五边形 $ABCDE$”、“五边形 $ABCDE$”.

题 2　试述多边形的常见性质.

答　(1)n 边形的内角和是$(n-2)\cdot 180°$;

(2)多边形的外角和是 $360°$;

(3)n 边形的对角线共有$\frac{1}{2}n\cdot(n-3)$条.

题3 每个内角都相等的多边形，它的外角等于内角的三分之二，则这个多边形是(　　).

A. 四边形　　B. 五边形　　C. 六边形　　D. 七边形

解 设这个多边形的边数为 n，则这个多边形的一个内角为 $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$，一个外角为 $\frac{360^\circ}{n}$.

由 $\frac{360^\circ}{n}=\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}\times\frac{2}{3}$，解得　$n=5$.

故应选 B.

题4 多边形每一个内角都等于 150°，则从此多边形一个顶点出发引出的对角线有(　　).

A. 7 条　　B. 8 条　　C. 9 条　　D. 10 条

解 设这个多边形的边数为 n，则这个多边形的每一个内角为 $\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$，由题设可知：$\frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}=150^\circ$，解得 $n=12$.

∴从一个顶点出发所引对角线条数为：$n-3=9$.

故应选 C.

题5 一个多边形的内角中锐角最多可有(　　).

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

解 这个多边形无论是几边形，其外角和均为 360°，故其外角之中至多仅有 3 个钝角. 相对应地，多边形的内角中最多有 3 个锐角.

故应选 B.

题6 已知多边形内角和与外角和的和为 2160°，求多边形对角线条数.

解 设这个多边形为 n 边形，由题意得

$$(n-2)\cdot 180^\circ+360^\circ=2160^\circ,\quad \therefore n=12.$$

∴多边形对角线条数 $=\frac{1}{2}n(n-3)=\frac{1}{2}\times 12\times(12-3)=54$.

题7 已知多边形的一个内角的外角与其余各内角度数总和为 600°，求边数.

解 设这个多边形的边数为 n，这个内角的大小为 α，则有

$$(n-2)\cdot 180^\circ-\alpha+(180^\circ-\alpha)=600^\circ.\quad (0^\circ<\alpha<180^\circ)$$

整理得 $(n-2)\cdot 90^\circ=210^\circ+\alpha$，

$\therefore 210^\circ<(n-2)\cdot 90^\circ<390^\circ$，

$\therefore 2+\frac{7}{3}<n<2+\frac{13}{3}$，即 $4\frac{1}{3}<n<6\frac{1}{3}$，

$\therefore n=5$ 或 $n=6$.

答：这个多边形的边数是 5 或 6.

题 8 若一个多边形的边数增加一条，其内角和变为 1440°，问这个多边形是几边形？

解 设这个多边形的边数为 n，则增加一边后，边数变为 $n+1$. 由内角和定理，有 $(n+1-2)\cdot 180°=1440°$，$\therefore n=9$.

答：这个多边形是九边形.

题 9 如图 4-3，四边形 $ABCD$ 中，$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，并且 $\angle C+\angle D=120°$，求 $\angle AOB$ 的度数.

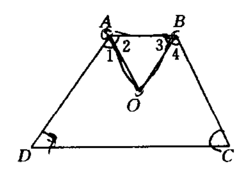


图 4-3

解 $\because$ 四边形的内角和为 $(4-2)\cdot 180°=360°$，

$\angle C+\angle D=120°$，

$\therefore \angle DAB+\angle ABC=360°-120°=240°$.

又 $\because \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=240°$，

$\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，

$\therefore \angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}\times 240°=120°$.

$\therefore \angle AOB=180°-\angle 2-\angle 3=60°$.

题 10 如图 4-4，$ABCD$ 是任意四边形.

求证：$\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)<AC+BD<AB+BC+CD+DA$.

证明 在 $\triangle ABD$ 中有 $AB+AD>BD$，

在 $\triangle ABC$ 中有 $AB+BC>AC$，

在 $\triangle BCD$ 中有 $BC+CD>BD$，

在 $\triangle ADC$ 中有 $AD+CD>AC$，

$\therefore 2(AB+BC+CD+DA)>2(AC+BD)$.

即 $AB+BC+CD+DA>AC+BD$.

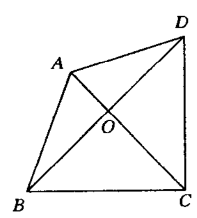


图 4-4

在 $\triangle OAB$ 中有 $OA+OB>AB$，

在 $\triangle OAD$ 中有 $OA+OD>AD$，

在 $\triangle OBC$ 中有 $OB+OC>BC$，

在 $\triangle OCD$ 中有 $OC+OD>CD$，

$\therefore$ $2(OA+OC+OB+OD)>AB+BC+CD+DA$.

即 $AC+BD>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$.

$\therefore \frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)<AC+BD<AB+BC+CD+DA$.

小结：此题结论非常重要，它告诉我们四边形的对角线之和小于四边形的周长，而大于周长的一半，在解决关于线段和差大小问题时常被使用.

题 11 如图 4-5，若四边形 $ABCD$ 为任意四边形，点 O 为异于对角线交点的任意一点.

求证：$OA+OB+OC+OD>AC+BD$.

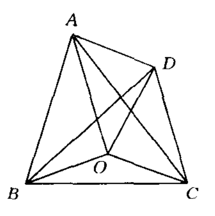


图 4 - 5

证明 在$\triangle OAC$中有$OA+OC>AC$，

在$\triangle OBD$中有$OB+OD>BD$，

$\therefore OA+OB+OC+OD>AC+BD$.

题 12 如图 4 - 6，已知六边形 $ABCDEF$ 中，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F=120°$.

求证：$AB+BC=EF+ED$.

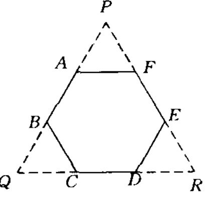


图 4 - 6

证明 延长各边作成如图的$\triangle PQR$.

$\because \angle QBC=180°-\angle ABC=60°$，

同理，$\angle QCB=60°$，$\therefore \angle Q=60°$.

又$\because \triangle BQC$、$\triangle EDR$、$\triangle PAF$和$\triangle PQR$均为正三角形，

$\therefore AB+BC=AB+BQ=AQ$，

$FE+ED=FE+ER=FR$.

$\therefore AQ=PQ-PA=PR-PF=FR$.

$\therefore AB+BC=FE+ED$.

题 13 如图 4 - 7，已知五边形 $ABCDE$ 中，$\angle EAD>\angle ADC$，$\angle EDA>\angle DAB$.

求证：$AE+ED>AB+BC+CD$.

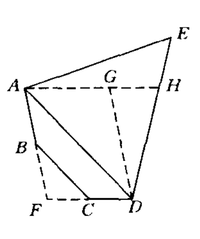


图 4 - 7

证明 延长 AB、CD 相交于 F，则

$AB+BC+CD<AF+FD$.

$\because \angle EAD>\angle ADC$，$\angle EDA>\angle DAB$，

作 $AH/\!/CD$，$DG/\!/AB$，AH、DG 相交于 G，则四边形 $AFDG$ 为平行四边形.

$\therefore AG+GD=AF+FD>AB+BC+CD$.

又$\because AE+EH>AG+GH$，$DH+GH>DG$，

$\therefore AE+ED>AG+GD$.

$\therefore AE+ED>AB+BC+CD$.

题 14 求证：等边凸 n 边形内任一点至各边的距离之和为定值.

证明 设 P 为等边凸 n 边形内一点，这个 n 边形边长为 a，点 P 至各边的距离分别为 $h_1,h_2,\cdots,h_n$，n 边形面积为 S. 连结点 P 至各顶点的线段分 n 边形成 n 个三角形，则 $S=\frac{1}{2}a(h_1+h_2+\cdots+h_n)$.

$\because S$ 为定值，a 为定值，$\therefore h_1+h_2+\cdots+h_n$ 为定值$\frac{2S}{a}$.

二、平行四边形

题 15 试述平行四边形的性质与判定.

答 (1)两组对边分别平行的四边形称为平行四边形.

(2)平行四边形的对边平行且相等,对角相等,对角线互相平分.

(3)平行四边形的判定:两组对边分别平行的四边形;一组对边平行且相等的四边形;两组对边分别相等的四边形;两条对角线互相平分的四边形;两组对角分别相等的四边形都是平行四边形;中心对称的四边形也是平行四边形.

(4)平行四边形是中心对称图形,对角线的交点为对称中心.

(5)平行四边形记作符号"▱".

题 16 简述几个特殊的平行四边形的定义及性质.

答 (1)矩形:一个角是直角的平行四边形. 矩形的四个角均是直角,对角线相等.

(2)菱形:一组邻边相等的平行四边形. 菱形的四条边都相等,对角线互相垂直,并且每一条对角线平分一组对角.

(3)正方形:有一组邻边相等,并且有一个角是直角的平行四边形. 正方形的四个角都为直角,四条边都相等,对角线互相垂直且相等,每条对角线平分一组对角.

题 17 平行四边形的一个角比它的邻角的 2 倍还大 15°,则相邻两个内角为( ).

A. 30°,75° B. 40°,95° C. 55°,125° D. 50°,115°

解 设较大的角的度数为 α,较小角的度数为 β. 由题意得方程组

$$\begin{cases}\alpha=2\beta+15°,\\ \alpha+\beta=180°.\end{cases} \quad 解得 \begin{cases}\alpha=125°,\\ \beta=55°.\end{cases}$$

故应选 C.

题 18 如图 4 - 8,▱$ABCD$ 的周长为 60cm,对角线相交于 O,$\triangle BOC$ 的周长比$\triangle AOB$ 的周长小 8cm,则 AB、BC 的长为( )cm.

A. 18、10 B. 20、12

C. 34、26 D. 19、11

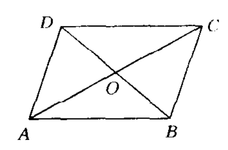


图 4 - 8

解 $\triangle AOB$ 的周长为 $AB+OB+OA$,

$\triangle BOC$ 的周长为 $BC+OB+OC$,

$\therefore \triangle AOB$ 的周长$-\triangle BOC$ 的周长

$=AB-BC+OA-OC$.

又∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∴$OA=OC$.

∴$AB-BC=8$.　　①

又▱$ABCD$ 的周长$=2(AB+BC)=60$,

∴$AB+BC=30$.　　②

由①、②可得 $AB=19,BC=11$. ∴应选 D.

题 19 矩形的两条对角线的夹角为 60°,这个矩形两邻边的比是(　　).

A. 1∶1　　B. 1∶2　　C. 2∶3　　D. $1:\sqrt{3}$

解 设矩形宽为 x,则对角线长为 $2x$.

∴矩形长为 $\sqrt{(2x)^2-x^2}=\sqrt{3}x$.

∴两邻边之比为 $x:\sqrt{3}x=1:\sqrt{3}$. ∴应选 D.

题 20 菱形的一条对角线与边长相等,则菱形中较小的内角是(　　).

A. 15°　　B. 30°　　C. 60°　　D. 90°

解 ∵菱形的一条对角线与边长相等,∴菱形中有一个内角为 60°.

∴与它相邻的另一个内角为 120°.

∴菱形中最小内角为 60°. ∴应选 C.

题 21 若矩形的对角线等于较长边 a 的一半与较短边 b 的和,则 $a:b$ 等于(　　).

A. 1∶3　　B. 2∶1　　C. 4∶3　　D. 3∶2

解 ∵矩形的对角线长为 $\sqrt{a^2+b^2}$,

∴ $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{1}{2}a+b$,即 $a^2+b^2=\frac{1}{4}a^2+ab+b^2$.

∴ $\frac{3}{4}a^2=ab$,　∴$a:b=4:3$. ∴应选 C.

题 22 如图 4－9,E 是▱$ABCD$ 的对角线 AC 上任一点,则下列结论正确的是(　　).

A. $S_{\triangle BEC}+S_{\triangle AED}>\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$

B. $S_{\triangle BEC}+S_{\triangle AED}<\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$

C. $S_{\triangle BEC}=S_{\triangle DEC}$

D. $S_{\triangle BEC}+S_{\triangle DEC}=S_{\triangle BEC}$

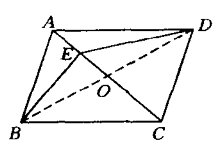


图 4－9

解 连 BD 交 AC 于 O,则 $OB=OD$.

∴$S_{\triangle BOC}=S_{\triangle COD}$,$S_{\triangle BOE}=S_{\triangle DOE}$.

∴$S_{\triangle BOC}+S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COD}+S_{\triangle DOE}$.

即 $S_{\triangle BEC}=S_{\triangle DEC}$. ∴应选 C.

题 23 如图 4－10,在菱形 $ABCD$ 中,E、F 是 BC、CD 上的点,且 $AE=EF=AF=$

AB. 则$\angle C$的度数为(　　).

A. 80°　　B. 100°　　C. 120°　　D. 140°

解　∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=BC=CD=AD, \angle B+\angle C=180°$,

$\angle B=\angle D$.

又∵$AB=EF=AF=AE$,

$\therefore AB=AE=AF=AD, \angle AEF=60°$.

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$. $\therefore CE=CF$.

$\therefore \angle CEF=\angle CFE=\frac{1}{2}(180°-\angle C)$.

$\therefore \angle B=\angle AEB=180°-60°-\frac{1}{2}(180°-\angle C)$

$=180°-150°+\frac{1}{2}\angle C$.

$\therefore \angle C+180°-150°+\frac{1}{2}\angle C=180°$.

$\therefore \angle C=100°$. ∴应选 B.

图 4 - 10

题 24　如图 4 - 11，已知：▱$ABCD$ 中，$AE \perp BC$，$AF \perp DC$，$BC : CD=3 : 2$，$AB=EC$，则$\angle EAF=$(　　).

A. 50°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 80°

解　∵$BC : AB=3 : 2$，$AB=EC$，

$\therefore BE=BC-CE=BC-AB=\frac{1}{2}AB$.

又∵$AE \perp BC$，$\therefore \angle BAE=30°$. $\therefore \angle B=60°$.

$\therefore \angle C=120°$.

又四边形 $AECF$ 内角和为 360°，

$\therefore \angle EAF=60°$. ∴应选 B.

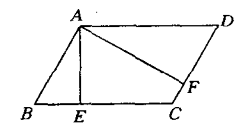


图 4 - 11

题 25　已知菱形一条对角线是另一条对角线的 2 倍，且面积为 S，则这个菱形的边长为(　　).

A. $\frac{\sqrt{S}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3S}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5S}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6S}}{2}$

解　设较短的对角线长为 x，则较长的对角线长为 $2x$.

$\therefore S=\frac{1}{2}x \cdot 2x=x^2$.

又∵菱形的对角线互相垂直平分，

∴菱形的边长$=\sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2+x^2}=\sqrt{\frac{5}{4}x^2}=\frac{\sqrt{5S}}{2}$. ∴应选 C.

题 26　如图 4 - 12，在▱$ABCD$ 中，$\angle ABC=3\angle A$，F 在 CB 的延长线上，$EF \perp DC$

于 E,$CF=CD$,$EF=1$,求 DE 的长.

解 在▱$ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,

$\angle A+\angle ABC=180^\circ$.

又∵$EF\perp CD$,∴$EF\perp AB$.

又∵$\angle ABC=3\angle A$,

∴$\angle A=45^\circ$,$\angle ABC=135^\circ$.

∴$\angle C=\angle F=45^\circ$. ∴$CE=EF=1$.

∴$CD=CF=\sqrt{2}EF=\sqrt{2}$.

∴$DE=\sqrt{2}-1$.

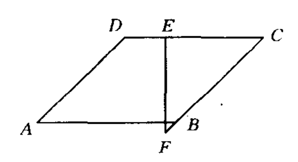


图 4 - 12



题27 如图 4 - 13,在▱$ABCD$ 中,$DM=BN$,$BE=DF$.

求证:四边形 $MENF$ 是平行四边形.

证明 在▱$ABCD$ 中,$AD/\!/BC$.

∴$\angle MDF=\angle NBE$.

又 $DM=BN$,$BE=DF$,

∴$\triangle BEN\cong\triangle DFM(SAS)$.

∴$EN=FM$.

同理可证 $\triangle DME\cong\triangle BNF(SAS)$.

∴$ME=NF$.

∴四边形 $MENF$ 是平行四边形.

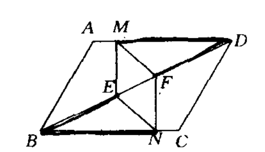


图 4 - 13

题28 如图 4 - 14,已知 $AB/\!/EF/\!/GH$,$BE=GC$.

求证:$AB=EF+GH$.

证明 过 F 作 $FP/\!/BC$,交 AB 于 P.

∵$PB/\!/EF$,$PF/\!/BE$,

∴四边形 $PBEF$ 是平行四边形.

∴$PB=EF$,$FP=BE$.

又∵$BE=GC$,∴$FP=GC$.

易证 $\triangle APF\cong\triangle HGC(AAS)$. ∴$AP=GH$.

∴$AB=AP+PB=EF+GH$.

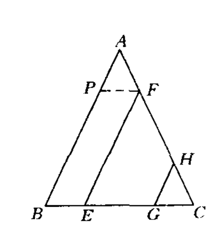


图 4 - 14

题29 如图 4 - 15,在▱$ABCD$ 中,$AE\perp BD$,$BM\perp AC$,$CN\perp BD$,$DF\perp AC$.

求证:$MN/\!/EF$.

证明 连结 ME、NF,设 AC、BD 相交于 O.

∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴$BO=DO$.

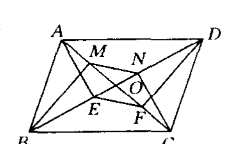


图 4 - 15

又$\angle BOM=\angle DOF$，$\angle BMO=\angle DFO=90°$，

$\therefore \triangle BMO\cong\triangle DFO$，$\therefore MO=FO$.

同理，$\triangle AEO\cong\triangle CNO$，$\therefore EO=NO$，

$\therefore$四边形 $EFNM$ 是平行四边形. $\therefore MN/\!/EF$.

题 30 已知：如图 4 - 16，$AB/\!/CD$，$\angle ABC=\angle ADC$，$AE=CF$，$BE=DF$.

求证：EF 与 AC 互相平分.

证明 连结 AF、EC.

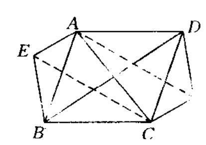


图 4 - 16

$\because AB/\!/CD$，$\therefore \angle BAC=\angle DCA$.

又$\because \angle ABC=\angle ADC$，$AC=AC$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle CDA$. $\therefore AB=CD$.

又$\because AE=CF$，$BE=DF$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CDF$.

$\therefore \angle EAB=\angle FCD$.

$\therefore \angle EAC=\angle EAB+\angle BAC$

$\qquad=\angle ACD+\angle FCD=\angle ACF$.

$\therefore AE/\!/CF$.

因此，四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\therefore EF$ 与 AC 互相平分.

题 31 如图 4 - 17，已知$\triangle ABC$，以 BC 为边在点 A 的同侧作正$\triangle DBC$，以 AC、AB 为边在$\triangle ABC$ 的外部作正$\triangle EAC$ 和正$\triangle FAB$.

求证：四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

证明 在$\triangle BDF$ 和$\triangle BCA$ 中，

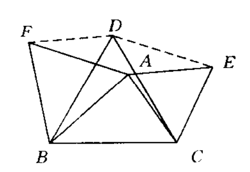


图 4 - 17

$\because BF=BA$，$BD=BC$，

$\angle FBD=60°-\angle DBA=\angle ABC$，

$\therefore \triangle BDF\cong\triangle BCA$. $\therefore FD=AC$.

又$\because AE=AC$，$\therefore FD=AE$.

同理，$AF=ED$.

$\therefore$四边形 $AEDF$ 是平行四边形.

题 32 如图 4 - 18，已知 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，垂足为 D. AE 平分$\angle CAB$ 交 CD 于 F. 过 F 作 $FH/\!/AB$，交 BC 于 H.

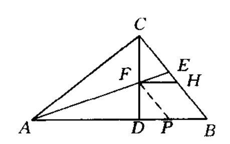


图 4 - 18

求证：$CE=BH$.

证明 过 F 作 $FP/\!/BC$，交 AB 于 P.

$\therefore$四边形 $BPFH$ 是平行四边形.

$\therefore PF=BH$.

又$\because \angle CEF=90°-\angle CAE$，$\angle CFE=\angle AFD=90°-\angle DAE$，$AE$ 平分$\angle CAD$，

$\therefore \angle CEF=\angle CFE$. $\therefore CF=CE$.

在$\triangle ACF$ 和$\triangle APF$ 中，

$\angle CAF=\angle PAF$，$AF=AF$，$\angle ACF=\angle B=\angle APF$，

$\therefore \triangle ACF\cong\triangle APF(AAS)$. $\therefore CF=FP$.

$\therefore CE=BH$.

题 33 如图 4 - 19，若$\square PQRS$ 的各顶点在另一个$\square ABCD$ 的各边上.

求证：这两个平行四边形的对角线过同一点.

证明 在$\triangle APS$ 与$\triangle CRQ$ 中，$PS=QR$. 连接 SQ.

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle ASQ=\angle CQS$.

又$\because PS/\!/QR$，$\therefore \angle PSQ=\angle RQS$.

$\therefore \angle ASP=\angle CQR$.

同理 $\angle APS=\angle CRQ$.

$\therefore \triangle APS\cong\triangle CRQ(ASA)$. $\therefore AS=CQ$.

$\therefore$四边形 $AQCS$ 是平行四边形，

SQ 过 AC 中点 M.

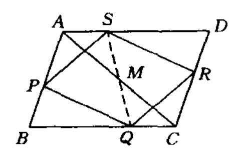
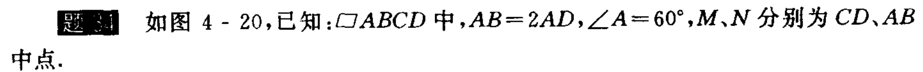


图 4 - 19

同理可证，RP 也一定过 M.

又 AC、BD 相交于 M，$\therefore AC$、BD、SQ、RP 过同一点.



题 34 如图 4 - 20，已知：$\square ABCD$ 中，$AB=2AD$，$\angle A=60°$，M、N 分别为 CD、AB 中点.

求证：$MN\perp BD$.

证明 连结 DN、BM.

$\because N$ 是 AB 中点，$AB=2AD$.

$\therefore AN=AD$.

又$\because \angle A=60°$，$\therefore \triangle ADN$ 为正三角形.

$\therefore AD=AN=DN$.

$\therefore AN=ND=NB$.

$\therefore DN=BN=BM=DM$，

$\therefore$四边形 $DNBM$ 为菱形，

$\therefore MN\perp BD$.

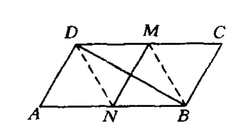


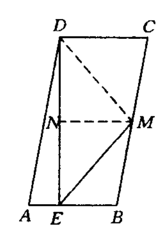
图 4 - 20

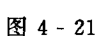
题 35 如图 4 - 21，在$\square ABCD$ 中，$DE\perp AB$ 于 E，$BM=MC=DC$.

求证：$\angle EMC=3\angle BEM$.

证明 连结 DM，过 M 作 $MN/\!/CD$ 交 DE 于 N.

$\because CM=BM=CD$，




图 4 - 21

$\therefore \angle CMD=\angle CDM$.

$\because MN /\!/ CD /\!/ AB$,

$\therefore \angle MDC=\angle CMD=\angle DMN$，$\angle EMN=\angle BEM$.

又 $DE\perp AB$，$\therefore DE\perp MN$.

又 $DN=NE$，$\therefore MN$ 为 DE 的垂直平分线.

$\therefore \angle DMN=\angle NME$.

$\therefore \angle DMC=\angle DMN=\angle NME=\angle MEB$.

$\therefore \angle EMC=3\angle BEM$.

题 36 如图 4 - 22，$\triangle ABC$ 的三条中线分别为 AD、BE、CF，H 为 BC 边外一点，且 $BHCF$ 是平行四边形.

求证：$AD /\!/ EH$.

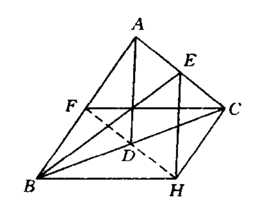


图 4 - 22

证明 $\because$ 四边形 $BHCF$ 是平行四边形，

$\therefore BC$、HF 互相平分.

$\because D$ 为 BC 中点.

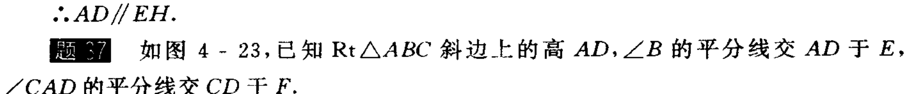
$\therefore D$ 也为 HF 中点.

又 $\because DH=DF=\dfrac{1}{2}AC=AE$，

且 $DH /\!/ AE$，

$\therefore$ 四边形 $ADHE$ 是平行四边形.

$\therefore AD /\!/ EH$.


题 37 如图 4 - 23，已知 Rt$\triangle ABC$ 斜边上的高 AD，$\angle B$ 的平分线交 AD 于 E，$\angle CAD$ 的平分线交 CD 于 F.

求证：$EF /\!/ AC$.

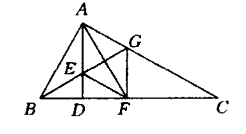


图 4 - 23

证明 $\because \angle AEG=\angle BED=90^\circ-\angle DBE$，

$\angle AGE=90^\circ-\angle ABG$，

BG 平分 $\angle ABC$，

$\therefore \angle AEG=\angle AGE$.

$\therefore AE=AG$，$\triangle AEG$ 为等腰三角形.

又 $\because AF$ 平分 $\angle DAC$，$\therefore AF\perp BG$.

又 $\because BG$ 平分 $\angle ABC$，

$\therefore BG$ 是 AF 的垂直平分线.

$\therefore EA=EF$，$AG=GF$. $\therefore AE=EF=FG=GA$.

$\therefore$ 四边形 $AEFG$ 是菱形.

$\therefore EF /\!/ AC$.

题 38 如图 4 - 24，矩形 $ABCD$ 中，E 是 AD 上一点，$BF\perp CE$，垂足为 F，且 $BF=$

CD.

求证：$\triangle BCE$ 是等腰三角形.

证明 在 $\triangle BFC$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$\because AD /\!/ BC$，$\therefore \angle ECB=\angle CED$.

$\because BF\perp CE$，$\therefore \angle BFC=\angle CDE=90°$.

又 $BF=CD$，$\therefore \triangle BFC\cong\triangle CDE$，

$\therefore BC=EC$，$\therefore \triangle BCE$ 是等腰三角形.

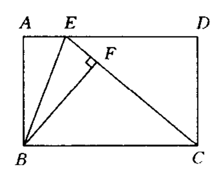
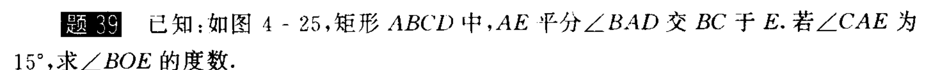
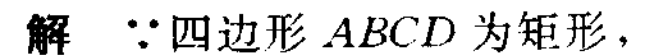


图 4 - 24



题39 已知：如图 4 - 25，矩形 $ABCD$ 中，AE 平分 $\angle BAD$ 交 BC 于 E. 若 $\angle CAE$ 为 $15°$，求 $\angle BOE$ 的度数.



解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle BAD=90°$，$OA=OB=OC=OD$.

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$，$\angle CAE=15°$，

$\therefore \angle OAD=45°-15°=30°$.

$\therefore \angle OAB=60°$，$\triangle AOB$ 为正三角形，

$OA=OB=AB$.

又易知 $AB=BE$，$\therefore OB=BE$.

又 $\angle OBE=\angle OAD=30°$，$\therefore \angle BOE=75°$.

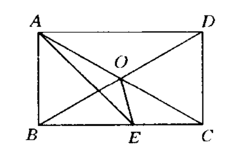
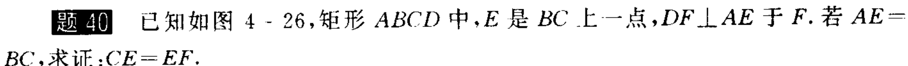
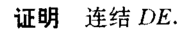


图 4 - 25



题40 已知如图 4 - 26，矩形 $ABCD$ 中，E 是 BC 上一点，$DF\perp AE$ 于 F. 若 $AE=BC$，求证：$CE=EF$.



证明 连结 DE.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle C=90°$，$BC=AD$.

$\because AE=BC$，$\therefore AE=AD$.

$\therefore \angle AED=\angle ADE$.

又 $\because AD /\!/ BC$，$\therefore \angle ADE=\angle DEC$.

$\therefore \angle DEC=\angle DEF$.

又 $\angle C=\angle DFE=90°$，$DE=DE$，

$\therefore \triangle EFD\cong\triangle ECD(AAS)$. $\therefore CE=EF$.

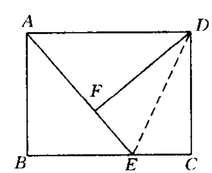


图 4 - 26

题41 已知如图 4 - 27，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$BD=DC$，$AB=AC$. P 为 BC 延长线上一点，$PE\perp BA$，交 BA 的延长线于 E，$PF\perp AC$，交 AC 的延长线于 F.

求证：$DE\perp DF$.

证明 连结 AD.

$\because \angle BAC=90°$，$AB=AC$，$BD=DC$，

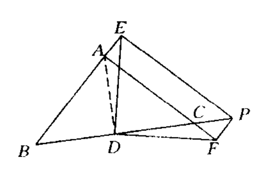


图 4 - 27

$\therefore AD=DC, \angle DAC=\angle DCA=45°$.

$\therefore \angle EAD=\angle DCF=135°$.

又四边形 $AFPE$ 是矩形，$\therefore AE=PF$.

$\therefore CF=FP=AE$. $\therefore \triangle DAE \cong \triangle DCF(SAS)$.

$\therefore \angle ADE=\angle CDF$. $\therefore ED \perp DF$.

题42 已知：如图 4 - 28，在等腰直角$\triangle ABC$ 中，D 是斜边 AB 的中点，Q 是 AD 上一点，P 是 DB 上一点，$QE \perp AC$ 于 E，$QF \perp CB$ 于 F，$PH \perp AC$ 于 H，$PG \perp CB$ 于 G.

求证：$\angle EDH=\angle FDG$.

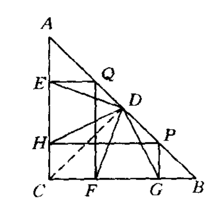


图 4 - 28

证法一 连结 CD.

$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$AD=DB$，

$\therefore AD=DC$，$\angle A=\angle DCF=45°$.

又$\because$四边形 $ECFQ$ 是矩形，

$\therefore AE=EQ=CF$.

$\therefore \triangle AED \cong \triangle CFD$，　$\therefore ED=DF$.

同理可证　$DH=DG$.

又$\because EH=AC-(AE+HC)$

$=BC-(CF+GB)=FG$，

$\therefore \triangle DEH \cong \triangle DFG$，$\therefore \angle EDH=\angle FDG$.

证法二 由证法一可知$\triangle AED \cong \triangle CFD$，

$\therefore \angle ADE=\angle CDF$

$\because \angle EDF=\angle FDC+\angle CDE=\angle ADE+\angle EDC=\angle ADC=90°$.

$\therefore \angle EDF=90°$，即不论 P、Q 在斜边 AC 上如何移动，$\angle EDF=90°$为定值.

同理可知$\angle HDG=90°$，

$\because \angle EDH=\angle EDF-\angle HDF$

$=90°-\angle HDF=\angle HDG-\angle HDF=\angle FDG$，

$\therefore \angle EDH=\angle FDG$.

题43 如图 4 - 29，若从矩形 $ABCD$ 的顶点 C 作对角线 BD 的垂线与$\angle BAD$ 的平分线相交于点 E.

求证：$AC=CE$.

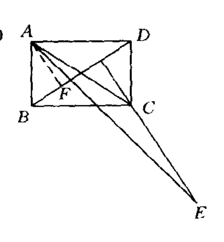


图 4 - 29

证明 从 A 向 BD 作垂线 AF，垂足为 F.

$\therefore AF /\!/ CE$，$\angle E=\angle FAE$.

$\because \angle BAF=90°-\angle ABF=\angle ADB=\angle DAC$，

且$\angle BAE=\angle DAE$，

$\therefore \angle FAE=\angle EAC$.

$\therefore \angle E=\angle EAC$.

$\therefore AC=CE$.

题44 如图 4-30,在$\triangle ABC$中,$AB=AC$,P为BC上一点,$PE\perp AB$于E,$PF\perp AC$于F.

求证:$PE+PF$为定值.

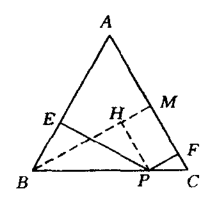


图 4-30

证明 作$BM\perp AC$于M,$PH\perp BM$于H.

$\because \triangle ABC$是固定的,$\therefore BM$是固定的.

$\because PH\perp BM, PF\perp AC, BM\perp AC$,

$\therefore$四边形$PHMF$是矩形.$\therefore PF=HM$.

又$PH/\!/AC$,$\therefore \angle C=\angle BPH$.

$\because AB=AC$,$\therefore \angle C=\angle ABC$.

$\therefore \angle EBP=\angle HPB$.

又$\angle BEP=\angle PHB=90°$,$PB=BP$,

$\therefore \triangle PBH\cong\triangle BPE(AAS)$.$\therefore BH=PE$.

$\therefore PE+PF=BH+HM=BM$.

$\therefore PE+PF$为定值.

题45 如图 3-31,E是正方形$ABCD$的AB边延长线上一点,$AE=AC$,过E作$EF\perp AC$于F,交BC于G.

求证:(1)$AF=AB$,(2)AG平分$\angle BAC$.

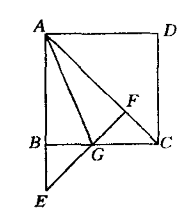


图 3-31

证明 (1)$\because AE=AC$,

$\angle AFE=\angle ABC=90°$, $\angle BAC=\angle FAE$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle AFE$, $\therefore AB=AF$.

(2)又 $AG=AG$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABG\cong\mathrm{Rt}\triangle AFG$,

$\therefore \angle BAG=\angle FAG$,

$\therefore AG$平分$\angle BAC$.

题46 如图 4-32,已知矩形$ABCD$,延长CB到E,使$CE=CA$,F是AE的中点.

求证:$BF\perp FD$.

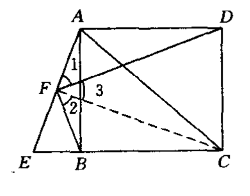


图 4-32

证明 连结CF.

$\because CA=CE$,F为AE中点,

$\therefore CF\perp AE$.$\therefore \angle 1+\angle 3=90°$.

由矩形$ABCD$有$\angle BAD=\angle ABC=\angle ABE=90°$,

$\therefore BF=AF$,$\angle FAB=\angle FBA$.

$\therefore \angle FAB+\angle BAD=\angle FBA+\angle ABC$.

即$\angle FAD=\angle FBC$.

在$\triangle FAD$和$\triangle FBC$中，

$\because FA=FB, \angle FAD=\angle FBC, AD=BC$，

$\therefore \triangle FAD \cong \triangle FBC(SAS)$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$. $\therefore \angle 2+\angle 3=90°$. $\therefore BF \perp FD$.

题 47 如图 4 - 33，矩形$ABCD$的内接$\square EFGH$的各边与矩形的两条对角线分别平行.

求证：$\square EFGH$的周长为定值.

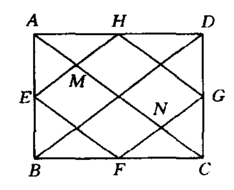


图 4 - 33

证明 $\because EH /\!/ BD, \therefore \angle ADB=\angle AHE$.

又四边形$ABCD$是矩形

$\therefore BD=AC, \angle CAD=\angle BDA$.

$\therefore \angle AHM=\angle MAH$. $\therefore MA=MH$.

$\therefore \angle MAE=\angle MEA=90°-\angle MAH$.

$\therefore MA=ME$.

又$EM /\!/ FN, EF /\!/ MN$，

$\therefore$四边形$EMNF$为平行四边形.

$\therefore EF=MN$.

$\therefore AC=MN+AM+CN=EF+EH$.

$\therefore \square EFGH$的周长$=AC+BD=2AC$，为定值.

题 48 如图 4 - 34，已知AK、CS、BJ、DL为$\square ABCD$的内角平分线，E、F、G、H为它们的交点.

求证：(1)四边形$EFGH$是矩形；(2)$EG=DC-AD$.

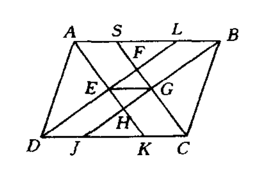


图 4 - 34

证明 (1)$\because AD /\!/ BC$，

$\therefore \angle DAB+\angle ABC=180°$，

$\because AH$、BH分别为$\angle DAB$、$\angle ABC$平分线，

$\therefore \angle HAB+\angle HBA=90°$，即$\angle AHB=90°$.

同理可证，$\angle LEK=\angle DFC=\angle JGS=90°$.

故四边形$EFGH$为矩形.

(2)$\because KA$平分$\angle DAB$，$AB /\!/ CD$，

$\therefore AD=DK$.

$\because DE \perp AK$，

$\therefore$点E为AK中点，同理G为CS中点.

$\therefore EG /\!/ KC$. $\therefore EKCG$是平行四边形，$EG=KC$，

故$EG=DC-DK=DC-AD$.

题 49 如图 4 - 35，菱形$ABCD$中，E是AD中点，$EF \perp AC$交CB延长线于F.

求证：AB与EF互相平分.

证明 ∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

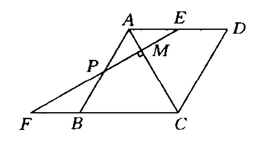


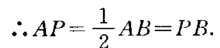
图 4 - 35

∴AC 平分$\angle BAD$.

又∵$EF\perp AC$，∴$EM=MP$.

即 AC 为 PE 的垂直平分线，$AP=AE$.

∵$AE=\frac{1}{2}AD$，$AD=AB$，



∴$AP=\frac{1}{2}AB=PB$.

∴$\triangle APE\cong\triangle BPF(ASA)$.

∴$PE=PF$. ∴EF 与 AB 互相平分.

题 50 已知，如图 4 - 36，矩形 $ABCD$ 和矩形 $BFDE$ 中，若 $AB=BF$.

求证：$MN\perp CF$.

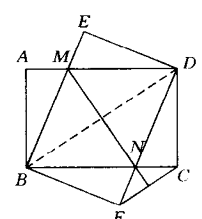


图 4 - 36

证明 ∵$AB=BF$，$BF=DE$，∴$AB=DE$.

又∵$\angle A=\angle E=90°$，$\angle AMB=\angle EMD$.

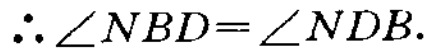
∵$\triangle AMB\cong\triangle EMD(AAS)$.

∴$BM=MD$.

又∵四边形 $BMDN$ 是平行四边形，

∴四边形 $BMDN$ 是菱形.

连结 BD，则 $BD\perp MN$，$NB=ND$.



∴$\angle NBD=\angle NDB$.

同理可证 $\triangle BNF\cong\triangle DNC(AAS)$.

∴$NF=NC$.

∴$\angle NFC=\angle NCF$.

∴$\angle NFC=\angle NDB$. ∴$BD/\!/FC$.

∴$MN\perp FC$.

题 51 已知：如图 4 - 37，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 交于点 O，E 是正方形 $ABCD$ 内一点，且 $BE=CE$，连结 OE 并延长交 BC 于点 F.

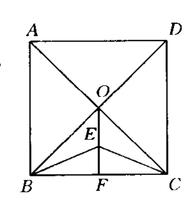


图 4 - 37



求证：(1)$\triangle BOE\cong\triangle COE$；

(2)$BF=CF$.

证明 (1)∵$ABCD$ 是正方形，

∴$AC=BD$，$BO=OC$.

又 $BE=CE$，$OE=OE$，∴$\triangle BOE\cong\triangle COE$.

(2)∵$\triangle BOE\cong\triangle COE$，

∴$\angle OEB=\angle OEC$，∴$\angle BEF=\angle CEF$.

又 $BE=CE$，$EF=EF$，

$\therefore \triangle BEF \cong \triangle CEF$，$\therefore BF=CF$.

题 52 如图 4 - 38，已知 E 是正方形 $ABCD$ 的一边 AB 上的任意一点，并且 $EG \perp BD$ 于 G，$EF \perp AC$ 于 F，$AC=10$，求：$EF+EG$.

解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

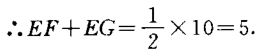
$\therefore OA=OB$，$OA \perp OB$，$\angle OBA=\angle OAB=45°$.

$\because EF \perp OA$，$EG \perp OB$，

$\therefore$ 四边形 $EFOG$ 为矩形，$EG=GB$.

$\therefore EF=OG$.

$\therefore EF+EG=BG+OG=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$.



$\therefore EF+EG=\frac{1}{2}\times 10=5$.

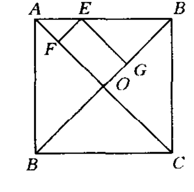


图 4 - 38

题 53 如图 4 - 39，正方形 $ABCD$ 中，F 为 CD 延长线上一点，$CE \perp AF$ 于 E，交 AD 于 M. 求 $\angle MFD$ 的大小.

图 4 - 39

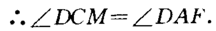
解 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ADC=90°$，$AD=CD$.

$\because CE \perp AF$，

$\therefore \angle AEM=90°$.

$\because \angle AME=\angle CMD$，$\angle ADC=90°$，



$\therefore \angle DCM=\angle DAF$.

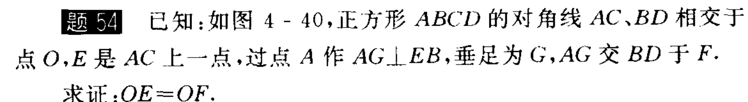
在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CDM$ 中，

$\angle CDM=\angle ADF=90°$，

$\angle MCD=\angle FAD$，$AD=CD$，

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDM(ASA)$. $\therefore DM=DF$.

$\therefore \angle MFD=45°$.



题 54 已知：如图 4 - 40，正方形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，E 是 AC 上一点，过点 A 作 $AG \perp EB$，垂足为 G，AG 交 BD 于 F.

求证：$OE=OF$.

对上述命题，若点 E 在 AC 的延长线上，如图 4 - 41 所示，$AG \perp EB$ 交 EB 的延长线于 G，AG 的延长线交 DB 的延长线于 F，其它条件不变，则结论"$OE=OF$"还成立吗？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由.

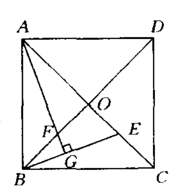


图 4 - 40

证明 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BOE=\angle AOF=90°$，$BO=AO$.

又 $\because AG \perp EB$，$\therefore \angle AEG+\angle GAE=90°$，

$\angle AFO+\angle OAF=90°$，

$\therefore \angle AEG=\angle AFO$，$\therefore \text{Rt}\triangle BOE\cong\text{Rt}\triangle AOF$，

$\therefore OE=OF$.

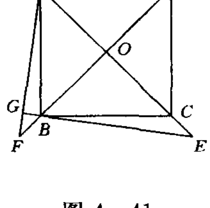


图 4 - 41

若 E 在 AC 的延长线上，$OE=OF$ 仍成立.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle BOE=\angle AOF=90°$，$BO=AO$.

又 $\because AG\perp EB$，$\therefore \angle OEB+\angle EAF=90°$，

又 $\angle OFA+\angle FAE=90°$，

$\therefore \angle OEB=\angle OFA$，

$\therefore \text{Rt}\triangle BOE\cong\text{Rt}\triangle AOF$，$\therefore OE=OF$.

题 55 如图 4 - 42，过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作 $AE\parallel BD$，并且 $BE=BD$.

求证：$DE=DF$.

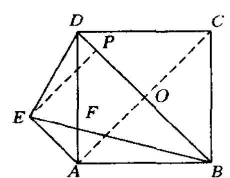


图 4 - 42

证明 连 AC 交 BD 于 O，作 $EP\perp BD$ 于 P.

$\because ABCD$ 是正方形，

$\therefore AC\perp BD$，$OA=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD$.

又易证 四边形 $AOPE$ 为矩形，

$\therefore EP=OA$.

在 $\text{Rt}\triangle BEP$ 中，

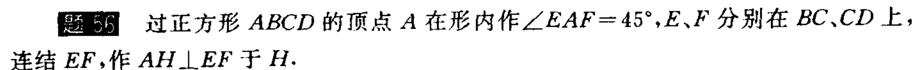
$\because EP=OA=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}BE$，

$\therefore \angle EBP=30°$.

$\therefore \angle BED=\angle BDE=75°$.

$\therefore \angle EDF=75°-45°=30°$. $\therefore \angle EFD=75°$.

$\therefore \angle DEF=\angle DFE=75°$. $\therefore DE=DF$.



题 56 过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 在形内作 $\angle EAF=45°$，E、F 分别在 BC、CD 上，连结 EF，作 $AH\perp EF$ 于 H.

求证：$AH=AB$.

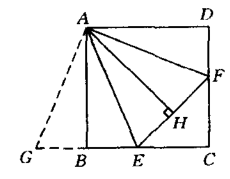


图 4 - 43

证明 如图 4 - 43，延长 CB 至 G，使 $BG=DF$，连 AG.

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，

$\because AB=AD$，$BG=DF$，

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle ADF$，

因此 $AG=AF$，$\angle GAB=\angle FAD$.

在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle AEF$ 中，因为

$AG=AF$，$AE=AE$，$\angle GAE=\angle GAB+\angle BAE=\angle FAD+\angle BAE=90°-\angle EAF=45°=\angle EAF$，

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle AEF$，$\therefore AB=AH$.

题57 如图 4-44，正方形 $ABCD$ 的对角线交于 O 点，Q 是 DC 上任一点，过 D 作 $DP\perp AQ$，交 AQ 于 H，交 BC 于 P.

求证：$\triangle OPQ$ 是等腰直角三角形.

证明 $\because AQ\perp DP$，

$\therefore \angle PDC=90^\circ-\angle AQD=\angle DAQ$.

又 $AD=DC$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle PCD\cong \mathrm{Rt}\triangle QDA$. $\therefore DQ=CP$.

又$\because OC=OD$，$\angle ODQ=\angle OCP=45^\circ$，

$\therefore \triangle DOQ\cong\triangle COP(SAS)$.

$\therefore OQ=OP$，$\angle DOQ=\angle COP$.

$\therefore \angle POQ=\angle COP+\angle COQ$

$=\angle DOQ+\angle COQ=90^\circ$.

$\therefore \triangle POQ$ 是等腰直角三角形.

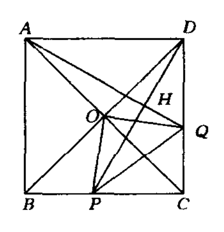


图 4-44

题58 在正方形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 CD、DA 的中点，BE 与 CF 交于 P 点，求证：$AP=AB$.

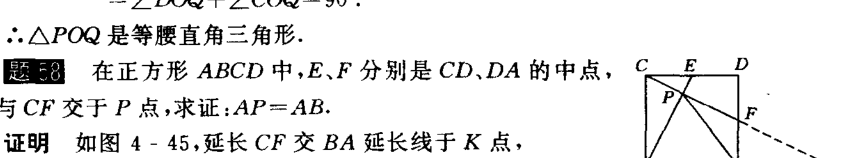


图 4-45

证明 如图 4-45，延长 CF 交 BA 延长线于 K 点，

$\because F$ 是正方形 $ABCD$ 的 AD 边中点，

$\therefore \triangle CDF\cong\triangle KAF$.

$\therefore AK=CD=AB$，即 A 点是 BK 的中点.

又$\because E$ 是 CD 的中点，

$\therefore \triangle CBE\cong\triangle DCF$，

$\therefore \angle CBE=\angle ECP$.

$\because \angle BCE=90^\circ$， $\therefore CP\perp BE$.

在$\triangle PBK$ 中，

$\because BA=AK$，$\angle BPK=90^\circ$，

$\therefore PA=\frac{1}{2}BK=BA$. 即 $AP=AB$.

题59 已知，如图 4-46，在正方形 $ABCD$ 中，M 为 AB 的中点，$MN\perp MD$，BN 平分$\angle CBE$ 并交 MN 于 N.

求证：$MD=MN$.

证明 取 AD 中点 P，连结 MP.

在$\triangle MBN$ 和$\triangle DPM$ 中，

$\because \angle 1=90^\circ-\angle AMD=\angle 2$，

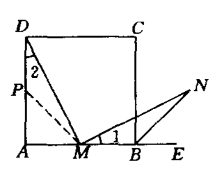


图 4-46

$MB=DP=\frac{1}{2}AB$，

$\angle MBN=\angle DPM=135°$，

$\therefore \triangle MBN \cong \triangle DPM(ASA)$.

$\therefore MD=MN$.

题 60 如图 4 - 47，E 是正方形 $ABCD$ 内一点，且$\angle ECD=\angle EDC=15°$.

求证：$EA=AB=EB$.

证明 以 CD 为边向正方形外作正$\triangle CDF$，连 EF.

$\therefore EF$ 为线段 CD 的垂直平分线.

$\therefore \angle CFE=\angle DFE=30°$.

$\because \angle FDE=\angle FDC+\angle CDE$

$=60°+15°=75°$，

$\angle EDA=90°-15°=75°$，

$\therefore \angle FDE=\angle ADE$.

又$\because DF=DC=DA, DE=DE$，

$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DEA(SAS)$.

$\therefore \angle DFE=\angle DAE=30°$.

$\therefore \angle DEA=180°-30°-75°=75°$，

$\therefore \angle DEA=\angle ADE$. $\therefore AD=AE$.

同理可证，$BE=CB$. $\therefore AB=AE=EB$.

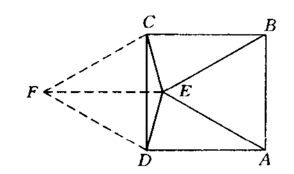
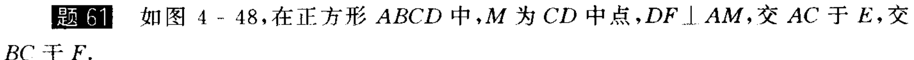


图 4 - 47


题 61 如图 4 - 48，在正方形 $ABCD$ 中，M 为 CD 中点，$DF\perp AM$，交 AC 于 E，交 BC 于 F.

求证：$\angle CME=\angle DMA$.

证明 连 BD 交 AM 于 P.

$\therefore \angle PDM=\angle ECM=45°$.

在$\triangle APD$ 和$\triangle DEC$ 中，

$\angle DAP=\angle CDE, \angle ADP=\angle DCE=45°$，

$AD=DC$，

$\therefore \triangle APD \cong \triangle DEC(SAS)$.

$\therefore DP=EC$.

在$\triangle CME$ 和$\triangle DMP$ 中，

$CE=DP, \angle PDM=\angle ECM, CM=DM$.

$\therefore \triangle CME \cong \triangle DMP(SAS)$.

$\therefore \angle CME=\angle DMP$.

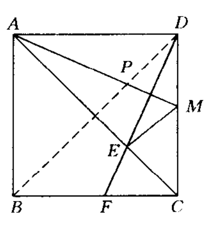


图 4 - 48

题 62 折叠矩形纸片 $ABCD$，先折出折痕(对角线)BD，再折叠使 AD 边与对角线

BD 重合,得折痕 DG,如图 4-49,若 $AB=2$,$BC=1$,求 AG.

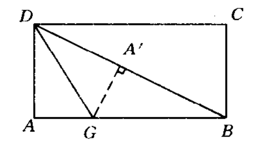


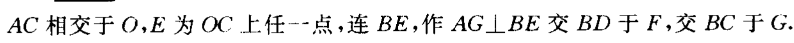
图 4-49

解 过 G 作 $GA'\perp DB$,垂足为 A',则 $\triangle DAG\cong\triangle DA'G$.

设 $AG=x$,则 $GA'=x$,$DB=\sqrt{5}$,$A'B=\sqrt{5}-1$,$GB=2-x$.

在 $Rt\triangle BGA'$ 中 $x^2+(\sqrt{5}-1)^2=(2-x)^2$,

解得 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore AG=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.



题63 已知:如图 4-50,正方形 $ABCD$ 的对角线 BD、AC 相交于 O,E 为 OC 上任一点,连 BE,作 $AG\perp BE$ 交 BD 于 F,交 BC 于 G.

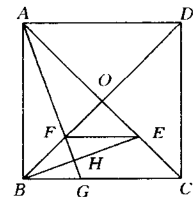


图 4-50

求证:$EF/\!/BC$.

证明 ∵四边形 $ABCD$ 为正方形,

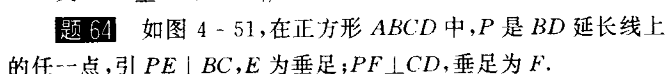
$\therefore BD\perp AC$. $\therefore BO$ 为 $\triangle ABE$ 边上的高.

又∵ $AG\perp BE$. $\therefore AH$ 为 $\triangle ABE$ 边上的高.

∵ $\triangle ABE$ 三条高相交于一点,

$\therefore EF\perp AB$.

又∵ $BC\perp AB$,$\therefore EF/\!/BC$.



题64 如图 4-51,在正方形 $ABCD$ 中,P 是 BD 延长线上的任一点,引 $PE\perp BC$,E 为垂足;$PF\perp CD$,垂足为 F.

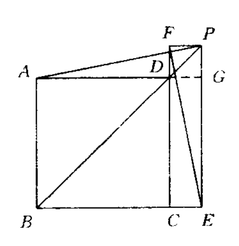


图 4-51

求证:$AP=EF$,$AP\perp EF$.

证明 延长 AD 交 PE 于点 G.

$\therefore \angle BDC=\angle PDG=45°$,

∴四边形 $DGPF$ 为正方形,$PF=GP$.

$\therefore AG=EP$.

$\therefore Rt\triangle PAG\cong Rt\triangle FEP$,

$\therefore AP=EF$. $\therefore \angle APG=\angle EFP$.

∵ $\angle APG+\angle APF=90°$,

$\therefore \angle EFP+\angle APF=90°$.

$\therefore AP\perp EF$.

题65 如图 4-52,正方形 $ABCD$ 中,点 E、F 在 AD 的延长线上,且 $DE=DA$,$DF=DB$,H、G 分别为 BF 和 DC、CE 的交点.

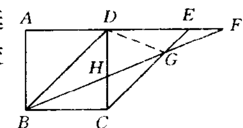


图 4-52



求证:$HG=GF$.

证明 ∵ $DF=DB$,且 $DF/\!/BC$,

$\therefore \angle F=\angle DBH=\angle HBC=22.5°$,

$\angle DHG=67.5°$.

又 $DC=DE$，$\therefore \angle DCE=45°$.

$\therefore CE$ 为$\triangle BCD$的外角平分线.

连结 DG，则 DG 一定为$\triangle BCD$另一外角平分线.

$\therefore \angle HDG=67.5°$.

$\therefore \angle DHG=\angle HDG$. $\therefore DG=HG$.

因此 $DG=GF$. $\therefore HG=GF$.

题66 如图 4-53，在正方形 $ABCD$ 的边 CD 上取一点 P，使 $AP=PC+BC$，Q 为 CD 中点.

求证：$\angle BAP=2\angle QAD$.

证明 延长 AB 至点 F，使 $BF=CP$，连 FP.

则 BC 与 FP 必互相平分，设其交点为 E，

连 AE，则$\triangle BAE\cong\triangle QAD$，$\angle BAE=\angle QAD$.

$\because AP=PC+BC=BF+AB=AF$，

$\therefore \angle PAE=\angle BAE$.

$\therefore \angle BAP=\angle BAE+\angle PAE=2\angle QAD$.

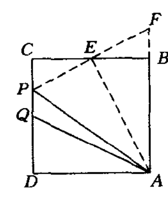


图 4-53

题67 如图 4-54，设有任意直线平行正方形 $ABCD$ 的对角线 AC，与边 AB、BC 的交点为 E、F，在 DA 的延长线上取点 G，使 $AG=AD$，若 EG 与 DF 的交点为 H，

求证：AH 等于正方形 $ABCD$ 的边长.

证明 $\because CA/\!/EF$，

$\therefore BE=BF$. $\therefore AE=FC$.

又$\because AG=AD=DC$，$\angle GAE=\angle DCF$，

$\therefore \triangle AGE\cong\triangle CDF(SAS)$. $\angle G=\angle FDC$.

$\therefore \angle G+\angle GDH=\angle FDC+\angle GDH=90°$.

$\therefore \angle GHD=90°$，$GH\perp DF$.

又 A 是 $\mathrm{Rt}\triangle GHD$ 的斜边中点，

$\therefore AH=AD$.

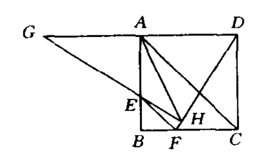


图 4-54

题68 如图 4-55，正方形 $ABCD$ 中，CE 垂直于$\angle CAD$的平分线于 E，AE 交 DC 于 F.

求证：$CE=\frac{1}{2}AF$.

证明 延长 CE、AD 相交于 P.

$\because AE$ 平分$\angle CAP$，$CE\perp AE$，

$\therefore CE=EP$. $\therefore CP=2CE$.

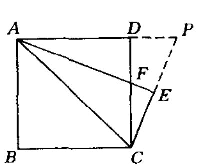


图 4-55

$\because \angle DAF=\angle PCD, AD=DC,$

$\angle ADF=\angle PDC,$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDP(ASA).$

$\therefore AF=PC.$

$\therefore CE=\frac{1}{2}CP=\frac{1}{2}AF.$

题69 已知:如图 4-56,正方形 $ABCD$ 的边长为 1,M、N 分别在 AB、AD 边上,若$\triangle CMN$ 为正三角形,求此正三角形的边长.

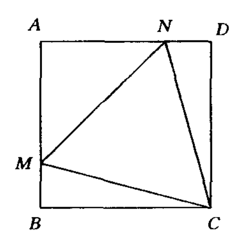


图 4-56

解 设此正三角形的边长为 x,

在 $\text{Rt}\triangle BCM$ 中,$CM^2=BM^2+BC^2$,

$\therefore x^2=BM^2+1^2, BM=\sqrt{x^2-1}, AM=1-\sqrt{x^2-1}.$

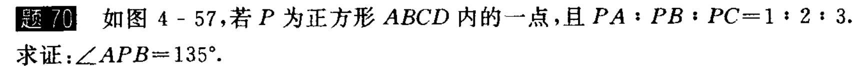
同理 $AN=1-\sqrt{x^2-1}$.

又$\triangle AMN$ 是等腰直角三角形,

$\therefore MN=\sqrt{2}AM,$

即 $x=\sqrt{2}(1-\sqrt{x^2-1})$,

解得 $x=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,即这个正三角形的边长为 $\sqrt{6}-\sqrt{2}$.



题70 如图 4-57,若 P 为正方形 $ABCD$ 内的一点,且 $PA:PB:PC=1:2:3$.

求证:$\angle APB=135°$.

证明 在正方形 $ABCD$ 外,以 BC 为一边作$\triangle BP'C$,满足$\triangle BP'C \cong \triangle BPA$.连结 PP',设 $AP=k$,$\therefore PB=2k, PC=3k$.

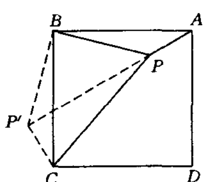


图 4-57

$\because BP'=BP=2k,$

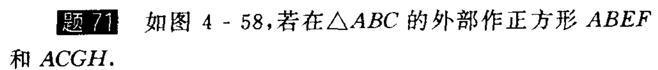
$\therefore \angle BP'P=45°, PP'=2\sqrt{2}k.$

又$\because P'C=PA=k,$

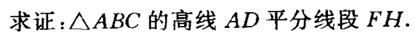
$\therefore P'C^2+P'P^2=9k^2=PC^2.$

$\therefore \angle PP'C=90°.$

$\therefore \angle BP'C=135°$,即$\angle APB=135°$.



题71 如图 4-58,若在$\triangle ABC$ 的外部作正方形 $ABEF$ 和 $ACGH$.



求证:$\triangle ABC$ 的高线 AD 平分线段 FH.

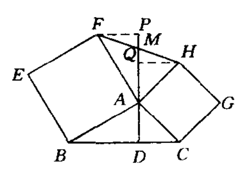


图 4-58

证明 作 $HQ\perp DP$ 于 Q,$FP\perp DP$ 于 P.

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 和 $\text{Rt}\triangle HAQ$ 中,

$\angle CAD=90°-\angle HAQ=\angle AHQ,$

$AC=AH,$

$\therefore Rt\triangle ACD \cong Rt\triangle HAQ(AAS)$.

$\therefore HQ=AD$.

同理可证　$Rt\triangle ABD \cong Rt\triangle FAP(AAS)$,

$\therefore FP=AD$. ,$\therefore FP=HQ$.

又 $FP /\!/ HQ$,$\therefore F$、P、H、Q 为平行四边形顶点.

$\therefore FM=MH$.

题 72　如图 4 - 59,四边形 $ABCD$、$CDEF$、$EFGH$ 是三个并列的正方形.

求证:$\angle ACB+\angle AFB+\angle AGB=90°$.

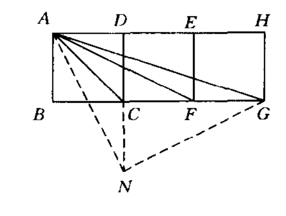


图 4 - 59

证明　延长 DC 至 N,使 $CN=CD$,连结 AN、GN.

则有$\triangle AFB \cong \triangle NGC \cong \triangle AND$.

$\therefore \angle AFB=\angle NGC=\angle AND, NG=AN$.

又$\because \angle ANG=\angle AND+\angle GNC$

$\qquad\qquad =\angle NGC+\angle GNC=90°$,

$\therefore \angle AGN=45°$.

$\therefore \angle ACB+\angle AFB+\angle AGB=90°$.

题 73　如图 4 - 60,A、B 为平面上两定点,C 为平面上位于直线 AB 指定一侧的动点,分别以 AC、BC 为边,在$\triangle ABC$ 的外侧作正方形 $CADF$、$CBEG$. 证明:不论点 C 在直线 AB 同侧的位置如何,DE 必通过某一定点 N,且被点 N 所平分.

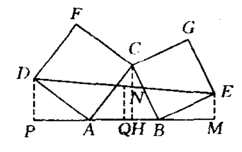


图 4 - 60

证明　取 DE 中点 N,作 $NQ\perp AB$,$DP\perp AB$,$EM\perp AB$,垂足分别为 Q、P、M.

$\therefore DP /\!/ NQ /\!/ EM$.

$\therefore NQ$ 为梯形 $DPME$ 的中位线.

$\therefore NQ=\frac{1}{2}(DP+ME)$.

过 C 作 $CH\perp AB$ 于 H,

则$\triangle APD \cong \triangle CHA$,$\triangle BME \cong \triangle CHB$,

$\therefore DP=AH, EM=BH, DP+EM=AB$,

$\therefore NQ=\frac{1}{2}AB$.

由上可得 $PA=CH=BM$,$\therefore Q$ 为 AB 中点.

$\therefore$点 N 在 AB 的垂直平分线上,并且到 AB 的距离为$\frac{1}{2}AB$. 因此 N 是定点,即 DE 必过一个定点,且被这点所平分.

三、梯　　形

题 74 梯形的定义：一组对边平行而另一组对边不平行的四边形.根据定义，要证一个四边形是梯形，需说明两点：一是一组对边平行，二是另一组对边不平行.

题 75 等腰梯形是指两腰相等的梯形.等腰梯形在同一底上的两个角相等，等腰梯形的两条对角线相等.

题 76 平行线等分线段定理：如果一组平行线在一条直线上截得的线段相等，那么在其他直线上截得的线段也相等，由此可得以下两个重要推论：

(1)过梯形一个腰的中点与底平行的直线，必平分另一腰.

(2)过三角形一边的中点与另一边平行的直线必平分第三边.

题 77 三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半. 用它可解决平行问题和倍半相等问题.

梯形的中位线平行于两底，并且等于两底和的一半.用它也可解决线段的和差倍半及相等问题.

题 78 如图 4 - 61，梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ CD$. $AB=8$，$CD=16$，$\angle C=30°$，$\angle D=60°$，则腰 BC 的长为(　　).

A. $3\sqrt{3}$　　B. $4\sqrt{3}$

C. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$　　D. $5\sqrt{3}$

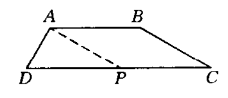


图 4 - 61

解 过 A 作 $AP /\!/ BC$，交 CD 于 P.

$\because AB /\!/ CD$，$AP /\!/ BC$，

$\therefore$ 四边形 $APCB$ 是平行四边形.

$\therefore \angle APD=\angle C=30°$，$AP=BC$，$AB=PC$.

$\therefore \angle D+\angle APD=90°$，

$PD=CD-CP=16-8=8$.

$\therefore \triangle DAP$ 为直角三角形.

$\therefore AD=\frac{1}{2}DP=4$.

$\therefore PA=\sqrt{PD^2-AD^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

即 $BC=4\sqrt{3}$. 故应选 B.

题 79 如图 4 - 62，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$. $\angle ABC=60°$，且 $AC \perp BD$，$AB=$

20. 则 $ABCD$ 的周长为(　　).

A. 100　　B. $50\sqrt{3}$　　C. $40+20\sqrt{3}$　　D. $60\sqrt{3}$

解　设 AC、BD 相交于 P. 过 P 作 $GH\perp AD$,交 AD、BC 于 G、H,作 $AE\perp BC$,$DF\perp BC$,垂足为 E、F.



$\therefore \angle BAE=30°$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}AB=10$.

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=10\sqrt{3}$.

$\because$ 梯形 $ABCD$ 为等腰梯形,

$\therefore BD=AC$. 又 $BD\perp AC$,

$\therefore \angle PAD=\angle PDA=45°$.

$\therefore PG=AG=GD$.

同理可证　$PH=BH=HC$.

$\therefore AD+BC=2GH=2AE=20\sqrt{3}$.

$\therefore ABCD$ 的周长 $=2AB+AD+BC=40+20\sqrt{3}$.

故应选 C.

图 4 - 62

题 80　直角梯形的一腰与下底长都为 40,且它们的夹角为 60°,则梯形的中位线长为(　　).

A. 30　　B. 60　　C. 40　　D. 80

解　如图 4 - 63,作 $DP\perp BC$ 于 P.

$\because \angle C=60°$,$\therefore \angle PDC=30°$.

$\therefore PC=\frac{1}{2}CD=20$.

又 $\because BC=CD=40$,

$\therefore PB=BC-CP=20$.

$\therefore AD=BP=20$.

$\therefore \frac{1}{2}(AD+BC)=30$.

故应选 A.

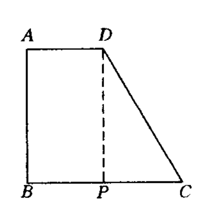


图 4 - 63

题 81　如果等腰梯形底角为 45°,高等于上底,那么梯形中位线与高的比为(　　).

A. 1∶2　　B. 2∶1　　C. 1∶3　　D. 2∶3

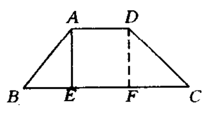
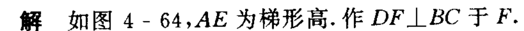


图 4 - 64



解　如图 4 - 64,AE 为梯形高. 作 $DF\perp BC$ 于 F.

$\therefore EF=AD=AE=DF=BE=CF$.

设 $AD=a$,则 $AD+BC=a+3a=4a$.

∴中位线长$=\frac{1}{2}(AD+BC)=2a$.

∴中位线与高之比为 $2a:a=2:1$.

故应选 B.

题 82 如图 4-65,梯形 $ABCD$ 中,$BC /\!/ AD$,$\angle A+\angle D=90°$,M、N 分别为 BC、AD 中点,那么 $MN=$(　　).

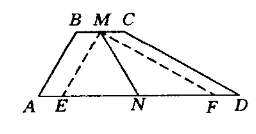


图 4-65

A. $\frac{1}{4}(AD+BC)$　　B. $\frac{1}{3}(AD+BC)$

C. $\frac{1}{2}(AD+BC)$　　D. $\frac{1}{2}(AD-BC)$

解 过 M 作 $ME /\!/ AB$,$MF /\!/ CD$,交 AD 于 E、F.

$\therefore \angle MEF=\angle A$,$\angle MFE=\angle D$.

又$\because \angle A+\angle D=90°$,$\therefore \triangle EMF$ 为直角三角形.

又 $AE=BM=MC=FD$,$AN=ND$,

$\therefore EN=AN-AE=ND-FD=NF$.

$\therefore N$ 为 EF 中点. $\therefore EN=NF=MN=\frac{1}{2}EF$.

又 $EF=AD-BC$,$\therefore MN=\frac{1}{2}(AD-BC)$. 故应选 D.

题 83 顺次连结等腰梯形四边中点所组成的四边形是(　　).

A. 矩形　　B. 梯形　　C. 菱形　　D. 正方形

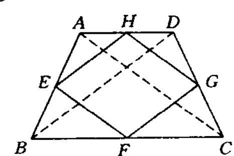
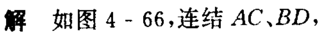
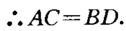


图 4-66



解 如图 4-66,连结 AC、BD,



$\therefore AC=BD$.

又 EF、HG、EH、FG 是三角形中位线,

$\therefore EF /\!/ AC$,$HG /\!/ AC$,$EH /\!/ BD$,$FG /\!/ BD$.

$\therefore EF /\!/ GH$,$FG /\!/ EH$.

∴四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

又 $EH=\frac{1}{2}BD$,$EF=\frac{1}{2}AC$,

$\therefore EF=EH$. $\therefore \square EFGH$ 是菱形.

故应选 C.

题 84 如图 4-67,已知梯形 $ABCD$ 中,$AD /\!/ BC$,$AB=AD+BC$,E 为 CD 中点.

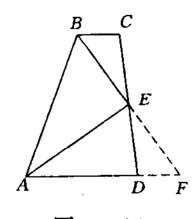


图 4-67

求证:AE、BE 分别平分$\angle DAB$、$\angle ABC$.

证明 延长 BE 交 AD 延长线于 F.

$\because AD /\!/ BC$,

$\therefore \angle C=\angle EDF$.

又 $CE=DE$，$\angle BEC=\angle DEF$，

$\therefore \triangle BEC\cong\triangle FED(ASA)$，$BC=FD$.

$\therefore AB=AD+BC=AD+DF=AF$.

$\therefore \angle ABF=\angle F$.

又$\because \angle EBC=\angle F$，

$\therefore \angle ABF=\angle EBC$，$BE$ 平分$\angle ABC$.

而$\triangle ABF$ 是等腰三角形，且 E 为 BF 中点，

$\therefore AE$ 平分$\angle BAD$.

题 85 已知：如图 4－68，四边形 $ABCD$ 为矩形，四边形 $ABDE$ 为等腰梯形，$AE/\!/BD$.

求证：$\triangle BED\cong\triangle BCD$.

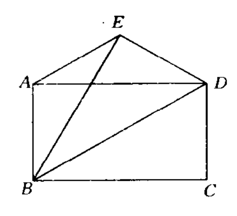


图 4－68

证明 $\because$四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore DC=AB$，$BC=AD$.

$\because$四边形 $ABDE$ 为等腰梯形，且 AD、BE 为对角线，

$\therefore DE=AB$，$BE=AD$.

在$\triangle BED$ 和$\triangle BCD$ 中，

$DE=DC$，$BE=BC$，又 $BD=BD$，

$\therefore \triangle BED\cong\triangle BCD$.

题 86 如图 4－69，等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AB>CD$，$AD=BC$，对角线 AC、BD 相交于 O，$\angle AOB=60°$，且 E、F、M 分别为 OD、OA、BC 的中点.

求证：$\triangle EFM$ 是等边三角形.

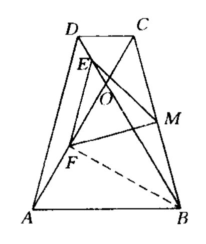


图 4－69

证明 $\because$四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD=BC$，

$\therefore \angle DAB=\angle CBA$. 又 $AB=AB$，

$\therefore \triangle DAB\cong\triangle CBA(SAS)$.

$\therefore \angle DBA=\angle CAB$.

$\because \angle AOB=60°$，

$\therefore \angle DBA=\angle CAB=\angle AOB=60°$.

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形.

连结 FB. $\because F$ 为 AO 的中点，

$\therefore BF\perp AO$，$\triangle BFC$ 为直角三角形.

$\because M$ 为斜边 BC 上的中点，$\therefore FM=\frac{1}{2}BC$.

同理可证，$EM=\frac{1}{2}BC$. 又 $EF=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore EF=EM=FM$. $\therefore \triangle EFM$ 是等边三角形.

题87 如图 4-70，梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AD<BC$，$AB=CD$. P 为 BC 上一点，$PM\perp AB$，$PN\perp CD$，$BE\perp CD$，垂足分别为 M、N、E.

求证：$BE=PM+PN$.

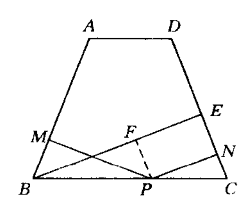


图 4-70

证明 作 $PF\perp BE$ 于 F.

易证 $PFEN$ 为矩形. $\therefore PN=EF$.

在$\triangle PBM$和$\triangle BPF$中，

$\angle PMB=\angle BFP=90°$,

$\angle MBP=\angle C=\angle FPB$,

$PB=PB$,

$\therefore \triangle PBM\cong\triangle BPF(AAS)$.

$\therefore PM=BF$.

$\therefore BE=PM+PN$.

题88 如图 4-71，直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$BC-AD=30$，$CD=50$，$AC=60$. 求梯形上、下底 AD、BC 的长.

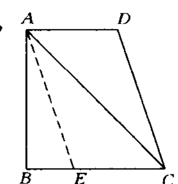
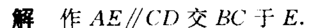


图 4-71


解 作 $AE/\!/CD$ 交 BC 于 E.

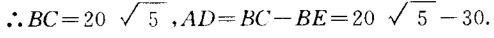
$\therefore$四边形 $AECD$ 是平行四边形.

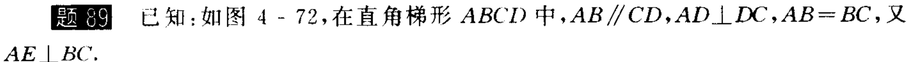
$\therefore AE=CD=50$,

$BE=BC-EC=BC-AD=30$.

$\therefore AB^2=AE^2-BE^2=2500-900=1600$,

$BC^2=AC^2-AB^2=3600-1600=2000$.


$\therefore BC=20\sqrt{5}$，$AD=BC-BE=20\sqrt{5}-30$.


题89 已知：如图 4-72，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$AD\perp DC$，$AB=BC$，又 $AE\perp BC$.

求证：$CD=CE$.

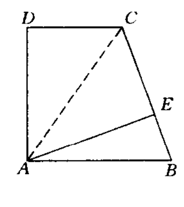


图 4-72

证明 连结 AC.

$\because AB/\!/CD$，$\therefore \angle DCA=\angle CAB$.

$\because AB=BC$,

$\therefore \angle CAB=\angle BCA$.

$\therefore \angle DCA=\angle ECA$.

又$\angle D=\angle AEC=90°$，$AC=AC$,

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle AEC(AAS)$.

$\therefore CD=CE$.

题90 已知：如图 4-73，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AB=DC$，$\angle C=60°$，BD 平分$\angle ABC$.

(1)求证：$AD=\frac{1}{2}BC$；

(2)若梯形 $ABCD$ 的周长为 30cm，求梯形的面积.

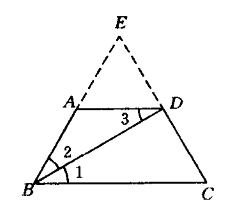


图 4 - 73

解 (1)延长 BA、CD 相交于 E，

由 $\angle ABC=\angle C=60°$，得 $\triangle EBC$ 是等边三角形.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$\therefore D$ 是 CE 的中点.

又 $\because AD\parallel BC$，$\therefore AD$ 是 $\triangle EBC$ 的中位线，

$\therefore AD=\frac{1}{2}BC$.

(2)$\because BD$ 平分 $\angle ABC$，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=60°$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=\angle 3$.

$\therefore AB=AD$，则 $AB=AD=DC$.

又 $AD=\frac{1}{2}BC$，梯形 $ABCD$ 的周长为 30cm，

$\therefore AD=6$，$BC=12$.

$\therefore S_{梯形ABCD}=S_{\triangle EBC}-S_{\triangle EAD}=\frac{\sqrt{3}}{4}(BC^2-AD^2)$，

$\therefore S_{梯形ABCD}=27\sqrt{3}\,(\text{cm}^2)$.

题 91 如图 4 - 74，四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle C$，AB 与 CD 不平行，且 $AB=CD$.

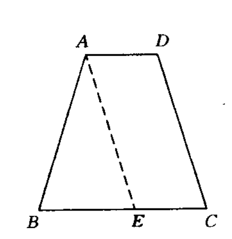


图 4 - 74

求证：四边形 $ABCD$ 是等腰梯形.

证明 作 $AE\parallel CD$ 交 BC 于 E.

$\therefore \angle C=\angle AEB$.

又 $\because \angle B=\angle C$，

$\therefore \angle ABC=\angle AEB$.

$\therefore AB=AE$.

又 $\because AB=CD$，$\therefore AE \underline{\underline{\parallel}} CD$.

因此，四边形 $ADCE$ 为平行四边形. $\therefore AD\parallel BC$.

且 $BC=BE+CE=BE+AD>AD$.

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形.

题 92 如图 4 - 75，四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，$AD\parallel BC$，$AC\perp BD$，$AD+BC=10$，求梯形的高 DE.

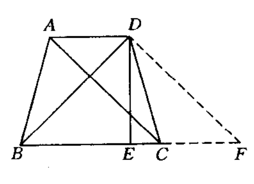


图 4 - 75



解 过 D 作 $DF\parallel AC$，交 BC 延长线于 F，则 $DF=AC$.

$\because AC\perp BD$，$AC\parallel DF$，$\therefore BD\perp DF$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是等腰梯形，

$\therefore AC=BD$.

$\therefore BD=DF$，$\triangle BDF$ 是等腰直角三角形.

$\therefore BF=BC+CF=BC+AD=10$.

$\therefore DE=\frac{1}{2}BF=5$.

题93 已知：如图 4 - 76，在梯形 $ABCD$ 中，$AB /\!/ DC$，中位线 $EF=7\text{cm}$，对角线 $AC\perp BD$，$\angle BDC=30°$. 求梯形的高 AH.

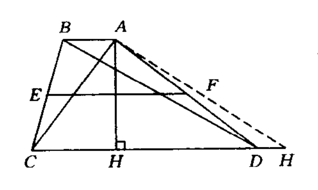
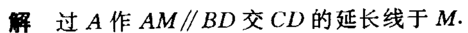


图 4 - 76



解 过 A 作 $AM /\!/ BD$ 交 CD 的延长线于 M.

$\because AB /\!/ DC$，

$\therefore DM=AB$，$\angle AMC=\angle BDC=30°$，

又 $\because$ 中位线 $EF=7\text{cm}$，

$\therefore CM=CD+DM=CD+AB=2EF=14\text{cm}$.

又 $\because AC\perp BD$，$\therefore AC\perp AM$. $\therefore AC=\frac{1}{2}CM=7\text{cm}$.

$\because AH\perp CD$，$\angle ACD=60°$，

$\therefore AH=AC\cdot\sin 60°=\frac{7}{2}\sqrt{3}\,(\text{cm})$.

题94 如图 4 - 77，在 $\triangle ABC$ 中，$AD\perp BC$ 于 D，E、F、M 分别是 AB、BC、AC 的中点.

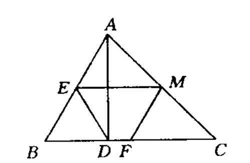


图 4 - 77



求证：四边形 $EDFM$ 是等腰梯形.



证明 在 $\triangle ABC$ 中，

$\because AE=EB$，$AM=MC$，$BF=FC$，

$\therefore MF=\frac{1}{2}AB$，$EM /\!/ BC$.

又 $\because DE=\frac{1}{2}AB$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AB=FM$，$DF\neq ME$.

$\therefore$ 四边形 $EDFM$ 是等腰梯形.

题95 已知：如图 4 - 78，连结梯形 $ABCD$ 两条对角线 AC、BD 的中点 Q、P.

求证：$PQ=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

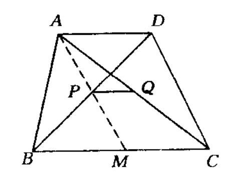


图 4 - 78

证明 连结 AP 并延长 AP 交 BC 于 M.

在 $\triangle APD$ 和 $\triangle MPB$ 中，

$\because PB=PD$，$\angle APD=\angle BPM$，

$\angle PAD=\angle PMB$，

$\therefore \triangle APD\cong\triangle MPB(AAS)$.

$\therefore AP=PM$.

又∵$AQ=QC$，

∴$PQ=\frac{1}{2}MC$.

∴$PQ=\frac{1}{2}(BC-BM)=\frac{1}{2}(BC-AD)$.

题96 已知：如图 4-79，在梯形 $ABCD$ 中，$DC/\!/AB$，$\angle ABC$ 的平分线与腰 AD 交于点 M，且 M 又为 AD 中点，求证：$DC+AB=BC$.

求证：$DE/\!/BC$.

证明 过点 M 作 $MB/\!/AB$ 与 BC 交于点 N，则$\angle 1=\angle 3$.

∵BM 平分$\angle ABC$，∴$\angle 1=\angle 2$

∴$\angle 2=\angle 3$，∴$MN=BN$

又∵M 为 AD 中点，

∴$MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$，$BN=\frac{1}{2}BC$

∴$DC+AB=BC$.

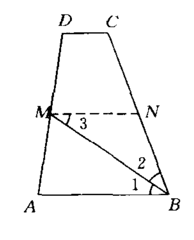
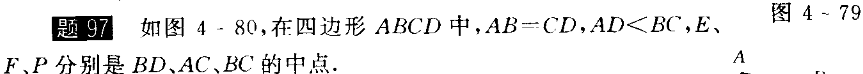


图 4-79



题97 如图 4-80，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$，$AD<BC$，E、F、P 分别是 BD、AC、BC 的中点.

求证：$\angle PEF=\angle PFE$.

证明 在$\triangle ABC$ 中，

∵$AF=FC$，$BP=PC$，

∴$PF=\frac{1}{2}AB$.

同理，$PE=\frac{1}{2}CD$.

∵$AB=CD$，∴$PE=PF$.

∴$\angle PEF=\angle PFE$.

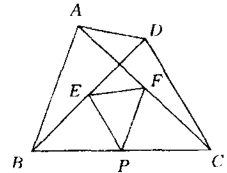


图 4-80

题98 如图 4-81，在四边形 $ABCD$ 中，$AC=BD$，M、N 分别是 AB、CD 的中点，MN 分别交 BD 和 AC 于点 E、F，G 是对角线 AC 和 BD 的交点.

求证：$GE=GF$.

证明 取 AD 中点 P，连结 MP、NP.

∵$AM=MB$，$AP=PD$，

∴$MP \overset{\mathrm{/\!/}}{=} \frac{1}{2}BD$.

∴$\angle PMN=\angle GEF$.

同理可证 $PN \overset{\mathrm{/\!/}}{=} \frac{1}{2}AC$.

∴$\angle PNM=\angle AFE$.

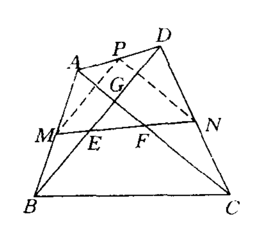


图 4-81

$\because AC=BD$，$\therefore PM=PN$.

$\therefore \angle PMN=\angle PNM$.

$\therefore \angle GEF=\angle GFE$. $\therefore GE=GF$.

题 99 已知：如图 4 - 82，直角梯形 $ABCD$ 中，$DC\parallel AB$，$\angle A=90°$，EF 是中位线，且 $CE\perp EB$，$EG\perp BC$（G 是垂足）.



求证：(1)$\triangle CDE\cong\triangle CGE$；

(2)当 $\angle ABC=60°$ 时，$AB^2+AE^2=3EF^2$.

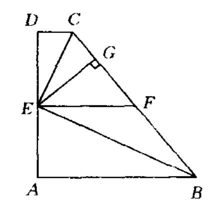


图 4 - 82

证明 (1)$\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线，

$\therefore EF\parallel DC$，$\angle DCE=\angle FEC$.

$\because \angle CEB=90°$，F 是 BC 的中点，

$\therefore EF=CF$，$\therefore \angle FEC=\angle FCE$.

$\therefore \angle DCE=\angle FCE$.

又 $\because DC\parallel AB$，$\angle A=90°$，$\therefore \angle D=90°$.

$\because EG\perp BC$，$\therefore \angle CGE=\angle D$，$EC=EC$.

$\therefore \triangle CDE\cong\triangle CGE$.

(2)$\because EF$ 是梯形 $ABCD$ 的中位线，

$\therefore EF\parallel AB$.

$\because \angle ABC=60°$，$\therefore \angle EFC=\angle ABC=60°$.

又 $\because EF=CF$，$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形.

$\because EG\perp BC$，$\therefore G$ 是 CF 的中点，$\therefore BG=\dfrac{3}{2}EF$.

在 $Rt\triangle CEB$ 中，$EG\perp BC$，

$EB^2=BG\cdot BC=\dfrac{3}{2}EF\cdot 2EF=3EF^2$

在 $Rt\triangle EAB$ 中，$AB^2+AE^2=BE^2$，

$\therefore$ 当 $\angle ABC=60°$ 时，$AB^2+AE^2=3EF^2$.

题 100 如图 4 - 83，在 $\triangle ABC$ 中，AB 与 AC 的中点分别为 P、N，延长 BC 至点 D，使 $CD>BC$. 若 M 为 BD 中点，Q 为 MN 中点，

求证：直线 PQ 平分线段 CD.

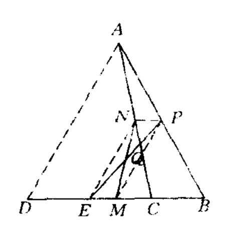


图 4 - 83

证明 延长 PQ 交 BD 于 E，连结 NP、MP、NE 及 DA.

$\because P$、N 分别为 AB、AC 中点，

$\therefore PN\parallel BC$.

又 $MQ=NQ$，$\therefore EQ=QP$.

$\therefore$ 四边形 $PMEN$ 为平行四边形.

$\because P$、M 是 AB、BD 中点，$\therefore PM\parallel DA$.

$\because PM /\!/ NE$，$\therefore NE /\!/ AD$.

又 $AN=NC$，$\therefore DE=EC$. $\therefore PQ$ 平分 CD.

题 101 如图 4 - 84，M、P 分别为$\triangle ABC$ 的边 AB、AC 上的点，且 $AM=BM$，$AP=2CP$. 如果 BP 与 CM 相交于点 N.

求证：$BN=3PN$.

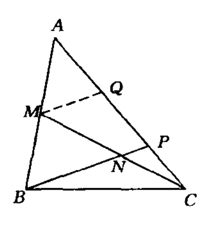


图 4 - 84

证明 取 AP 的中点为 Q，连结 MQ.

$\because AQ=QP$，$AM=MB$，

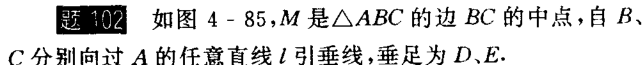
$\therefore MQ /\!/ PN$.

又 $AQ=QP=PC=\frac{1}{3}AC$，

$\therefore CN=NM$. $\therefore PN=\frac{1}{2}MQ$.

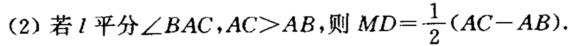
而 $MQ=\frac{1}{2}BP$，

$\therefore PN=\frac{1}{4}PB$. $\therefore BN=3NP$.



题 102 如图 4 - 85，M 是$\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，自 B、C 分别向过 A 的任意直线 l 引垂线，垂足为 D、E.

求证：(1) $MD=ME$.



(2) 若 l 平分$\angle BAC$，$AC>AB$，则 $MD=\frac{1}{2}(AC-AB)$.

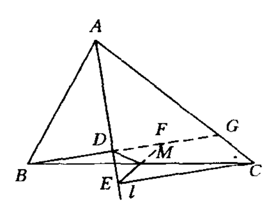
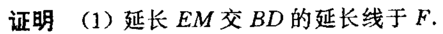


图 4 - 85



证明 (1) 延长 EM 交 BD 的延长线于 F.

$\because BD\perp l$，$CE\perp l$，$\therefore BD /\!/ CE$.

又$\because BM=CM$，$\therefore ME=MF$.

$\therefore MD=\frac{1}{2}EF=ME$.

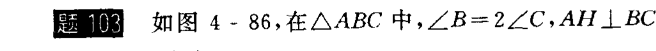
(2) 延长 BD，交 AC 于点 G.

$\because AD$ 平分$\angle BAC$，$BD\perp AD$，

$\therefore AG=AB$，$BD=DG$.

又$\because BM=MC$，

$\therefore MD=\frac{1}{2}CG=\frac{1}{2}(AC-AB)$. $\therefore MD=\frac{1}{2}(AC-AB)$.



题 103 如图 4 - 86，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=2\angle C$，$AH\perp BC$ 于 H，M 是 BC 中点.

求证：$AB=2HM$.

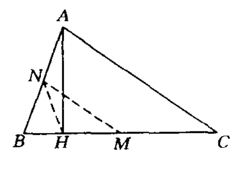


图 4 - 86

证明 取 AB 中点 N，连结 HN、MN.

$\therefore HN=\frac{1}{2}AB=BN$.

$\therefore \angle NHB = \angle B = 2\angle C$.

又$\because MN /\!/ AC$，$\therefore \angle NMH = \angle C$.

$\because \angle NHB = \angle NMH + \angle HNM$，

$\therefore \angle HNM = \angle HMN$.

$\therefore HM = HN = \frac{1}{2}AB$. $\therefore AB = 2HM$.

题 104 如图 4 - 87，在$\triangle ABC$中，$\angle B = 2\angle C$，AD为$\angle A$的平分线，过BC的中点M，作$ME \perp AD$，交AB的延长线于点E.

求证：$BE = \frac{1}{2}BD$.

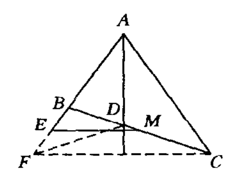


图 4 - 87

证明 延长BE至点F，使$BE = EF$. 连结DF、CF.

$\because BM = MC, BE = EF$，$\therefore EM /\!/ FC$.

$\therefore CF \perp AD$. 又$\because AD$平分$\angle BAC$，

$\therefore AF = AC$. $\quad \therefore \angle AFD = \angle ACD$.

由$\angle ABC = \angle AFD + \angle FDB = 2\angle ACD$，

$\therefore \angle BFD = \angle BDF$. $\quad \therefore BD = BF$.

又$BF = 2BE$，$\therefore BD = 2BE$.

题 105 在正方形$ABCD$中，$\angle BAC$的平分线交BC于点F，$DE \perp AF$，分别交AC、AF、AB于点G、H、E，O是对角线AC与BD的交点.

求证：$BE = 2OG$.

证明 如图 4 - 88，过B作$BM /\!/ AC$，交DE的延长线于M.

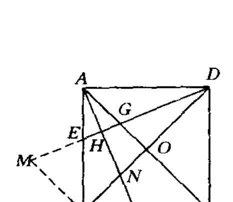


图 4 - 88

$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore OD = OB$.

$\because OG /\!/ BM$，$\therefore DG = GM$.

$\therefore BM = 2OG$.

在$\triangle ODG$和$\triangle OAN$中，

$\because OD = OA$，$\angle OAN = \angle ODG$，

$\angle AON = \angle DOG$，

$\therefore \triangle ODG \cong \triangle OAN (ASA)$.

$\therefore \angle OGD = \angle ONA$.

又AF平分$\angle OAB$，$EG \perp AF$，

$\therefore AE = AG$. $\quad \therefore \angle AEG = \angle AGE$.

又$\angle AGM = \angle M$，$\angle AEG = \angle BEM$，

$\therefore \angle M = \angle BEM$. $\quad \therefore BM = BE$.

$\therefore BE = 2OG$.

题 106 如图 4 - 89，D、E、F分别是正$\triangle ABC$的边AB、BC、AC中点，P为BC上任

一点，$\triangle DPM$ 为正三角形．

求证：$EP=FM$．

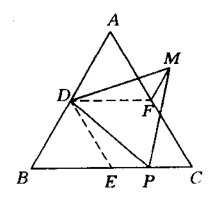


图 4 - 89

证明 连结 DE、DF．

$\therefore DF \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}BC, DE \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AC$．

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形，

$\angle EDF=\angle C=60°$．

$\because BC=AC, \therefore DE=DF$．

又 $\because \angle MDP=60°$，

$\therefore \angle MDF=60°-\angle FDP=\angle EDP$．

而 $DP=DM, \therefore \triangle DEP \cong \triangle DFM(SAS)$．

$\therefore EP=FM$．

题 107 如图 4 - 90，已知：在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，延长 AB 至 D，使 $BD=AB$，E 是 AB 的中点．

求证：$CE=\frac{1}{2}CD$．

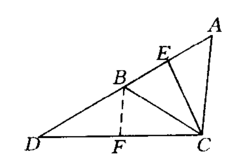


图 4 - 90

证明 取 CD 中点 F，连结 BF．

$\because B$ 是 AD 的中点，

$\therefore BF // AC$，且 $BF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=BE$．

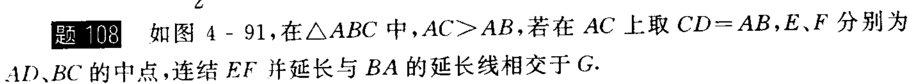
$\angle CBF=\angle ACB$．

又 $AC=AB, \therefore \angle CBE=\angle ACB$．

$\therefore \angle CBE=\angle CBF$．

又 $BC=BC, \therefore \triangle BCE \cong \triangle BCF(SAS)$．

$\therefore CE=CF=\frac{1}{2}CD$．



题 108 如图 4 - 91，在 $\triangle ABC$ 中，$AC>AB$，若在 AC 上取 $CD=AB$，E、F 分别为 AD、BC 的中点，连结 EF 并延长与 BA 的延长线相交于 G．

求证：$AE=AG$．

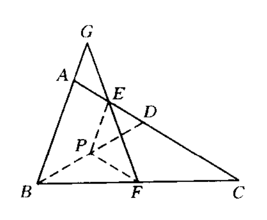


图 4 - 91

证明 连结 BD，取 BD 中点为 P，连结 PE、PF．

$\because PB=PD, DE=EA, \therefore PE \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}AB$．

$\because PB=PD, BF=FC, \therefore PF \underline{\underline{//}} \frac{1}{2}CD$．

$\therefore PE=PF, \angle PEF=\angle PFE$．

又 $\because \angle PEF=\angle G, \angle PFE=\angle AEG$．

$\therefore \angle G=\angle AEG$． $\therefore AE=AG$．

题109 已知如图 4 - 92，四边形 $ABCD$ 中，E、F、G、H、M、N 分别是 AB、BC、CD、DA 和 BD、AC 的中点.

求证：EG、HF、MN 三线共点.

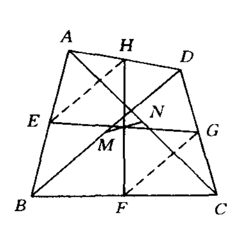


图 4 - 92

证明 连结 EH、FG.

$\therefore EH$、FG 分别为 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 的中位线.

$\therefore EH \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$，$FG \underline{\parallel} \frac{1}{2}BD$.

$\therefore EH \underline{\parallel} FG$，$E$、$F$、$G$、$H$ 是一个平行四边形的四个顶点.

$\therefore EG$、FH 互相平分.

同理可证，H、M、F、N 也是一个平行四边形的四个顶点，对角线 HF、MN 也相互平分.



$\therefore MN$ 经过 EG、HF 的交点.

$\therefore EG$、HF、MN 共点.

题110 如图 4 - 93，分别以 $\triangle ABC$ 的边 AB、AC 为直角边向 $\triangle ABC$ 外部作等腰直角 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$. P、M、N 分别为 BC、BE、CF 的中点.

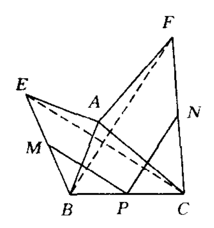


图 4 - 93



求证：$PM=PN$，$PM\perp PN$.

证明 连结 CE、BF.

$\because PM$、PN 分别为 $\triangle BCE$ 和 $\triangle BCF$ 的中位线，

$\therefore PM \underline{\parallel} \frac{1}{2}CE$，$PN \underline{\parallel} \frac{1}{2}BF$.

在 $\triangle EAC$ 和 $\triangle BAF$ 中，

$\because AE=AB$，$AC=AF$，

$\angle EAC=\angle BAF=90°+\angle BAC$，

$\therefore \triangle EAC\cong\triangle BAF(SAS)$.

$\therefore BF=CE$，$\angle BFA=\angle ACE$.

$\because \angle AFC+\angle ACF=90°$，

$\therefore \angle BFC+\angle ECF=90°$.

即 $BF\perp CE$.

$\therefore PM=PN$，$PM\perp PN$.

题111 如图 4 - 94，过 $\triangle ABC$ 的顶点 A 作直线 l，过 B、C 引 l 的垂线，垂足分别为 E、F，P 为 BC 的中点.

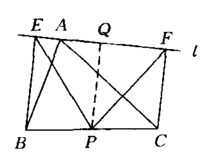


图 4 - 94

求证：$PE=PF$.

证明 作 $PQ\perp l$ 于 Q.

$\because PQ\perp l$，$BE\perp l$，$CF\perp l$，

$\therefore PQ /\!/ BE /\!/ CF$.　又$\because PB=PC$,

$\therefore EQ=FQ$.

$\therefore PQ$ 为梯形中位线，且是 EF 的垂直平分线.

$\therefore PE=PF$.

题112　如图 4 - 95，已知：在$\triangle ABC$ 中，BD 为$\angle ABC$ 的平分线，$AE\perp BD$，E 为垂足，且 M 为 AB 的中点，连 ME 并延长交 AC 于 N.

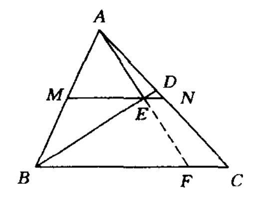


图 4 - 95

求证：$\angle ANM=\angle C$.

证明　延长 AE 交 BC 于 F.

$\because BD$ 平分$\angle ABC$，$AF\perp BD$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle FBE$.

$\therefore AE=EF$.　又 $AM=MB$，

$\therefore ME /\!/ BC$.　即 $MN /\!/ BC$.

$\therefore \angle ANM=\angle C$.

题113　如图 4 - 96，在梯形 $ABCD$ 中，$\angle A$、$\angle B$ 的平分线相交于 E，$\angle C$、$\angle D$ 的平分线相交于 F.

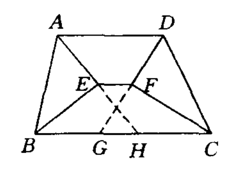


图 4 - 96

求证：$EF /\!/ BC /\!/ AD$.

证明　延长 AE 交 BC 于 H，延长 DF 交 BC 于 G.



$\because AD /\!/ BC$，$\therefore \angle BAD+\angle ABC=180°$.

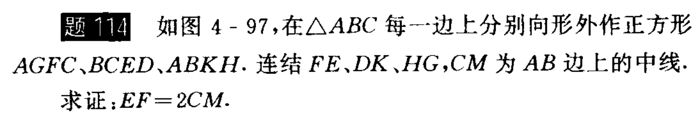
又 AE 平分$\angle BAD$，BE 平分$\angle ABC$，

$\therefore \angle BAE+\angle ABE=90°$.

$\therefore AE\perp BE$. $\therefore AE=EH$.

同理可证，$DF=FG$.　$\therefore EF /\!/ BC /\!/ AD$.

题114　如图 4 - 97，在$\triangle ABC$ 每一边上分别向形外作正方形 $AGFC$、$BCED$、$ABKH$. 连结 FE、DK、HG，CM 为 AB 边上的中线.



求证：$EF=2CM$.

证明　过 M 作 $MN /\!/ AC$ 交 BC 于 N，作$\triangle CEF$ 的中位线 PQ.

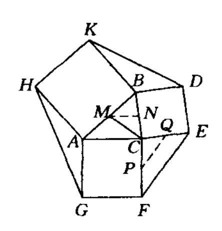


图 4 - 97

$\therefore MN=\frac{1}{2}AC$，$MN /\!/ AC$，$PQ /\!/ EF$，$PQ=\frac{1}{2}EF$.

$\because \angle MNC+\angle ACN=180°$，

　$\angle PCQ+\angle ACN=180°$，

$\therefore \angle MNC=\angle PCQ$.

又 $CN=CQ=\frac{1}{2}CE$，$MN=CP=\frac{1}{2}AC$，

$\therefore \triangle MNC\cong\triangle PCQ(SAS)$.

$\therefore CM=PQ$.

$\therefore EF=2PQ=2CM$.

题 115 如图 4-98,l 为$\triangle ABC$ 外一直线,D、E、F 分别是三边中点,$AA_1\perp l$,$FF_1\perp l$,$EE_1\perp l$,$DD_1\perp l$,A_1、F_1、E_1、D_1 是垂足.

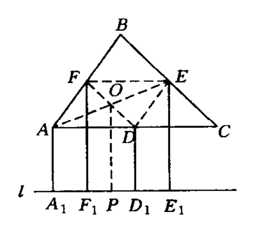


图 4-98

求证:$AA_1+EE_1=FF_1+DD_1$.

证明 连 EF、ED、DF、AE,过 AE、DF 交点 O 作 $OP\perp l$.

$\therefore$四边形 $ADEF$ 是平行四边形.

$\therefore DF$、AE 互相平分.

$\therefore OP$ 为梯形 AA_1E_1E、FF_1D_1D 的中位线.

$\therefore OP=\frac{1}{2}(AA_1+EE_1)=\frac{1}{2}(FF_1+DD_1)$.

$\therefore AA_1+EE_1=FF_1+DD_1$.

四、四边形的面积

题 116 写出有关四边形的面积公式及证明图形面积相等的方法.

答 平行四边形的面积$=ah$(其中 a 是平行四边形的一边,h 是这边上的高).

梯形的面积$=\frac{1}{2}(a+b)\cdot h=l\cdot h$(其中 a、b 分别是梯形的上下底,h 是高,l 是梯形中位线).

正方形面积$=a^2=\frac{1}{2}l^2$(其中 a 是正方形边长,l 是对角线的长).

矩形面积$=ab$(a、b 分别为矩形的长和宽).

菱形面积$=\frac{1}{2}ab$(其中 a、b 为菱形对角线的长).

面积相等的常见证明方法:

(1) 等底等高的三角形、平行四边形面积相等.

(2) 全等形的面积相等.

题 117 菱形的一边和等腰直角三角形的直角边相等,若菱形的一角为 60°,则菱形和三角形面积比是( ).

A. $\sqrt{3}:2$ B. $\sqrt{3}:1$ C. $1:\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}:4$

解 $\because$菱形一角为 60°,

$\therefore$有一对角线与其边长相等,设为 a.

∴菱形另一对角线长$=2\times\sqrt{a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\sqrt{3}a$.

∴菱形面积$=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}a\times a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$,

又等腰直角三角形的面积$=\frac{1}{2}a^2$,

∴菱形与三角形面积比$=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2:\frac{1}{2}a^2=\sqrt{3}:1$.

∴应选 B.

题 118 如图 4 - 99,梯形 $ABCD$ 的面积是 6cm^2,P 是腰 BC 的中点,那么 $S_{\triangle APD}$ 为(　　).

A. 3cm^2　　B. 1.5cm^2

C. 2cm^2　　D. 1cm^2

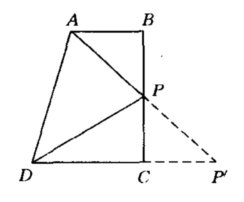


图 4 - 99

解 延长 AP 交 DC 的延长线于 P'.

∴$\triangle ABP\cong\triangle P'CP(SAS)$.

∴$AP=PP'$,$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle CP'P}$.

∴$S_{\triangle APD}=S_{\triangle DPP'}=\frac{1}{2}S_{\triangle AP'D}=\frac{1}{2}S_{梯形ABCD}$.

∴$S_{\triangle APD}=\frac{1}{2}\times 6=3(\text{cm}^2)$.

∴应选 A.

题 119 如图 4 - 100,在▱$ABCD$ 中,E、F 分别在边 BC、CD 上,且 $EF\parallel BD$,那么图中面积相等的三角形的组数为(每两个等积的三角形为一组)(　　).

A. 6　　B. 9　　C. 12　　D. 15

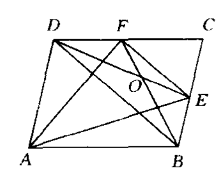
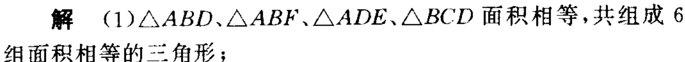
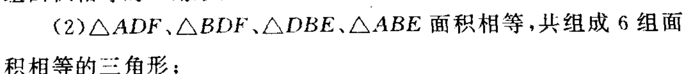


图 4 - 100


解 (1)$\triangle ABD$、$\triangle ABF$、$\triangle ADE$、$\triangle BCD$ 面积相等,共组成 6 组面积相等的三角形;


(2)$\triangle ADF$、$\triangle BDF$、$\triangle DBE$、$\triangle ABE$ 面积相等,共组成 6 组面积相等的三角形;


(3)$\triangle EFD$、$\triangle EFB$ 面积相等;

(4)$\triangle ODF$、$\triangle OBE$ 面积相等;

(5)$\triangle DCE$、$\triangle BFC$ 面积相等;

∴共有 15 组面积相等的三角形,∴选择 D.

题 120 如图 4 - 101,已知 $S_{▱ABCD}=64$,E、F 分别为 AB、AD 的中点,则 $S_{\triangle CEF}=$(　　).

A. 32　B. 28　C. 24　D. 40

解 连结 AC、BD.

$\therefore S_{\triangle CDF}=S_{\triangle CFA}$，$S_{\triangle CEB}=S_{\triangle CAE}$.

又 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}S_{\square ABCD}$，

$\therefore S_{\triangle CDF}=S_{\triangle CBE}=\dfrac{1}{4}S_{\square ABCD}=16$，

又 $S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle AF}$[illegible]$=\dfrac{1}{8}S_{\square ABCD}=8$，

$\therefore S_{\triangle CEF}=S_{\square ABCD}-S_{\triangle CDF}-S_{\triangle CBE}-S_{\triangle AEF}=24$.

故应选 C.

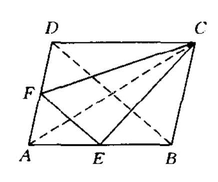


图 4 - 101

题 121 如图 4 - 102，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 5cm，E、F 分别为 AB、AD 上的点，且 $S_{\triangle AEF}=\dfrac{6}{25}S_{正方形ABCD}$，五边形 $EBCDF$ 的周长是正方形 $ABCD$ 的周长的 $\dfrac{9}{10}$，求 $\triangle AEF$ 的周长.

解 $\because S_{正方形ABCD}=AB^2=25\text{cm}^2$，

$\therefore S_{\triangle AEF}=\dfrac{6}{25}S_{正方形ABCD}=\dfrac{6}{25}\times 25=6\text{cm}^2$.

$\dfrac{1}{2}AE\cdot AF=6$，$AE\cdot AF=12$.

又 $BE+EF+FD+DC+BC=\dfrac{9}{10}(AB+AD+BC+CD)$，

$\therefore BE+EF+FD=\dfrac{9}{10}\times 20-10=8$.

又 $BE+FD=2AD-(AE+AF)$

$\therefore BE+FD=10-(AE+AF)$.

$\therefore (10-AE-AF)+EF=8$.

即 $AE+AF=2+EF$.

$\therefore AE^2+AF^2+2AE\cdot AF=4+EF^2+4EF$

又 $AE^2+AF^2=EF^2$，

$\therefore 2\times 12=4+4EF$.

$\therefore EF=5$. $\quad\therefore AE+AF=7$.

$\therefore AE+AF+EF=12\text{cm}$.

故 $\triangle AEF$ 的周长为 12cm.

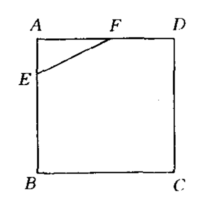
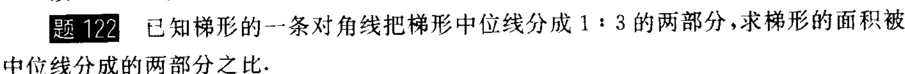


图 4 - 102



题 122 已知梯形的一条对角线把梯形中位线分成 1∶3 的两部分，求梯形的面积被中位线分成的两部分之比.

解 如图 4 - 103，EF 为梯形 $ABCD$ 的中位线，$GF:GE=1:3$. 连接 BG、GD.

易证 $AG=GC$.

$\therefore S_{\triangle ABG}=S_{\triangle BGC}$.

又$\because S_{\triangle AEG}=S_{\triangle BEG}$，

$\therefore S_{\triangle BEG}=S_{\triangle AEG}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

$\because S_{\triangle DGF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle AEG}, S_{\triangle DGF}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ACD}$，

$\therefore S_{\triangle ACD}=\dfrac{4}{3}S_{\triangle AEG}$，

$S_{四边形AEFD}=\dfrac{3}{4}S_{\triangle ACD}+S_{\triangle AEG}=2S_{\triangle AEG}$.

同理可得　$S_{四边形BEFC}=\dfrac{10}{3}S_{\triangle AEG}$.

$\therefore S_{ADFE}:S_{BEFC}=2:\dfrac{10}{3}=3:5$.

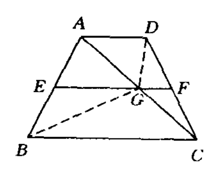
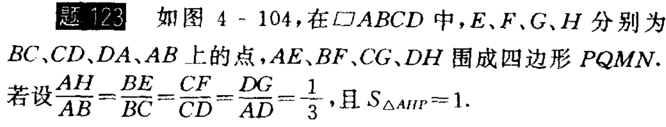
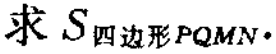


图 4 - 103

题 123　如图 4 - 104，在$\square ABCD$中，E、F、G、H分别为



BC、CD、DA、AB上的点，AE、BF、CG、DH围成四边形$PQMN$. 若设$\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{CF}{CD}=\dfrac{DG}{AD}=\dfrac{1}{3}$，且$S_{\triangle AHP}=1$.



求$S_{四边形PQMN}$.

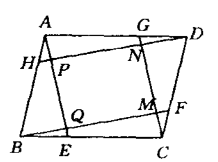
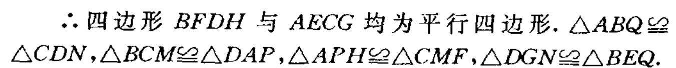


图 4 - 104

解　$\because BH \underline{\underline{/\!/}} DF, AG \underline{\underline{/\!/}} CE$，



$\therefore$四边形$BFDH$与$AECG$均为平行四边形. $\triangle ABQ\cong\triangle CDN$，$\triangle BCM\cong\triangle DAP$，$\triangle APH\cong\triangle CMF$，$\triangle DGN\cong\triangle BEQ$.

$\because AG=\dfrac{2}{3}AD, BH=\dfrac{2}{3}AB$，

$\therefore S_{\square AECG}=\dfrac{2}{3}S_{\square ABCD}=S_{\square BHDF}$.

$\therefore S_{四边形APNG}=S_{四边形CEQM}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}S_{\square ABCD}-S_{四边形PQMN}\right)=S_{四边形DFMN}$.

$\because AH=\dfrac{1}{3}AB, BE=\dfrac{1}{3}BC$，

$\therefore S_{\triangle ABQ}=9S_{\triangle APH}=9$.

$\therefore S_{四边形CEQM}=S_{四边形BHPQ}=9-1=8$.

$\therefore S_{\triangle BEQ}=1, S_{\triangle ABE}=10, S_{\square ABCD}=60$，

$\therefore S_{\square AECG}=S_{\square ABCD}-2S_{\triangle ABE}=60-20=40$.

因此，$S_{四边形PQMN}=S_{\square AECG}-2S_{四边形CEQM}=40-2\times8=24$.

题 124　如图 4 - 105，在$\square ABCD$内有一点P.

求证：$S_{\triangle PBD}=|S_{\triangle PBA}-S_{\triangle PBC}|$.

证明　设P在$\triangle ABD$内，

$\therefore S_{\triangle PBD}=S_{\triangle ABD}-(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAD})$

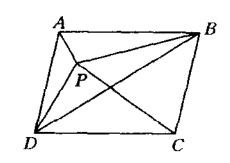


图 4 - 105

$=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}-(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAD})$.

又$\because \frac{1}{2}S_{\square ABCD}=S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBC}$,

$\therefore S_{\triangle PBD}=(S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PBC})-(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAD})$

$=S_{\triangle PBC}-S_{\triangle PAB}$.

若 P 在$\triangle BCD$内,

同理可证　$S_{\triangle PBD}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PBC}$.

若 P 在 BD 上,则 $S_{\triangle PBD}=0$,$S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PBC}$,

即 $S_{\triangle PBD}=S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PBC}=0$.

因此,$S_{\triangle PBD}=|S_{\triangle PAB}-S_{\triangle PBC}|$.

题 125　如图 4 - 106,从$\triangle ABC$各顶点作平行线 $AD/\!/EB/\!/FC$,各与其对边或其延长线相交于 D、E、F.

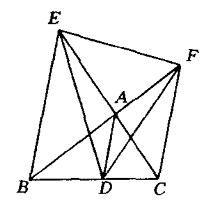


图 4 - 106

求证:$S_{\triangle DEF}=2S_{\triangle ABC}$.

证明　$\because AD/\!/EB/\!/FC$,

$\therefore S_{\triangle ADE}=S_{\triangle ADB}$,

$S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ADC}$,$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle BEC}$.

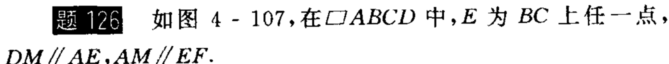
$\therefore S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ADF}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$,

$S_{\triangle BEF}-S_{\triangle BEA}=S_{\triangle BEC}-S_{\triangle BEA}$.

即 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ABC}$.

$\therefore S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ADF}+S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle ABC}$.

故 $S_{\triangle DEF}=2S_{\triangle ABC}$.



题 126　如图 4 - 107,在$\square ABCD$中,E 为 BC 上任一点,$DM/\!/AE$,$AM/\!/EF$.

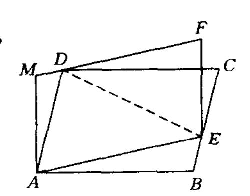


图 4 - 107

求证:$S_{四边形AMFE}=S_{\square ABCD}$.

证明　连结 DE.

$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}S_{\square AEFM}$.

$\therefore S_{\square ABCD}=S_{\square AMFE}$.

题 127　如图 4 - 108,O 是四边形 $ABCD$ 的对角线的交点 O,延长 DB 至 E,使 $BE=OD$,延长 AC 至 F,使 $CF=AO$.

图 4 - 108

求证:$S_{\triangle OEF}=S_{四边形ABCD}$.

证明　连结 AE、EC.

$\because OD=BE$,

$\therefore S_{\triangle OCD}=S_{\triangle BCE}$,$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AOD}$.

$\because OA=CF$,

$\therefore S_{\triangle CEF}=S_{\triangle OAE}$.

$\therefore S_{\triangle AOE}=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CFE}$.

$\because S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OCD}$,

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle AOE}+S_{\triangle BCE}+S_{\triangle OBC}$

$=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle BCE}+S_{\triangle OBC}$

$=S_{\triangle OEF}$.

题 128 如图 4 - 109，▱$ABCD$ 中，E 是 CD 上一点，F 是 AD 上一点，且 $CF=AE$，AE 交 CF 于 O.

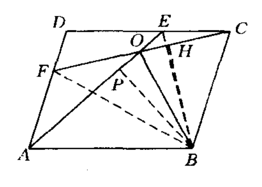


图 4 - 109

求证：OB 平分 $\angle AOC$.

证明 作 $BP\perp AE$ 于 P，$BH\perp CF$ 于 H. 连结 BF、BE.

$\therefore S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$，$S_{\triangle BCF}=\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

$\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle BCF}$.

又 $AE=CF$，$\therefore BH=BP$.

$\therefore \angle BOP=\angle BOH$.

$\therefore OB$ 平分 $\angle AOC$.

第五章　相似三角形

一、比例线段

题1 简述比例的定义及其有关性质.

答 (1)表示两个比相等的式子叫作比例. 例如 $a:b=c:d$.

(2)若 $a:b=c:d$,则 a、d 叫比例外项,b、c 叫比例内项,d 还叫第四比例项.

(3)若 $a:b=c:d$ 中,$b=c$,则此时 $a:b=b:d$,我们把 b 叫比例中项.

比例的性质:

(1)基本性质　若 $a:b=c:d$,则 $ad=bc$;

(2)更比性质　若 $a:b=c:d$,则 $a:c=b:d$;

(3)反比性质　若 $a:b=c:d$,$a\cdot c\neq 0$,则 $b:a=d:c$;

(4)合比性质　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,则 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

(5)分比性质　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,则 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

(6)等比性质　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{e}{f}$,$b+d+\cdots+f\neq 0$,

则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots=\frac{e}{f}=\frac{a+c+\cdots+e}{b+d+\cdots+f}$.

题2 什么是黄金分割点?

A　C　B

图 5-1

答 如图 5-1,C 为线段 AB 上一点,并且满足 $AC^2=AB\cdot BC$,此时我们把线段 AC 叫做 AB 的黄金分割线段,C 叫 AB 的黄金分割点. 而且有

$$AC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB\approx 0.618AB.$$

题3 简述平行线分线段成比例定理.

答 (1)一组平行线截两直线,所截得的对应线段成比例.

(2)平行于三角形一边的直线截其他两边所得的对应线段成比例.

(3)平行于三角形一边的直线截其他两边,所截得的三角形的三边与原三角形的三边对应成比例.

(4)平行于梯形两底的直线截梯形的两腰,所截得的对应线段成比例.

题4 已知$\frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$,设$A=\frac{y}{x+y+z}$,$B=\frac{x+z}{y}$,$C=\frac{x+y-z}{x}$,那么$A$、$B$、$C$大小的顺序为(　　).

A. $A>B>C$　B. $A<B<C$　C. $C>A>B$　D. $A<C<B$

解 $\because \frac{x}{2}=\frac{y}{7}=\frac{z}{5}$,

$\therefore \frac{x+y+z}{2+7+5}=\frac{y}{7},\frac{x+z}{2+5}=\frac{y}{7},\frac{x+y-z}{2+7-5}=\frac{x}{2}$.

$\therefore \frac{x+y+z}{y}=2,\frac{x+z}{y}=1,\frac{x+y-z}{x}=2$.

$\therefore A=\frac{1}{2},B=1,C=2$. ∴应选B.

题5 已知$x=\frac{a}{b+c}=\frac{b}{a+c}=\frac{c}{a+b}$,那么$x$的值是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　B. -1　C. -1或$\frac{1}{2}$　D. 0

解 当$a+b+c\neq 0$时,$x=\frac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$.

当$a+b+c=0$时,$b+c=-a,a+c=-b,b+b=-c$,

$x=-1$. ∴应选C.

题6 如图5-2,C为线段AB的黄金分割点,$AC>BC$.并且$AC=2$,则$BC=$(　　).

A　C　B

图5-2

A. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　B. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

C. $\sqrt{5}-1$　D. $\sqrt{5}-1$或$\sqrt{5}+1$

解 ∵C为AB的黄金分割点,$AC>BC$,∴$AC^2=AB\cdot BC$.

又$AB=AC+BC$,

$\therefore AC^2=(AC+BC)\cdot BC$.

$\therefore BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AC=\sqrt{5}-1$.

故应选C.

题7 如图5-3,若一直线上按顺序排列着四点A、B、C、D,且$AB:BC=AD:CD$.

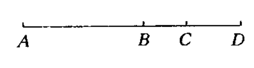


图5-3

求证：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}$.

证明 设 $AB=x,AD=y,AC=z$，

则由 $AB:BC=AD:CD$，

得 $x:(z-x)=y:(y-z)$.

$\therefore x(y-z)=y(z-x)$. $\therefore 2xy=yz+xz$.

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$. 即 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AC}$.

题8 如图 5 - 4，在$\triangle OCE$中，$AD/\!/BE$，$BD/\!/CE$.

(1)求证：$OA:OB=OB:OC$. (2)若 $OA=3$，$AC=9$，求 AB 的长.

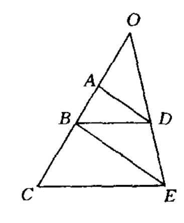


图 5 - 4

证明 (1)在$\triangle OCE$中，$BD/\!/CE$，

$\therefore OD:OE=OB:OC$.

在$\triangle OBE$中，$AD/\!/BE$，

$\therefore OA:OB=OD:OE$.

$\therefore OA:OB=OB:OC$.

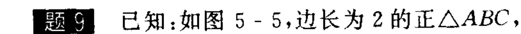
(2)由(1)知 $OA:OB=OB:OC$，

$\therefore OB^2=OA\cdot OC$.

又 $OA=3$，$OC=OA+AC=12$，

$\therefore OB^2=36$，$OB=6$.

$\therefore AB=OB-OA=6-3=3$.



题9 已知：如图 5 - 5，边长为 2 的正$\triangle ABC$，$DE/\!/BC$，$S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=1:4$.

求 EC 的长.

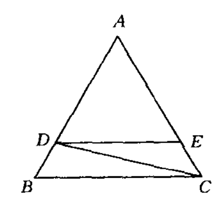


图 5 - 5

解 $\because S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=1:4$，

$\therefore BD:AB=1:4$.

$\because DE/\!/BC$，$\therefore BD:AB=CE:AC$.

$\therefore CE:AC=1:4$.

$\therefore CE=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$.

题10 如图 5 - 6，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，BD、AC 相交于 O. 过 O 的直线分别交 AB、CD 于 E、F，且 $EF/\!/BC$. 若 $AD=12$，$BC=20$，求 EF.

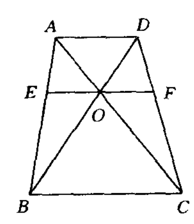


图 5 - 6

解 $\because EF/\!/BC$，

$\therefore OE:BC=OF:BC=AE:AB$. $\therefore OE=OF$.

又 $OE:BC=AE:AB$，

$OF:AD=CF:CD=BE:AB$，

$\therefore \dfrac{OE}{BC}+\dfrac{OF}{AD}=\dfrac{AE+BE}{AB}=1.$

$\therefore \dfrac{2}{EF}=\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BC}.$

$\therefore \dfrac{2}{EF}=\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{20+12}{12\times 20}.$

$\therefore EF=15.$

题 11 如图 5 - 7,在$\triangle ABC$中,$AC>AB$,在AC上截取$CD=AB$,延长AB至点E,使$BE=CD$,连DE交BC于点F.

求证:$\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{AB}{AC}$.

证明 过D作$DP/\!/BC$,交AB于P.

$\therefore \dfrac{DF}{FE}=\dfrac{PB}{BE},\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{PB}{CD}.$

$\because BE=CD,$

即$\dfrac{DF}{EF}=\dfrac{AB}{AC}.$

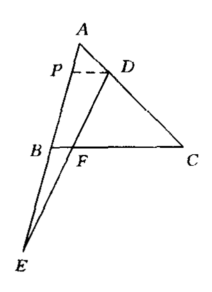


图 5 - 7

题 12 如图 5 - 8,M是$\triangle ABC$中BC边的中点,P是BC边上任一点,过P作$PR/\!/AM$,交BA的延长线于Q,交CA于R.

求证:$\dfrac{PQ}{AM}+\dfrac{PR}{AM}=2.$

证明 $\because PQ/\!/AM,$

$\therefore \dfrac{PR}{AM}=\dfrac{PC}{CM},\dfrac{PQ}{AM}=\dfrac{PB}{BM}.$

又$CM=BM,$

$\therefore \dfrac{PR}{AM}+\dfrac{PQ}{AM}=\dfrac{PB+PC}{BM}=\dfrac{BC}{BM}=2.$

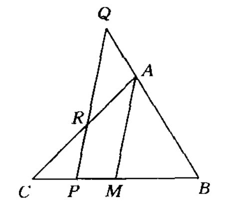
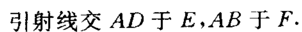


图 5 - 8

题 13 已知:如图 5 - 9,AD是$\triangle ABC$中BC边上中线,从C


引射线交AD于E,AB于F.

求证:$AE\cdot FB-2AF\cdot DE.$

证明 过D作$DP/\!/CF$,交AB于P.

$\therefore \dfrac{AF}{FP}=\dfrac{AE}{ED}.$

又$CD=DB$,$\therefore FP=PB=\dfrac{1}{2}FB.$

$\therefore \dfrac{AF}{\frac{1}{2}FB}=\dfrac{AE}{ED}.$

$\therefore AE\cdot FB=2AF\cdot ED.$

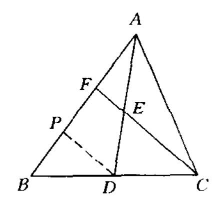


图 5 - 9

题 14 已知:如图 5 - 10,D是AB上一点,E为AC上一点,F为BC,DE的延长线

的交点，且$\frac{AE}{EC}=\frac{BF}{CF}$.

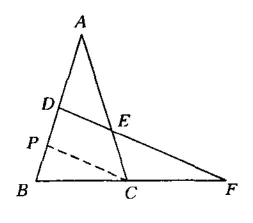


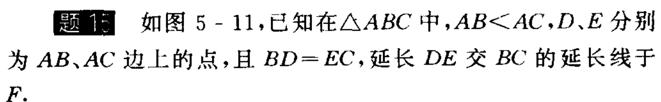
图 5-10

求证：$AD=BD$.

证明 作 $CP/\!/FD$ 交 AB 于 P.

$\therefore \frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DP}, \frac{BF}{CF}=\frac{BD}{DP}$.

$\therefore \frac{AD}{DP}=\frac{BD}{DP}$. $\therefore AD=BD$.



题15 如图 5-11，已知在△ABC 中，$AB<AC$，D、E 分别为 AB、AC 边上的点，且 $BD=EC$，延长 DE 交 BC 的延长线于 F.

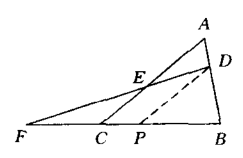
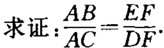


图 5-11



求证：$\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{DF}$.

证明 作 $DP/\!/AC$，交 BC 于 P.

$\because EC/\!/PD$，$\therefore \frac{EF}{DF}=\frac{EC}{DP}$.

$\because PD/\!/AC$，$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DP}$.

又 $BD=EC$，

$\therefore \frac{AB}{AC}=\frac{EF}{DF}$.

题16 已知：如图 5-12，在▱$ABCD$ 中，P 为 BC 上任一点，连结 DP 交 AB 延长线于 Q.

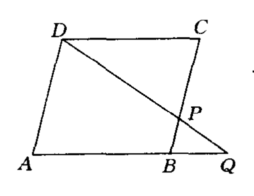


图 5-12

求证：$\frac{BC}{BP}-\frac{AB}{BQ}=1$.

证明 ∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

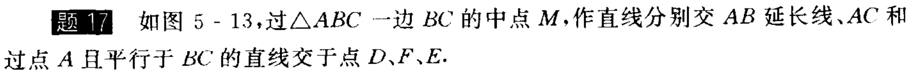
$\therefore AB/\!/CD, AD/\!/BC$.

$\therefore \frac{AB}{BQ}=\frac{DP}{PQ}, \frac{CP}{PB}=\frac{PD}{PQ}$.

$\therefore \frac{CP+PB}{BP}=\frac{PD+PQ}{PQ}$.

$\therefore \frac{BC}{BP}-\frac{AB}{BQ}=\frac{PD+PQ}{PQ}-\frac{PD}{PQ}=1$.

即$\frac{BC}{BP}-\frac{AB}{BQ}=1$.



题17 如图 5-13，过△ABC 一边 BC 的中点 M，作直线分别交 AB 延长线、AC 和过点 A 且平行于 BC 的直线交于点 D、F、E.

求证：$\frac{DM}{DE}=\frac{FM}{FE}$.

证明 $\because AE/\!/BC$，

$\therefore \frac{DM}{DE}=\frac{BM}{AE}, \frac{FM}{FE}=\frac{CM}{AE}$.

又∵$BM=CM$，

$\therefore \frac{DM}{DE}=\frac{FM}{FE}$.

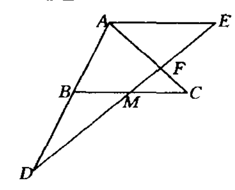


图 5 - 13

图 5 - 14

题 18 已知：如图 5 - 14，D、E 分别为 AB、AC 上的点，BE、CD 交于 O，过 O 作直线平行于 AC 分别交 AB、DE、BC 于 G、F、H.

求证：$OG^2=GF\cdot GH$.

证明 ∵$GH\parallel AC$，

$\therefore \frac{OG}{AE}=\frac{OB}{BE},\frac{OH}{CE}=\frac{OB}{BE}$.

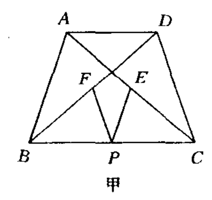
$\therefore \frac{OG}{AE}=\frac{OH}{CE}$. 即$\frac{OG}{OH}=\frac{AE}{CE}$.

$\therefore \frac{OG}{GH}=\frac{AE}{AC}$.

同理可证，$\frac{AE}{AC}=\frac{GF}{OG}$.

$\therefore \frac{OG}{GH}=\frac{GF}{OG}$. $\therefore OG^2=GF\cdot GH$.

题 19 已知：如图 5 - 15，梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=DC$.



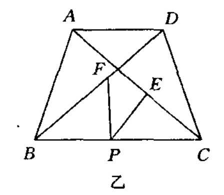


图 5 - 15

(1)如果 P、E、F 分别是 BC、AC、AD 的中点，求证：$AB=PE+PF$.

(2)如果 P 是 BC 上任意一点(中点除外)，$PE\parallel AB$，$PF\parallel DC$，那么 $AB=PE+PF$，这个结论还成立吗？如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由.

证明 (1)如图 5 - 15 甲，∵P、E 分别是 BC、AC 的中点，$\therefore PE=\frac{1}{2}AB$，

同理 $PF=\frac{1}{2}CD$.

又 $AB=CD$,$\therefore PE+PF=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}CD=AB$.

(2)如图 5-15 乙,当 P 是 BC 上任意一点时,$AB=PE+PF$ 还成立. 证明如下:

$\because PE/\!/AB$,$\therefore \frac{PE}{AB}=\frac{PC}{BC}$.

$\because PF/\!/DC$,$\therefore \frac{PF}{CD}=\frac{BP}{BC}$.

$\therefore \frac{PE}{AB}+\frac{PF}{CD}=\frac{PC}{BC}+\frac{BP}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$,

又 $AB=CD$,$\therefore \frac{PE+PF}{AB}=1$,$\therefore AB=PE+PF$.

题20 如图 5-16,一条直线截$\triangle ABC$ 的三边 AB、AC、BC(或其延长线),设交点分别为 X、Y、Z.

求证:$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$. (梅内劳斯定理)

证明 利用面积关系有

$\frac{AX}{XB}=\frac{S_{\triangle AXZ}}{S_{\triangle BXZ}}$,$\frac{BZ}{ZC}=\frac{S_{\triangle BXZ}}{S_{\triangle CXZ}}$.

又$\because \frac{CY}{YA}=\frac{S_{\triangle CYZ}}{S_{\triangle YAZ}}=\frac{S_{\triangle CYX}}{S_{\triangle YAX}}=\frac{S_{\triangle CYZ}+S_{\triangle CYX}}{S_{\triangle YAZ}+S_{\triangle YAX}}$,

$\therefore \frac{CY}{YA}=\frac{S_{\triangle CXZ}}{S_{\triangle AXZ}}$. $\therefore \frac{AX}{XB}\cdot\frac{BZ}{ZC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$.

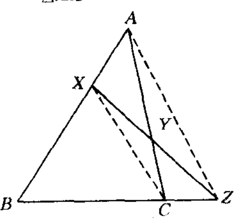


图 5-16

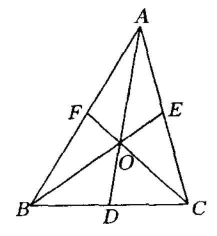


图 5-17

题21 在$\triangle ABC$ 内取一点 O,AO、BO、CO 交对边分别为 D、E、F. 如图 5-17 所示.

求证:$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$. (塞瓦定理)

证明 利用面积关系,有

$\frac{AF}{FB}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}$,$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle AOC}}$,

$\frac{CE}{EA}=\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOB}}$. $\therefore \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

题22 如图 5 - 18,在$\triangle ABC$中,$DE/\!/BC$. P为边BC上的点,AP交DE于Q,在AP延长线上取一点F,FD、FE交BC于G、H.

求证:$\frac{PG}{PB}=\frac{PH}{PC}$.

证明 $\because DE/\!/BC$,

$\therefore \frac{PG}{QD}=\frac{PF}{QF}=\frac{PH}{QE}$,$\therefore \frac{PG}{PH}=\frac{QD}{QE}$.

又$\because \frac{QD}{QE}=\frac{AQ}{AP}=\frac{PB}{PC}$,

$\therefore \frac{PG}{PH}=\frac{PB}{PC}$. $\therefore \frac{PG}{PB}=\frac{PH}{PC}$.

图 5 - 18

题23 如图 5 - 19,设BD是$\triangle ABC$中$\angle B$的平分线,$DE/\!/BC$.

求证:$\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{DE}$.

证明 $\because DE/\!/BC$,$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{DE}{BC}$.

$\because BD$是$\angle B$的平分线,$\angle EBD=\angle DBC$,且$\angle EDB=\angle DBC$,

$\therefore \angle EBD=\angle EDB$. $\quad\therefore BE=ED$.

$\therefore AB\cdot DE=AE\cdot BC=BC\cdot(AB-DE)$.

即$AB\cdot DE+BC\cdot DE=BC\cdot AB$.

$\therefore \frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}=\frac{1}{DE}$.

图 5 - 19

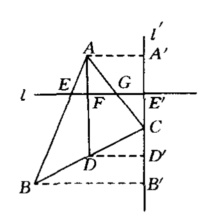


图 5 - 20

题24 如图 5 - 20,已知AD是$\triangle ABC$的中线,直线l分别交AB、AD、AC于E、F、G.

求证:$\frac{BE}{EA}+\frac{CG}{AG}=\frac{2FD}{AF}$.

证明 过点C作直线l的垂线l',点A、B、D、G在直线l'上的射影分别为A'、B'、D'、E'.

$\because A'A/\!/E'E/\!/B'B/\!/D'D$,

$\therefore \frac{BE}{EA}=\frac{B'E'}{E'A'}, \frac{CG}{GA}=\frac{CE'}{E'A'}, \frac{FD}{AF}=\frac{D'E'}{A'E'}$.

$\therefore \frac{BE}{EA}+\frac{CG}{GA}=\frac{B'E'+CE'}{E'A'}$.

$\because BD=DC, \therefore B'D'=D'C$.

$\therefore \frac{BE}{EA}+\frac{CG}{GA}=\frac{2D'E'}{E'A'}$.

$\therefore \frac{BE}{EA}+\frac{CG}{GA}=\frac{2FD}{AF}$.

题 25 已知:如图 5-21,P 是$\triangle ABC$ 内一点,连结 AP、BP、CP 并分别延长交 BC、AC、AB 于点 D、E、F.

求证:$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$.

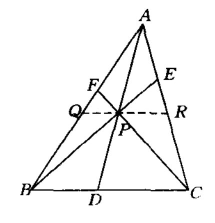


图 5-21

证明 过 P 作 BC 的平行线,分别交 AB、AC 于点 Q、R.

$\therefore \frac{PE}{BE}=\frac{PR}{BC}, \frac{PF}{CF}=\frac{PQ}{BC}$.

$\therefore \frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{PR+PQ}{BC}=\frac{QR}{BC}$.

又$\because \frac{AQ}{AB}=\frac{QR}{BC}, \therefore \frac{AB-AQ}{AB}=\frac{BC-QR}{BC}$.

$\therefore \frac{QB}{AB}=1-\frac{QR}{BC}$.

又$\because \frac{PD}{AD}=\frac{QB}{AB}=1-\frac{QR}{BC}, \therefore \frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$.

二、相似三角形

题 26 如何判定两个三角形相似?

答 满足下列条件之一的两个三角形相似.

(1) 有两角对应相等;

(2) 三边对应成比例;

(3) 有一角相等,且夹这等角的两边对应成比例.

题 27 如何判定两个直角三角形相似?

答 满足下列条件的两个直角三角形相似.

(1) 有一个锐角对应相等;

(2) 一条直角边和一条斜边对应成比例.

题 28 简述相似三角形的有关性质.

答 (1) 对应边上的高与对应边成比例；

(2) 对应边上的中线与对应边成比例；

(3) 对应角的角平分线与对应边成比例；

(4) 面积比等于相似比的平方；

(5) 周长比等于相似比.

题 29 已知：如图 5-22，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AD\perp BC$ 于 D.

(1) $\triangle ABC\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAC$；

(2) $AB^2=BD\cdot BC$，$AC^2=CD\cdot CB$，$AD^2=BD\cdot CD$，(射影定理).

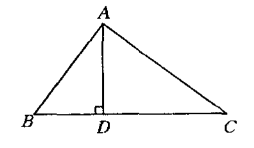


图 5-22

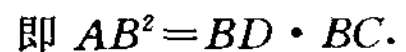
证明 (1) $\because \angle BAC=\angle ADB=\angle ADC=90°$，

又 $\angle B+\angle C=90°$，$\angle DAC+\angle C=90°$，

$\therefore \angle B=\angle DAC$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAC$.

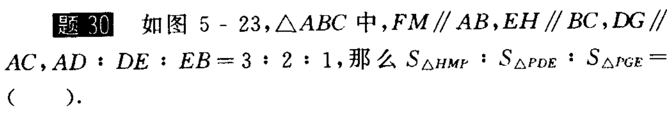
(2) $\because \triangle ABC\backsim\triangle DBA$，$\therefore \dfrac{BD}{AB}=\dfrac{AB}{BC}$，



即 $AB^2=BD\cdot BC$.

又 $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$，$\therefore \dfrac{CD}{AC}=\dfrac{AC}{CB}$，即 $AC^2=CD\cdot CB$.

又 $\triangle DBA\backsim\triangle DAC$，$\therefore \dfrac{BD}{AD}=\dfrac{AD}{DC}$，即 $AD^2=BD\cdot CD$.



题 30 如图 5-23，$\triangle ABC$ 中，$FM /\!/ AB$，$EH /\!/ BC$，$DG /\!/ AC$，$AD:DE:EB=3:2:1$，那么 $S_{\triangle HMP}:S_{\triangle PDE}:S_{\triangle PGE}=$ ( ).

A. $3:2:1$ B. $4:2:1$

C. $9:4:1$ D. $6:4:1$

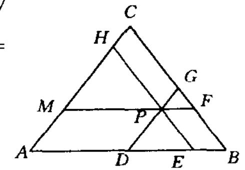


图 5-23

解 易证 $\triangle HMP\backsim\triangle PDE\backsim\triangle GPF$，

$\therefore$ $S_{\triangle HMP}:S_{\triangle PDE}:S_{\triangle GPF}$

$=PM^2:DE^2:PF^2$

$=AD^2:DE^2:BE^2=9:4:1$.

故应选 C.

题 31 如图 5-24，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于 D，且 $BC:AC=2:3$，那么 $BD:AD=$ ( ).

A. $2:3$ B. $4:9$

C. $2:5$ D. $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

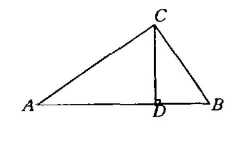


图 5-24

解 由射影定理有

$AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$.

$\therefore BC^2:AC^2=BD:AD$.

$\therefore BD:AD=4:9$.

故应选 B.

题 32 两相似多边形的相似比是 2∶3，它们的面积之差是 30cm^2，那么它们的面积之和为(　　).

A. 74cm^2　　B. 76cm^2　　C. 78cm^2　　D. 80cm^2

解 设这两个相似多边形面积分别为 x、$y(x<y)$.

则有 $x:y=4:9$，$y-x=30$.

$\therefore x=24$，$y=54$. $\therefore x+y=78(\text{cm}^2)$.

故应选 C.

题 33 如图 5 - 25，在$\triangle ABC$ 中，$DE/\!/BC$，且分$\triangle ABC$ 为面积相等的两个部分，那么 $DE:BC$ 的值为(　　).

A. $1:\sqrt{2}$　　B. $1:2$

C. $1:3$　　D. $\sqrt{2}:1$

图 5 - 25

解 $\because DE/\!/BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore S_{\triangle ADE}:S_{\triangle ABC}=DE^2:BC^2$.

又 $S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore DE^2:BC^2=1:2$.

$\therefore DE:BC=1:\sqrt{2}$. $\therefore$应选 A.

题 34 如图 5 - 26，已知 E 为梯形 $ABCD$ 一腰 AB 上一点，且 $AE:EB=2:1$，$EF/\!/BC$ 交 CD 于 F，$AD=5$，$EF=7$，则 BC 长为(　　).

A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 11

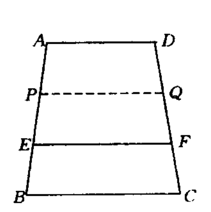


图 5 - 26

解 取 AE 的中点 P，并作 $PQ/\!/EF$ 交 CD 于 Q.

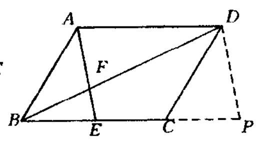
$\therefore DQ=QF$，PQ 为梯形 $AEFD$ 的中位线，

$\therefore 2PQ=AD+EF=5+7=12$.

又 $2EF=PQ+BC$，

$\therefore 2\times 7=6+BC$，$\therefore BC=8$. $\therefore$应选 A.

题 35 如图 5 - 27，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，E 为 BC 上一点，AE 交 BD 于 F. 若 $BE:EC=4:5$，则 $BF:FD=$(　　).





A. $4:5$　　B. $4:9$

C. $4:10$　　D. $5:9$

图 5 - 27

解 作 $DP/\!/AE$ 交 BC 的延长线于 P.

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCP$. $\therefore BE=CP$.

$\because BE:EC=4:5$, $\therefore BE:(BE+EC)=4:9$.

即 $BE:EP=4:9$. $\therefore BF:FD=BE:EP=4:9$.

故应选 B.

题 36 梯形 $ABCD$ 中，若 $AB/\!/CD$，E 为对角线 AC 和 BD 的交点，$S_{\triangle DCE}:S_{\triangle DCB}=1:3$，则 $S_{\triangle DCE}:S_{\triangle ABD}$ 为(　　).

A. 1∶5　　B. 1∶6

C. 1∶7　　D. 1∶9

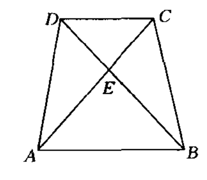


图 5 - 28

解 如图 5 - 28，

$\because S_{\triangle DCE}:S_{\triangle DCB}=1:3$,

$\therefore DE:EB=1:2$.

$\therefore CE:EA=1:2$.

$\therefore S_{\triangle DCE}:S_{\triangle ADE}=1:2$, $S_{\triangle DCE}:S_{\triangle ABE}=1:4$.

$\therefore S_{\triangle DCE}:(S_{\triangle ADE}+S_{\triangle AEB})=1:6$.

即 $S_{\triangle DCE}:S_{\triangle ADB}=1:6$.

故应选 B.

题 37 如图 5 - 29，$AD/\!/BC$，$AP=3$，$PC=6$，$AD=4$，$EB=2$，则 $BC=$(　　).

A. 5　　B. 6

C. 4　　D. 7

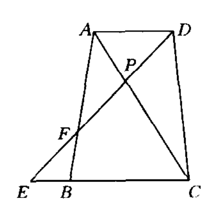


图 5 - 29

解 $\because \triangle APD \backsim \triangle CPE$,

$\therefore AD:CE=AP:PC$.

$\therefore CE=8$. $\therefore BC=EC-BE=6$.

故应选 B.

题 38 已知：如图 5 - 30，在等腰三角形 ABC 中，$AB=AC$，BD 是 AC 边上的高.

求证：$BC^2=2AC\cdot CD$.

证明 作 $AE\perp BC$ 于 E，则 $BE=EC$.

$\because \angle AEC=\angle BDC=90°$，$\angle C$ 为公共角，

$\therefore \triangle ACE \backsim \triangle BCD$.

$\therefore \dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CD}{CE}$,

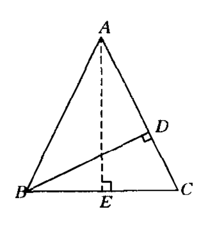


图 5 - 30

$\therefore \frac{BC}{AC}=\frac{CD}{\frac{1}{2}BC}$,

$\therefore BC^2=2AC\cdot CD$.

题39 如图 5 - 31,矩形 $ABCD$ 中,$AB=a$,$BC=b$,M 是 BC 中点,并且 $DE\perp AM$.

求证:$DE=\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.

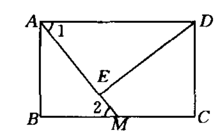


图 5 - 31

证明 $\because AD/\!/BC$,$\therefore \angle 1=\angle 2$.

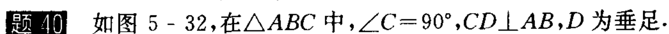
又$\because \angle B=\angle DEA=\mathrm{Rt}\angle$,

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle DEA$. $\therefore \frac{DE}{AB}=\frac{AD}{AM}$.

$\because AB=a$,$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}b$,

$\therefore AM=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$.

$\therefore DE=\frac{AB\cdot AD}{AM}=\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}$.



题40 如图 5 - 32,在$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$CD\perp AB$,D 为垂足.

求证:$\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{CD^2}$.

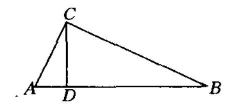


图 5 - 32

证明 由射影定理,有 $AC^2=AB\cdot AD$,

$BC^2=AB\cdot BD$,$CD^2=AD\cdot BD$,

$\therefore \frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{AB\cdot AD}+\frac{1}{AB\cdot BD}$

$=\frac{BD+AD}{AB\cdot AD\cdot BD}=\frac{AB}{AB\cdot AD\cdot BD}$

$=\frac{1}{AD\cdot BD}=\frac{1}{CD^2}$.

即$\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{CD^2}$.

题41 已知:如图 5 - 33,等腰三角形 ABC 中,$AB=AC$,$\angle BAC=36°$,AE 是$\triangle ABC$ 的外角平分线,BF 是$\angle ABC$ 的平分线,BF 的延长线交 AE 于 E.

求证:(1)$AF=BF=BC$;

(2)$EF:BF=BC:FC$,

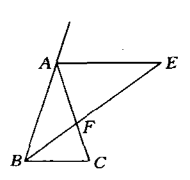


图 5 - 33

证明 (1)在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$\angle BAC=36°$,BF 平分$\angle ABC$,

$\therefore \angle ABC=\angle C=72°$,$\angle ABF=\angle FBC=36°$,

$\therefore \angle BFC=72°$,$\therefore BC=BF=AF$.

(2)$\because \angle AFE=72°$,$\angle EAF=72°$,

$\therefore \triangle EAF$、$\triangle BCF$ 都是底角为 72°的等腰三角形，

$\therefore \triangle EAF \backsim \triangle BCF$，$\therefore \dfrac{EF}{BF}=\dfrac{AF}{CF}$，

又 $AF=BC$，$\therefore EF : BF=BC : FC$.

题 42 已知：如图 5 - 34，在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的中点，且 $AD=AC$，$DE\perp BC$，DE 与 AB 相交于点 E，EC 与 AD 相交于 F.

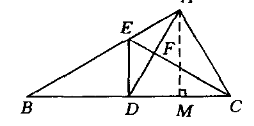


图 5 - 34

(1)求证：$\triangle ABC \backsim \triangle FCD$；

(2)若 $S_{\triangle FCD}=5$，$BC=10$，求 DE 的长.

证明 (1)$\because DE\perp BC$，D 是 BC 中点，

$\therefore \angle EB=EC$，$\therefore \angle B=\angle ECB$.

又$\because AD=AC$，$\therefore \angle ADC=\angle ACB$，$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle FCD$.

(2)过点 A 作 $AM\perp BC$，垂足为点 M.

$\because \triangle ABC \backsim \triangle FCD$，$\therefore BC=2CD$.

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCD}}=\left(\dfrac{BC}{CD}\right)^2=4$，

又 $S_{\triangle FCD}=5$，$\therefore S_{\triangle ABC}=20$.

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC \cdot AM=20$，$BC=10$，$\therefore AM=4$.

又$\because DE /\!/ AM$，$\therefore \dfrac{DE}{AM}=\dfrac{BD}{BM}$.

$\because DM=\dfrac{1}{2}DC=\dfrac{5}{2}$，$BM=BD+DM$，$BD=\dfrac{1}{2}BC=5$，

$\therefore \dfrac{DE}{4}=\dfrac{5}{5+\dfrac{5}{2}}$，$\therefore DE=\dfrac{8}{3}$.

题 43 如图 5 - 35，已知$\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，AE 是$\triangle ABC$ 的中线，并且 $AD=AC$.

求证：$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{CM}{DM}$.

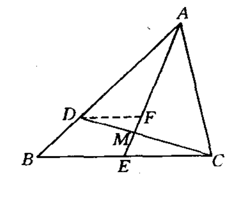


图 5 - 35

证明 过 D 作 $DF /\!/ BC$ 交 AE 于 F.

$\therefore \triangle ADF \backsim \triangle ABE$. $\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BE}{DF}$.

又$\because AD=AC$，$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{DF}$.

$\because BE=EC$，$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{CE}{DF}$.


又$\because \triangle DFM \backsim \triangle CEM$. $\therefore \dfrac{CM}{DM}=\dfrac{CE}{DF}$.

$\therefore \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{CM}{DM}$.

题 44 如图 5 - 36，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AD\perp BC$ 于 D，E 为 AC 中点.

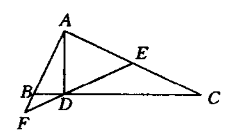


图 5 - 36

求证：$AB \cdot AF = AC \cdot DF$.

证明 在 Rt$\triangle ABC$ 中，

$\because AE = EC$，$\therefore DE = EC$，$\angle EDC = \angle C$.

又 $\angle C = \angle BAD$，$\therefore \angle BDF = \angle FAD$.

又 $\angle F = \angle F$，$\therefore \triangle AFD \backsim \triangle DFB$.

$\therefore \dfrac{DF}{AF} = \dfrac{BD}{AD}$.

又 $\because AD \perp BC$，$\triangle ABD \backsim \triangle CBA$，

$\therefore \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$. $\therefore \dfrac{DF}{AF} = \dfrac{AB}{AC}$.

$\therefore AB \cdot AF = AC \cdot DF$.



题 已知：如图 5 - 37，BE 是等腰三角形 ABC 的角平分线，$\angle C = 90°$，延长 BC 到 D，使 $CD = CE$，连结 AD 与 BE 的延长线交于 F.

求证：$AE \cdot AC = 2AF^2$.

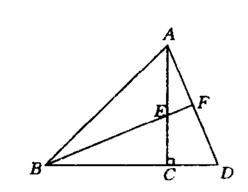


图 5 - 37

证明 $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，$\angle C = 90°$，

$\therefore AC = BC$，$\angle ACD = \angle BCE = 90°$.

又 $\because CD = CE$，$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE$，

$\therefore \angle CAD = \angle CBE$.

又 $\because \angle BEC = \angle AEF$，

$\therefore \angle AFB = \angle BCE = 90°$.

$\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$.

在 Rt$\triangle DBF$ 和 Rt$\triangle ABF$ 中，

$\angle D = 90° - \angle FBD$，$\angle BAF = 90° - \angle ABF$，

$\therefore \angle D = \angle BAF$，$\therefore AB = DB$，$\triangle ABD$ 是等腰三角形.

$\because BF \perp AD$，$\therefore AF = DF$，$AD = 2AF$.

在 Rt$\triangle AEF$ 和 Rt$\triangle ADC$ 中，$\angle EAF = \angle DAC$，

$\therefore$ Rt$\triangle AEF \backsim$ Rt$\triangle ADC$，

$\therefore \dfrac{AE}{AF} = \dfrac{AD}{AC}$，即 $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{2AF}{AC}$，

$\therefore AE \cdot AC = 2AF^2$.

题 已知：如图 5 - 38，$\triangle ABC$ 中，M 为 BC 边的中点，O 为 AM 上一点，BO 交 AC 于 E，CO 交 AB 于 D，$PQ /\!/ BC$ 且 PQ 过 O 与 AB、AC 分别交于点 P 和 Q.

求证：(1) $PO = OQ$；

(2) $DE /\!/ BC$.

证明 (1) 在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACM$ 中，

$\because PQ /\!/ BC$，$\therefore \dfrac{PO}{BM}=\dfrac{AO}{AM}=\dfrac{OQ}{MC}$.

$\because M$ 为 BC 的中点，$\therefore BM=MC$，$PO=OQ$.

(2)在$\triangle BCD$ 与$\triangle BCE$ 中，

$\because PQ /\!/ BC$，$\therefore \dfrac{DO}{DC}=\dfrac{PO}{BC}$，$\dfrac{EQ}{EC}=\dfrac{OQ}{BC}$，

$\because PO=OQ$，$\therefore \dfrac{DO}{DC}=\dfrac{EQ}{EC}$.

在$\triangle CDE$ 中，$\because \dfrac{DO}{DC}=\dfrac{EQ}{EC}$，$\therefore DE /\!/ OQ$.

$\because OQ /\!/ BC$，$\therefore DE /\!/ BC$.

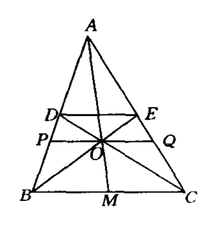


图 5 - 38

题 17 如图 5 - 39，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，M 为 AC 中点，$MD\perp BC$ 于 D.

求证：$AB^2=BD^2-CD^2$.

证明 作 $AE\perp BC$ 于 E. $\therefore AE /\!/ DM$.

又$\because AM=MC$，$\therefore DE=DC$.

$\therefore BD-CD=BD-DE=BE$，

$BD+CD=BC$.

$\therefore BD^2-CD^2=(BD-CD)(BD+CD)=BE\cdot BC$.

又 $AE\perp BC$，$\angle BAC=90°$，

$\therefore AB^2=BE\cdot BC$.

$\therefore AB^2=BD^2-CD^2$.

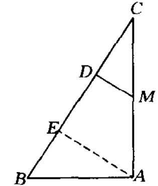
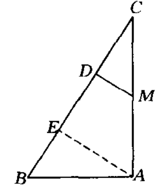



图 5 - 39

题 48 如图 5 - 40，在$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，AD、BE 分别是$\triangle ABC$ 角平分线和高，$A'D'$和 $B'E'$分别是$\triangle A'B'C'$的角平分线和高，且$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BE}{B'E'}$.

求证：$\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{A'D'}{B'E'}$.

证明 $\because \dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{BE}{B'E'}$，$\angle BEC=\angle B'E'C=90°$，

$\therefore \triangle BEC\backsim\triangle B'E'C'$. $\therefore \angle C=\angle C'$.

又$\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

$\therefore \dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{BE}{B'E'}$，

即$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{BE}{B'E'}$. $\therefore \dfrac{AD}{BE}=\dfrac{A'D'}{B'E'}$.

图 5 - 40

题 49 如图 5 - 41，AE、AF 分别为$\triangle ABC$ 的内外角平分线，O 为 EF 的中点.

求证：$OB:OC=AB^2:AC^2$.

证明 $\because AE$、AF 为$\triangle ABC$ 的内外角平分线，

$\therefore AE\perp AF$.

又∵O 为 EF 的中点，∴$\angle OEA=\angle OAE$.

∵$\angle OAE=\angle CAE+\angle OAC$，

$\angle OEA=\angle B+\angle BAE$，

而$\angle BAE=\angle CAE$，∴$\angle OAC=\angle B$.

∵$\angle AOB$ 为公共角，∴$\triangle OAC\backsim\triangle OBA$.

∴$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OCA}=AB^2:AC^2$.

又∵$\triangle OAB$ 与$\triangle OCA$ 有一公共边 OA，

∴$S_{\triangle OAB}:S_{\triangle OCA}=OB:OC$.

∴$OB:OC=AB^2:AC^2$.

图 5 - 41

题50 已知：如图 5 - 42，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，AD 为 BC 边上的中线，E 为 AD 的中点，CE 的延长线交 AB 于 F，$FG/\!/AC$ 交 AD 于 G.

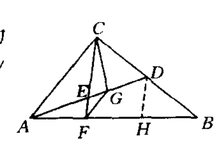


图 5 - 42

求证：$FB=2CG$.

证明 过 D 作 $DH/\!/CF$ 交 AB 于 H.

∵E 为 AD 的中点，∴$AF=FH$.

∵D 为 CB 的中点，∴$FH=HB$，∴$FB=2AF$.

E 是 Rt$\triangle ACD$ 斜边 AD 的中点，∴$CE=AE$.

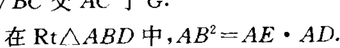
∵$FG/\!/AC$，∴$\triangle AEF\cong\triangle CEG$，

∴$AF=CG$，∴$FB=2AF=2CG$.

题51 如图 5 - 43，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle BAC$ 的平分线与边 BC 相交于 D.

求证：$\dfrac{AB^2}{AD^2}=\dfrac{BC}{2CD}$.

证明 从 B 作 AD 的垂线与 AD、AC 分别相交于 E、F，过 E 作 $EG/\!/BC$ 交 AC 于 G.



在 Rt$\triangle ABD$ 中，$AB^2=AE\cdot AD$.

又易证$\triangle ABE\cong\triangle AFE$，∴$E$ 为 BF 中点.

∵$EG/\!/BC$，∴$BC=2EG$.

图 5 - 43

∴$\dfrac{AB^2}{AD^2}=\dfrac{AE\cdot AD}{AD^2}=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{EG}{CD}=\dfrac{2EG}{2CD}$.

∴$\dfrac{AB^2}{AD^2}=\dfrac{BC}{2CD}$.

题52 已知：如图 5 - 44，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，AD 是中线，P 是 AD 上一点，过 C 作 $CF/\!/AB$，延长 BP 交 AC 于 E，交 CF 于 F.

求证：$BP^2=PE\cdot PF$.

证明 连结 PC.

∵$AB=AC$，AD 是 BC 边的中线，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

又$\because AP=AP$，$\therefore \triangle ABP\cong\triangle ACP$.

$\therefore PB=PC$，$\angle ABP=\angle ACP$.

$\because CF/\!/AB$，$\angle ABP=\angle F$，$\therefore \angle PCE=\angle F$.

又$\angle CPF=\angle EPC$，$\therefore \triangle PCE\backsim\triangle PFC$.

$\therefore \dfrac{PE}{PC}=\dfrac{PC}{PF}$，$\therefore PC^2=PE\cdot PF$，$\therefore PB^2=PE\cdot PF$.

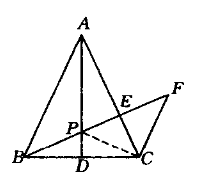


图 5 - 44

题 53 如图 5 - 45，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，设$BD\perp AC$，$CE\perp BC$，BD的延长线与CE相交于E.

求证：$\dfrac{AD}{DE}=\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^3$.

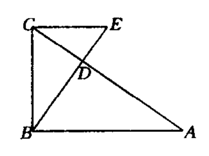


图 5 - 45

证明 $\because \triangle ADB\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AB}{BC}$.

$\because \triangle BDC\backsim\triangle ABC$，$\therefore \dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{BC}$.

$\because \triangle CDE\backsim\triangle ABC$，$\therefore \dfrac{DC}{DE}=\dfrac{AB}{BC}$.

三式相乘有$\dfrac{AD}{DE}=\left(\dfrac{AB}{BC}\right)^3$.

题 54 如图 5 - 46，在$\triangle ABC$中，$\angle A$的平分线交BC于点D.

求证：$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$.

证明 过点D作DE，使$\angle ADE=\angle B$，交AC于E. 设$AB=c$，$AC=b$，$AD=a$，$AE=x$，$EC=y$，则

$BD=kc$，$DC=kb(k>0)$.

$\because \angle BAD=\angle DAE$，$\angle B=\angle ADE$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ADE$.

$\therefore \dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AD}$. 即 $a^2=c\cdot x$.

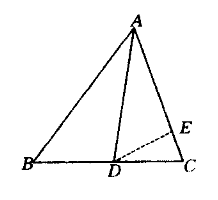


图 5 - 46

$\because \angle ADC=\angle B+\angle BAD$，

$\therefore \angle BAD=\angle EDC=\angle DAE$.

又$\angle C=\angle C$，$\therefore \triangle CDA\backsim\triangle CED$.

$\therefore \dfrac{y}{kb}=\dfrac{kb}{b}=k$.

$\therefore y=bk^2$. $\therefore cy=bck^2=bk\cdot ck$.

$\because a^2+kb\cdot ck=cx+cy=c(x+y)=cb$.

$\therefore a^2=bc-kb\cdot kc$.

$\therefore AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$.

题55 已知：如图 5-47，正方形 $ABCD$ 的边 AD 上一点 P，且 $AP=\frac{1}{4}AD$，M 为 AB 的中点，过点 M 作 PC 的垂线 ME，垂足为 E.

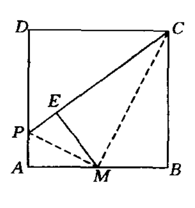


图 5-47

求证：$ME^2=PE\cdot EC$.

证明 连结 MP、MC.

$\because AP=\frac{1}{4}AD=\frac{1}{4}AB$，

$AM=BM=\frac{1}{2}AB$，$BC=AB$，

$\therefore \frac{AP}{BM}=\frac{AM}{BC}=\frac{1}{2}$. 又$\angle A=\angle B=90°$，

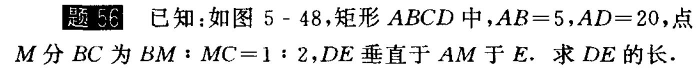
$\therefore \triangle APM\backsim\triangle BMC$.

$\therefore \angle AMP=\angle BCM$.

又$\because \angle BCM+\angle BMC=90°$，

$\therefore \angle AMP+\angle BMC=90°$.　$\therefore PM\perp MC$.

$\because ME\perp PC$，$\therefore ME^2=PE\cdot EC$.



题56 已知：如图 5-48，矩形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=20$，点 M 分 BC 为 $BM:MC=1:2$，DE 垂直于 AM 于 E. 求 DE 的长.

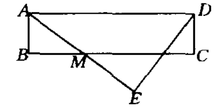


图 5-48

解 $\because ABCD$ 是矩形，$\therefore AD/\!/BC$，

$\angle DAE=\angle AMB$，

又$\angle B=\angle E=90°$，

$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle DEA$，$\therefore \frac{AB}{DE}=\frac{AM}{AD}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABM$ 中，

$\because AB=5$，$BM=\frac{20}{3}$，$\therefore AM=\sqrt{5^2+(\frac{20}{3})^2}=\frac{25}{3}$，

$\therefore \frac{5}{DE}=\frac{\frac{25}{3}}{20}$，$\therefore DE=12$.

题57 如图 5-49，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90°$，$AD\perp BC$ 于 D. P 为 AD 中点，延长 BP 交 AC 于点 E，$EF\perp BC$ 于 F.

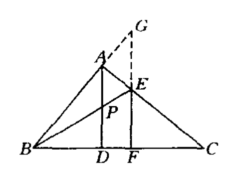


图 5-49

求证：$EF^2=AE\cdot EC$.

证明 延长 BA、FE，相交于 G.

$\because AD/\!/FG$，$\therefore \frac{AP}{EG}=\frac{BP}{BE}=\frac{PD}{EF}$.

又$\because AP=PD$，$\therefore EF=EG$.

又易证$\triangle AEG\backsim\triangle FEC$，

$\therefore \frac{AE}{EF}=\frac{EG}{EC}$. $\therefore AE\cdot EC=EF\cdot EG$.

即 $EF^2=AE\cdot EC$.

题 58 如图 5 - 50，$\square ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 相交于 O，且 $\angle AOB=\angle ABC$.

求证：$AC^2=2AB^2$，$BD^2=2AD^2$.

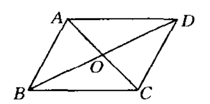


图 5 - 50

证明 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle ABC$ 中，

$\because \angle AOB=\angle ABC$，$\angle OAB=\angle BAC$，

$\therefore \triangle AOB\backsim\triangle ABC$.

$\therefore AO:AB=AB:AC$.

$\because AO=\dfrac{1}{2}AC$，$\therefore \dfrac{1}{2}AC:AB=AB:AC$.

$\therefore AC^2=2AB^2$.

同理可证，$\triangle AOD\backsim\triangle BAD$，$OD:AD=AD:BD$.

$\therefore \dfrac{1}{2}BD:AD=AD:DB$. $\therefore BD^2=2AD^2$.

题 59 如图 5 - 51，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，正方形 $DEFG$ 的一边 DE 在 AC 上，点 G、F 分别在 AB 和 BC 上.

求证：$DE^2=AD\cdot CE$.

图 5 - 51

证明 $\because \angle AGD=90°-\angle A=\angle C$，

$\therefore \text{Rt}\triangle AGD\backsim\text{Rt}\triangle FCE$. $\therefore \dfrac{GD}{AD}=\dfrac{CE}{FE}$.

$\therefore GD\cdot EF=AD\cdot CE$.

又 $\because GD=EF=DE$，$\therefore DE^2=AD\cdot CE$.

题 60 已知：如图 5 - 52，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C=2\angle A$.

求证：$AB^2=BC^2+AB\cdot BC$.

证明 延长 BC 至点 D，使 $CD=AB$，连结 AD.

$\because \angle B=\angle ACB$，$\therefore AB=AC$.

又 $\because AB=CD$，$\therefore AC=CD$.

$\therefore \angle D=\dfrac{1}{2}\angle ACB=\angle BAC$.

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DBA$. $\therefore \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BC}{AB}$.

$\therefore AB^2=BC\cdot BD=BC(BC+CD)$

$=BC(BC+AB)=BC^2+AB\cdot BC$.

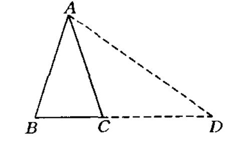


图 5 - 52

题 61 已知：如图 5 - 53，在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AB=CD$.

求证：$AC^2=AB^2+AD\cdot BC$.

证明 作 DE，使 $\angle ADE=\angle BAC$，且交 AC 于点 E.

$\because \angle DAE=\angle ACB$，

$\therefore \triangle DAE\backsim\triangle ACB$.

$\therefore \dfrac{BC}{AE}=\dfrac{AC}{AD}, AD \cdot BC = AE \cdot AC.$

$\because \angle DEC = \angle DAE + \angle ADE$

$\quad = \angle BAC + \angle DAE = \angle BAD = \angle ADC.$

$\therefore \triangle CDE \backsim \triangle ADC.$

$\therefore CE \cdot CA = CD^2 = AB^2.$

$\therefore AB^2 + AD \cdot BC = AE \cdot AC + CE \cdot AC = AC \cdot (AE + CE).$

即 $AC^2 = AB^2 + AD \cdot BC.$

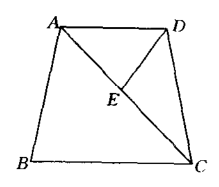


图 5 - 53

题62 已知:如图 5 - 54,$AB /\!/ CD$,$DF=FG$,AF、BG 的延长线相交于 P,连结 DB 交 AP 于 E.

求证:$\dfrac{AP}{PF}=\dfrac{AE}{EF}$.

证明 $\because \triangle DEF \backsim \triangle BEA$,$\therefore \dfrac{AE}{EF}=\dfrac{AB}{DF}$.

又$\because \triangle PFG \backsim \triangle PAB$,$\therefore \dfrac{AP}{PF}=\dfrac{AB}{FG}$,

又$\because DF=FG$,$\therefore \dfrac{AB}{FG}=\dfrac{AB}{DF}$. $\therefore \dfrac{AP}{PF}=\dfrac{AE}{EF}$.

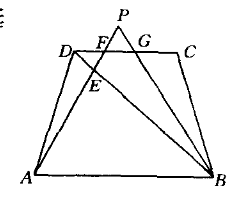


图 5 - 54

题63 如图 5 - 55,AD 为直角三角形 ABC 中斜边 BC 上的高,延长 CB 至 E,使 $\angle EAB=\angle BAD$.

求证:$BD : DC = EA^2 : EC^2$.

证明 $\because \angle BAC = 90°$,$AD \perp BC$,

$\therefore BA^2 = BD \cdot BC, AC^2 = CD \cdot CB.$

$\therefore BD : DC = AB^2 : AC^2.$

又$\because \angle E = \angle E, \angle EAB = \angle BAD = \angle C$,



$\therefore \triangle EAB \backsim \triangle ECA.$ $\therefore AB : AC = AE : EC.$

$\therefore BD : DC = EA^2 : EC^2.$

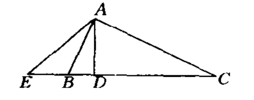


图 5 - 55

题64 已知:如图 5 - 56,在正方形 $ABCD$ 中,E 是 AB 边中点,$\angle CEF=\angle ECD$. EF 交 AD 于 P,交 CD 的延长线于 F.

求证:$S_{\triangle AEP}=4S_{\triangle PDF}$.

证明 作 $FM \perp EC$ 于 M.

$\because \angle CEF = \angle FCE = \angle BEC, \angle FMC = \angle B = 90°$,

$\therefore \triangle BCE \backsim \triangle MFC.$

$\therefore \dfrac{BE}{MC}=\dfrac{CE}{CF}.$

令 $BE=x$,则 $CB=2x$.

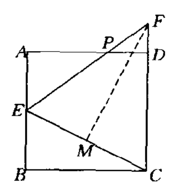


图 5 - 56

$\therefore CE=\sqrt{5}x, CM=\dfrac{\sqrt{5}}{2}x.$

$\therefore \dfrac{x}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}x}=\dfrac{\sqrt{5}x}{CF}. \therefore CF=\dfrac{5}{2}x.$

而 $CD=2x, \therefore FD=\dfrac{1}{2}x. \therefore DF=\dfrac{1}{2}AE.$

又$\triangle APE \backsim \triangle DPF, \therefore \dfrac{S_{\triangle PDF}}{S_{\triangle PAE}}=\left(\dfrac{DF}{AE}\right)^2.$

$S_{\triangle AEP}=4S_{\triangle PDF}.$

题65 如图 5 - 57,在正方形 $ABCD$ 中,$BM=BN$,$BP\perp MC$ 于 P.

求证:$PN\perp PD$.

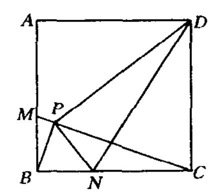


图 5 - 57

证明 $\because MB\perp BC, PB\perp MC,$

$\therefore \triangle PBM \backsim \triangle BCM \backsim \triangle PCB.$

$\therefore BM : BC=PB : PC.$

又$\because BM=BN, BC=CD,$

$\therefore BN : CD=BP : PC.$

又$\angle PCD=\angle PMB=\angle PBC,$

$\therefore \triangle PBN \backsim \triangle PCD.$

$\therefore \angle BPN=\angle CPD. \therefore \angle BPC=\angle NPD=90°.$

$\therefore PN\perp PD.$

题66 已知:如图 5 - 58,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,D 是 BC 中点,$DF\perp AC$ 于 F,E 是 DF 中点.

求证:$AE\perp BF$.

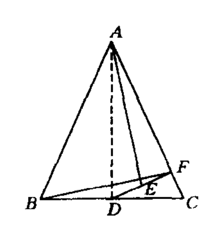


图 5 - 58

证明 连结 AD,$\therefore AD\perp BC$.

又 $DF\perp AC, \therefore \triangle ADF \backsim \triangle DCF.$

$\therefore AD : DC=DF : CF.$

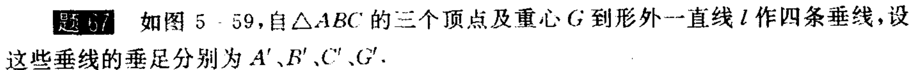
$\therefore AD : 2DC=\dfrac{1}{2}DF : CF.$

即 $AD : BC=DE : CF.$

又$\because \angle ADE=\angle C,$

$\therefore \triangle ADE \backsim \triangle BCF. \therefore \angle DAE=\angle FBC.$

$\therefore BF\perp AE.$



题67 如图 5 - 59,自$\triangle ABC$ 的三个顶点及重心 G 到形外一直线 l 作四条垂线,设这些垂线的垂足分别为 A'、B'、C'、G'.

求证:$AA'+BB'+CC'=3GG'$.

证明 取 BG 中点为 E，作 $DD'\perp l$，$EE'\perp l$，垂足为 D'、E'.

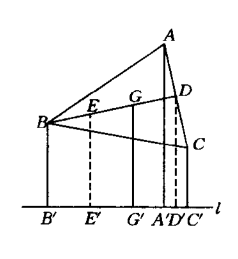


图 5-59

$\therefore BE=EG=GD$.

$\therefore EE'=\frac{1}{2}(BB'+GG')$,

$GG'=\frac{1}{2}(EE'+DD')$,

$DD'=\frac{1}{2}(AA'+CC')$,

$\therefore GG'=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(BB'+GG')+\frac{1}{2}(AA'+CC')]$.

$\therefore AA'+BB'+CC'=3GG'$.

题68 已知：如图 5-60，矩形 $ABCD$ 中，$CH\perp BD$ 于点 H，P 为 AD 上的一个动点（点 P 与点 A、D 不重合），CP 与 BD 交于点 E，若 $CH=\frac{60}{13}$，$DH:CD=5:13$，设 $AP=x$，四边形 $ABEP$ 的面积为 y.

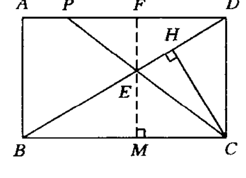


图 5-60

(1)求 BD 的长；

(2)求 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

(3)当四边形 $ABEP$ 的面积是 $\triangle PED$ 面积的 5 倍时，连结 PB，判断 $\triangle PAB$ 与 $\triangle PDC$ 是否相似？如果相似，求出相似比；如果不相似，请说明理由.

解 (1)$\because DH:CD=5:13$,

$\therefore$ 设 $DH=5k(k>0)$，则 $CD=13k$.

$\because CH\perp BD$ 于点 H,

在 $Rt\triangle CHD$ 中，$CH^2+DH^2=CD^2$,

$\therefore CH=\sqrt{CD^2-DH^2}=\sqrt{(13k)^2-(5k)^2}=12k$.

$\because CH=\frac{60}{13}$，$\therefore 12k=\frac{60}{13}$，$k=\frac{5}{13}$.

$\therefore DC=5$，$DH=\frac{25}{13}$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle BCD=90°$，$\therefore DC^2=DH\cdot BD$，$\therefore BD=\frac{DC^2}{DH}=13$.

(2)在 $Rt\triangle BCD$ 中，根据勾股定理，$BC=\sqrt{BD^2-DC^2}=12$,

$\therefore AD=12$，$\because AP=x$，$\therefore PD=12-x$.

过 E 点作 $EF\perp AD$ 于点 F，延长 FE 交 BC 于点 M，则 $EM\perp BC$.

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \triangle EDP\backsim\triangle EBC$，$\therefore \frac{EF}{EM}=\frac{PD}{CB}$.

$\because EF+EM=5$,$\therefore EM=5-EF$,$\therefore \dfrac{EF}{5-EF}=\dfrac{12-x}{12}$,$EF=\dfrac{5(12-x)}{24-x}$.

$\therefore S_{\triangle PED}=\dfrac{1}{2}(12-x)\cdot\dfrac{5(12-x)}{24-x}=\dfrac{5(12-x)^2}{2(24-x)}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD=\dfrac{5\times12}{2}=30$.

又$\because S_{四边形ABEP}=S_{\triangle ABD}-S_{\triangle PED}$,

$\therefore y=30-\dfrac{5(12-x)^2}{2(24-x)}$,$0<x<12$.

(3)$\because S_{四边形ABEP}=5S_{\triangle PED}$,

$\therefore S_{四边形ABEP}=\dfrac{5}{6}S_{\triangle ABD}=25$.

$\therefore 30-\dfrac{5(12-x)^2}{2(24-x)}=25$,整理,得 $x^2-22x+96=0$,解得 $x_1=6$,$x_2=16$.

经检验 $x_1=6$,$x_2=16$ 是原方程的根,但 $x_2=16$ 不合题意,舍去.

$\therefore x=6$,$\therefore AP=6$.

当 $AP=6$ 时,P 为 AD 的中点,连结 PB,则$\triangle PAB\cong\triangle PDC$.

$\therefore\triangle PAB$ 与$\triangle PDC$ 相似,相似比为 1.

题 69 已知:如图 5-61,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=6$cm,$BC=8$cm,⊙O 是以 BC 为直径的圆,点 P 在 AD 边上运动(不到 A、D 两点),BP 交⊙O 于点 Q,连结 CQ. 解答下列各问:

(1)设线段 BP 的长为 x(cm),CQ 的长为 y(cm). 求 y 关于 x 的函数关系式和自变量 x 的取值范围;

(2)求当$\dfrac{CQ}{BP}=\dfrac{6}{5}$时,$\triangle BQC$ 与$\triangle PAB$ 的面积比和 AP 的长.

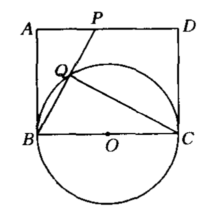


图 5-61

解 (1)$\because\angle A=\angle ABC=90°$,

又$\because BC$ 为直径,$\angle BQC=90°$,

$\therefore\angle BCQ=\angle PBA$,$\therefore\triangle PBA\backsim\triangle BCQ$.

$\therefore\dfrac{CQ}{AB}=\dfrac{BC}{BP}$,即$\dfrac{y}{6}=\dfrac{8}{x}$,$\therefore y=\dfrac{48}{x}$.

连结 BD,则 $BD=\sqrt{6^2+8^2}=10$,

$\therefore$自变量 x 的取值范围是 $6<x<10$.

(2)$\because\dfrac{CQ}{BP}=\dfrac{6}{5}$,$\therefore CQ=\dfrac{6}{5}BP$.

$\because CQ=\dfrac{48}{BP}$,$\therefore BP^2=40$.

又$\because\triangle PAB\backsim\triangle BQC$,

$\therefore\dfrac{S_{\triangle BQC}}{S_{\triangle PAB}}=\dfrac{BC^2}{BP^2}=\dfrac{64}{40}=\dfrac{8}{5}$.

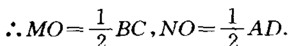
$AP=\sqrt{BP^2-AB^2}=\sqrt{40-36}=2$.

题 70 已知：如图 5－62，在平面直角坐标系 xOy 中，等腰梯形 $ABCD$，$AD/\!/BC$，梯形中位线 MN 在 x 轴上，MN、AC 交于原点 O，CA 平分 $\angle BCD$，对角线 BD 交 MN 于 G 点，$MO=6$，$ON=4$.

(1)求 OG 的长；

(2)设 AC、BD 交于 E 点，求 E 点的坐标.

解 (1)由已知条件可得 MO、ON 分别为$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 的中位线，



$\therefore MO=\dfrac{1}{2}BC$，$NO=\dfrac{1}{2}AD$.

$\therefore BC=2MO=12$，$AD=2NO=8$.

又 MG 也是$\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore MG=\dfrac{1}{2}AD=4$，

$\therefore OG=MO-MG=6-4=2$.

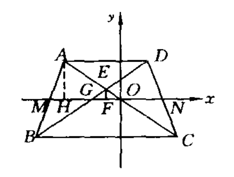


图 5－62

(2)作 $AH\perp MN$ 于 H，作 $EF\perp MN$ 于 F，

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \angle DAC=\angle ACB$.

$\therefore \angle DAC=\angle DCA$，$\therefore CD=AD=8$，$\therefore AB=8$.

易得 $AM=\dfrac{1}{2}AB=4$，$MH=\dfrac{10-8}{2}=1$，

$\therefore AH=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$，$HO=MO-MH=6-1=5$.

易证$\triangle EOG$ 是等腰三角形，

$\therefore F$ 是 GO 边的中点，

$FO=\dfrac{1}{2}GO=1$.

$\because EF/\!/AH$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OEF\backsim \mathrm{Rt}\triangle OAH$，

$\therefore \dfrac{EF}{AH}=\dfrac{OF}{OH}$，$EF=\dfrac{1}{5}\sqrt{15}$，

$\therefore E(-1,\dfrac{\sqrt{15}}{5})$.

题 71 已知：矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，点 M 在对角线 AC 上，$AM=\dfrac{1}{4}AC$，直线 l 过点 M 且与 AC 垂直，与边 AD 相交于点 E.

(1)如果 $AD=\sqrt{3}$，求证：点 B 在直线 l 上，如图 5－63(1).

(2)如果直线 l 与边 BC 相交于点 H，如图 5－63(2)，直线 l 把矩线分成的两部分的面积之比为 2∶7，求 AD 的长.

(3)如果直线 l 分别与边 AD、边 AB 相交于点 E、G，

(i)设 AD 的长为 x，指出 x 的取值范围；

(ii)当直线 l 把矩形分成的两部分的面积之比为1∶6时，AE 的长是多少？

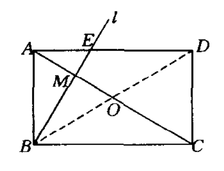


图 5 - 63(1)

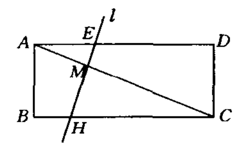


图 5 - 63(2)

解 (1)连结 BD,交 AC 于点 O.

由矩形 $ABCD$,得 $OA=\frac{1}{2}AC$,

$\because AM=\frac{1}{4}AC$,$\therefore AM=MO$.

又直线 l 过 M 且与 AC 垂直,得直线 l 是线段 OA 的垂直平分线.

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中,$AB=1$,$AD=\sqrt{3}$,

$\therefore BD=2$,$OB=\frac{1}{2}BD=1$.

又 $AB=1$,得 $AB=OB$,$\therefore$点 B 在直线 l 上.

(2)设 $AD=a$,则 $AC=\sqrt{1+a^2}$.

由$\angle EAM=\angle CAD$,$\angle AME=\angle D=90°$,

得$\triangle AEM\backsim\triangle ACD$,$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{AM}{AD}$.

又 $AM=\frac{1}{4}AC=\frac{1}{4}\sqrt{1+a^2}$,$\therefore AE=\frac{AC\cdot AM}{AD}=\frac{1+a^2}{4a}$.

由 $AE/\!/HC$,,得$\triangle AEM\backsim\triangle CHM$,

$\therefore \frac{AE}{HC}=\frac{AM}{MC}=\frac{1}{3}$,$HC=3AE$.

$BH=BC-HC=a-\frac{3(1+a^2)}{4a}=\frac{a^2-3}{4a}$.

$\therefore S_{梯形ABHE}=\frac{1}{2}(AE+BH)\cdot AB=\frac{a^2-1}{4a}$.

$\because S_{梯形ABHE}:S_{梯形EHCD}=2:7$,

得 $S_{梯形ABHE}=\frac{2}{9}S_{矩形ABCD}=\frac{2}{9}a$,

$\therefore \frac{a^2-1}{4a}=\frac{2}{9}a$,解得 $a=3$,$\therefore AD=3$.

(3)(i)若 G 与 B 重合,如图 5 - 63(3),$AD=\sqrt{3}$,即 $x=\sqrt{3}$.

若 E 与 D 重合,$AC=\sqrt{1+x^2}$,

$AE^2=AM\cdot AC$,

$x^2=\frac{\sqrt{1+x^2}}{4}\cdot\sqrt{1+x^2}$，$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则$\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.

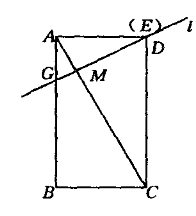


图 5 - 63(3)

(ii)如图 5 - 63(4)，设 l 分别交 AD、AC、AB 于 E、M、G 三点，则有

$\triangle AEG\backsim\triangle DCA$，$\therefore\frac{AG}{AD}=\frac{AE}{DC}$.

$\because DC=1$，$\therefore\frac{AG}{AD}=AE$.　　①

$\because S_{\triangle AEG}=\frac{1}{2}AE\cdot AG$，

$\frac{S_{\triangle AEG}}{S_{多边形EGBCD}}=\frac{1}{6}$，$\therefore\frac{S_{\triangle AEG}}{S_{矩形ABCD}}=\frac{1}{7}$，

即$\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AG}{AD\cdot DC}=\frac{1}{7}$，$\therefore\frac{AE\cdot AG}{AD}=\frac{2}{7}$　　②

由①、②得 $AE^2=\frac{2}{7}$，$\therefore AE=\frac{\sqrt{14}}{7}$.

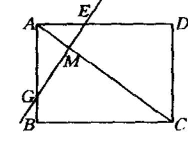


图 5 - 63(4)

题 72　已知：如图 5 - 64，$\triangle ABC$ 中，D 在 BC 上，E 在 AB 上，且$\angle 1=\angle 2=\angle 3$，如果$\triangle ABC$、$\triangle EBD$、$\triangle ADC$ 的周长依次为 m、m_1、m_2，$BD=6$，$DC=2$，求：$\frac{m_1+m_2}{m}$的值.

解　$\because\angle 2=\angle 3$，$\therefore DE/\!/CA$.

$\therefore\triangle BED\backsim\triangle BAC$.

$\because BD=6$，$DC=2$，

$\therefore\frac{m_1}{m}=\frac{BD}{BC}=\frac{3}{4}$.

$\because\angle C=\angle C$，$\angle 2=\angle 1$，$\therefore\triangle CAD\backsim\triangle CBA$.

$\therefore\frac{AC}{CD}=\frac{CB}{AC}$.

$\therefore AC^2=CD\cdot CB=2\times 8=16$.

$\therefore AC=4$. $\frac{m_2}{m}=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\frac{m_1+m_2}{m}=\frac{5}{4}$.

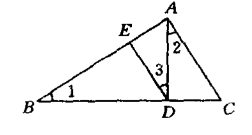


图 5 - 64

题 73　如图 5 - 65，在$\triangle ABC$ 中，底边 BC 上的两点 E、F 把 BC 三等分，BM 是 AC 上的中线，AE、AF 分别交 BM 于 G、H 两点.

求证：$BG:GH:HM=5:3:2$.

证明　过 C 点作 $CH'/\!/AH$，交 BM 的延长线于 H'.

易证 $CH'=AH$，$HM=MH'$.

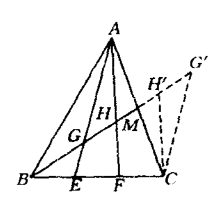


图 5 - 65

过 C 作 $CG' /\!/ AE$ 交 BM 延长线于 G'，可得 G'，则 $GH=H'G'$.

不妨设 $BG=x, GH=y, HM=z$，则

$MH'=z, H'G'=y$.

由平行线分线段成比例定理，得

$\frac{x}{2y+2z}=\frac{1}{2}, \frac{x+y}{2z}=\frac{2}{1}$.

$\therefore x=y+z, x=-y+4z$.

$\therefore x=\frac{5}{2}z, y=\frac{3}{2}z$.

$\therefore BG : GH : HM=\frac{5}{2}z : \frac{3}{2}z : \frac{2}{2}z$.

$\therefore BG : GH : HM=5 : 3 : 2$.

题 74 如图 5 - 66，四边形 $ABCD$ 中，AC、BD 相交于 O，过 O 作 AB 的平行线，分别交 AD、BC 及 DC 的延长线于 E、F、G.

求证：$GO^2=GE \cdot GF$.

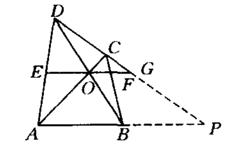


图 5 - 66

证明 延长 AB、DG 交于 P.

$\because EG /\!/ AP$，$\therefore \frac{EG}{OG}=\frac{AP}{BP}$.

$\because OG /\!/ AP$，$\therefore \frac{OG}{FG}=\frac{AP}{BP}$.

$\therefore \frac{EG}{OG}=\frac{OG}{FG}$.

$\therefore OG^2=EG \cdot FG$.

题 75 如图 5 - 67，在任意 $\triangle ABC$ 的外部作 $\triangle BPC$、$\triangle CQA$ 和 $\triangle ARB$，使 $\angle PBC=\angle CAQ=45°$，$\angle BCP=\angle QCA=30°$，$\angle ABR=\angle BAR=15°$.

求证：(1) $\angle QRP=90°$；(2) $RP=RQ$.

证明 在 BA 边上向 $\triangle ABC$ 形外作正 $\triangle BAS$，连结 RS、CS.

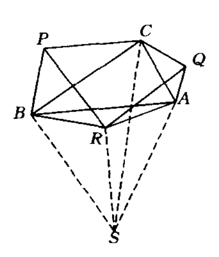


图 5 - 67

$\because \angle SBR=60°-15°=45°$，$\angle BSR=30°$，

$\therefore \triangle CBP \backsim \triangle SBR$.

$\therefore \frac{BS}{BC}=\frac{BR}{BP}$，即 $\frac{BS}{BR}=\frac{BC}{BP}$.

又 $\angle CBS=\angle PBR$，

$\therefore \triangle CBS \backsim \triangle PBR$. $\therefore \angle CSB=\angle PRB$.

$\therefore \frac{BR}{PR}=\frac{BS}{CS}$.

同理，由 $\triangle CAQ \backsim \triangle SAR$，$\therefore \angle CSA=\angle QRA$.

$\therefore \frac{AR}{QR}=\frac{AS}{CS}$.

$\because BS=AS, BR=AR$，

$\therefore PR=RQ.$

$\because \angle BRA=180^\circ-15^\circ-15^\circ=150^\circ,$

$\therefore \angle PRQ=150^\circ-(\angle PRB+\angle QRA)$

$=150^\circ-(\angle CSB+\angle CSA)=150^\circ-60^\circ=90^\circ.$

题 76 已知：如图 5 - 68，设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，$\angle A=90^\circ$.

求证：$BG^2+GC^2=5GA^2$.

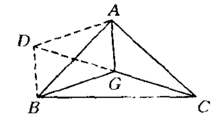


图 5 - 68

证明 沿长 CG 至 D，使 $CG=DG$.

∴四边形 $ADBG$ 是平行四边形.

$\therefore AB^2+DG^2=2(GA^2+GB^2)$

即 $AB^2+GC^2=2(GA^2+GB^2)$.

同理可证 $BC^2+GA^2=2(GB^2+GC^2)$，

$CA^2+GB^2=2(GC^2+GA^2)$.

$\therefore AB^2+AC^2+BC^2=3(GA^2+GB^2+GC^2)$.

$\because BC^2=AB^2+AC^2, BC=2\cdot\frac{3}{2}GA=3GA,$

$\therefore 3(GA^2+GB^2+GC^2)=2BC^2=2(3GA)^2=18GA^2.$

$\therefore GB^2+GC^2=5GA^2.$

题 77 已知：如图 5 - 69，O 是平行四边形 $ABCD$ 内的任意一点，过 O 点作 $EF /\!/ AB$，分别交 AD、BC 于 E、F；又过 O 点作 $GH /\!/ BC$，分别交 AB、CD 于 G、H；连结 BE，交 GH 于 P；连结 DG，交 EF 于 Q，若 $OP=OQ$，则▱$ABCD$ 是菱形.

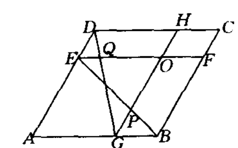


图 5 - 69

证明 $\because OP /\!/ BC$，$\therefore \triangle EOP \backsim \triangle EFB$.

$OP : FB=EO : EF$.

$\because EF /\!/ AB$，∴$ABFE$、$OGBF$ 为平行四边形.

$\therefore EF=AB, FB=OG.$

$\therefore \frac{OP}{OG}=\frac{OE}{AB}, OP\cdot AB=OE\cdot OG.$

同理可证 $OQ\cdot BC=OG\cdot OE$.

又 $\because OP=OQ$，$\therefore AB=BC$.

∴▱$ABCD$ 是菱形.

题 78 如图 5 - 70，在矩形 $ABCD$ 中，点 M 是 AD 的中点，N 是 BC 的中点，P 是 CD 的延长线上的一点，PM 交 AC 于 Q.

求证：$\angle QNM=\angle MNP$.

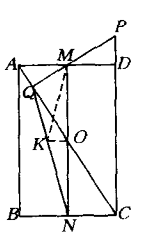


图 5 - 70

证明 过矩形 $ABCD$ 的中心 O 作 BC 的平行线交 QN 于点 K，连结 MK.

$\because MO /\!/ PC$，$\therefore \frac{QM}{MP}=\frac{QO}{OC}$.

$\because KO /\!/ NC$，$\therefore \dfrac{QO}{OC}=\dfrac{QK}{KN}$.

$\therefore \dfrac{QM}{MP}=\dfrac{QK}{KN}$. $\therefore MK /\!/ PN$.

$\therefore \angle MNP=\angle KMN$.

$\because \triangle KMN$ 是等腰三角形，$\therefore \angle KMN=\angle QNM$.

$\therefore \angle QNM=\angle MNP$.

题 79 如图 5 - 71 中，四边形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$（$AD<BC$），AC、BD 相交于 M，$EF /\!/ AD$，且过 M，EC 和 FB 相交于 N，$GH /\!/ AD$，且过 N.

求证：$\dfrac{1}{AD}+\dfrac{2}{BC}=\dfrac{1}{EF}+\dfrac{2}{GH}$.

图 5 - 71

证明 $\because EF /\!/ AD$，$\therefore \dfrac{EM}{AD}=\dfrac{BE}{BA}$.

$\because EF /\!/ BC$，$\therefore \dfrac{EM}{BC}=\dfrac{AE}{AB}$.

$\therefore \dfrac{AE+BE}{AB}=\dfrac{EM}{AD}+\dfrac{EM}{BC}$.

$\because AE+BE=AB$，

$\therefore \dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{EM}$. 同理可证 $\dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{MF}$.

$\therefore EM=FM$. $\therefore EF=2EM$. $\therefore \dfrac{1}{AD}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{2}{EF}$.

同理对梯形 $BCEF$，有

$\dfrac{1}{EF}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{2}{GH}$. $\therefore \dfrac{1}{AD}+\dfrac{2}{BC}=\dfrac{1}{EF}+\dfrac{2}{GH}$.

题 80 如图 5 - 72，锐角$\triangle ABC$ 的垂心为 H，在线段 HB 和 HC 上各取一点 B_1 与 C_1，使$\angle AB_1C=\angle AC_1B=90°$.

求证：$AB_1=AC_1$.

证明 设 BH 交 AC 于 B_2，CH 交 AB 于 C_2.

$\because \text{Rt}\triangle AB_2B_1 \backsim \text{Rt}\triangle AB_1C$，

$\therefore \dfrac{AB_1}{AB_2}=\dfrac{AC}{AB_1}$. $\therefore AB_1^2=AB_2\cdot AC$.

同理，$AC_1{}^2=AC_2\cdot AB$.

$\because \text{Rt}\triangle ABB_2 \backsim \text{Rt}\triangle ACC_2$，

$\therefore \dfrac{AB}{AB_2}=\dfrac{AC}{AC_2}$.

$\therefore AB_2\cdot AC=AC_2\cdot AB$.

$\therefore AB_1{}^2=AC_1{}^2$. $\therefore AB_1=AC_1$.

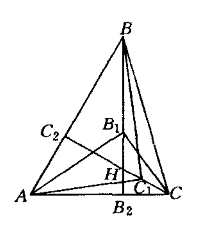


图 5 - 72

题81 如图 5 - 73，梯形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle C=90°$，过 BC 的中点 F，作 $FE\perp AD$，有 $EF=CF$.

求证：$BC^2=4AB\cdot CD$.

证明 连结 AF、DF，在 $Rt\triangle FCD$ 和 $Rt\triangle FED$ 中，

$\because EF=CF, DF=DF$，

$\therefore \triangle FCD\cong\triangle FED$.

$\therefore \angle CFD=\angle EFD$.

同理可证 $\angle AFE=\angle AFB$. $\therefore \angle AFD=90°$.

$\because FE$ 是 $Rt\triangle AFD$ 斜边上的高，

$\therefore EF^2=DE\cdot EA$.

由 $\triangle FCD\cong\triangle FED$，$\therefore DE=DC$.

同理 $AE=AB$. $\therefore EF^2=AB\cdot CD$.

而 $EF=CF=\frac{1}{2}BC$，$\therefore BC^2=4AB\cdot CD$.

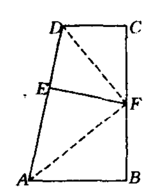


图 5 - 73

题82 如图 5 - 74，$\triangle PQR$ 和 $\triangle P'Q'R'$ 是两个全等的正三角形，六边形 $ABCDEF$ 的边长分别记为：$AB=a_1, BC=b_1, CD=a_2, DE=b_2, EF=a_3, FA=b_3$.

求证：(1) $a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$；(2) $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$.

证明 (1) $\because \angle P=\angle Q=\angle R=\angle P'=\angle Q'=\angle R'=60°$，

$\therefore \triangle PAB\backsim\triangle Q'CB\backsim\triangle QCD\backsim\triangle R'ED\backsim\triangle REF\backsim\triangle P'AF$.

将上述六个三角形的面积依次记为 $S_1, S'_1, S_2, S'_2, S_3, S'_3$.

$\therefore S_1:a_1^2=S'_1:b_1^2=S_2:a_2^2=S'_2:b_2^2=S_3:a_3^2=S'_3:b_3^2$.

设式中比值为 $k(k\neq 0)$，易知

$S_1+S_2+S_3=S'_1+S'_2+S'_3$，

$\therefore ka_1^2+ka_2^2+ka_3^2=kb_1^2+kb_2^2+kb_3^2$.

$\therefore a_1^2+a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$.

(2) 设正 $\triangle PQR$ 的边长为 a，$PA=x$，$QC=y$，

$RE=z$，$u=a_1+a_2+a_3$，$v=b_1+b_2+b_3$，

$\because \frac{AB}{PA+PB}=\frac{CD}{CQ+QD}=\frac{EF}{ER+RF}$，

令上述比值为 t，

$\therefore \frac{a_1}{x+a-y-b_1}=\frac{a_2}{y+a-z-b_2}=\frac{a_3}{z+a-x-b_3}=t$，

$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3}{3a-(b_1+b_2+b_3)}=t$，即 $\frac{u}{3a-v}=t$.

同理可得 $\frac{v}{3a-u}=t$. $\therefore \frac{u}{3a-v}=\frac{v}{3a-u}$.

$\therefore (3a-u-v)(u-v)=0$.

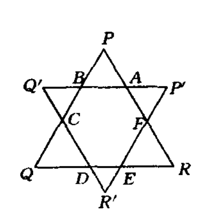


图 5 - 74

易知 $3a-u-v>0$，$\therefore u=v$.

$\therefore a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$.

题83 如图 5 - 75，过$\triangle ABC$内一点M作各边的平行线与各边分别交于D、E、F、G、L、N各点.

求证：$\dfrac{DE}{BC}+\dfrac{FG}{AC}+\dfrac{LN}{AB}=2$.

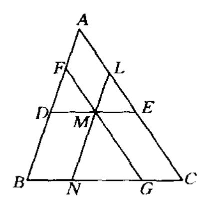


图 5 - 75

证明 $\because \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$.

$\because \triangle BFG\backsim\triangle BAC$，$\therefore \dfrac{FG}{AC}=\dfrac{BF}{AB}$.

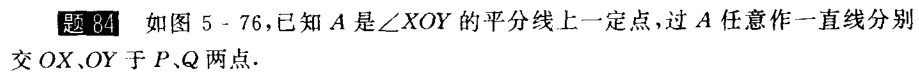
$\because AFML$是平行四边形，$\therefore LM=AF$.

同理，$MN=BD$.

而 $\dfrac{LN}{AB}=\dfrac{LM+MN}{AB}$，

$\therefore \dfrac{DE}{BC}+\dfrac{FG}{AC}+\dfrac{LN}{AB}=\dfrac{AD+BF+LM+MN}{AB}$

$=\dfrac{(AD+BD)+(AF+FB)}{AB}=\dfrac{2AB}{AB}=2$.



题84 如图 5 - 76，已知A是$\angle XOY$的平分线上一定点，过A任意作一直线分别交OX、OY于P、Q两点.

求证：$\dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}$为定值.

证明 过A作直线与OA垂直，交OX、OY于B、C. 取OB中点为M，连结AM.

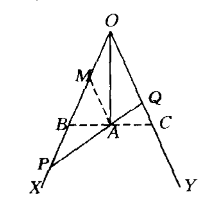


图 5 - 76

$\because OA$是定长，$\therefore OB$、OC也为定长.

$\because AB=AC$，$OM=MB=AM$，$\therefore AM\parallel OC$.

$\therefore \dfrac{AM}{OQ}=\dfrac{PM}{OP}$.

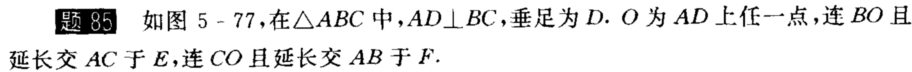
$\therefore \dfrac{AM}{OP}+\dfrac{AM}{OQ}=\dfrac{AM}{OP}+\dfrac{PM}{OP}$

$=\dfrac{BM}{OP}+\dfrac{PM}{OP}=\dfrac{OP}{OP}=1$.

$\therefore \dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}=\dfrac{1}{AM}$.

$\because AM=\dfrac{1}{2}OB$，$OB$为定值，

$\because \dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}=\dfrac{2}{OB}$. $\therefore \dfrac{1}{OP}+\dfrac{1}{OQ}$为定值.



题85 如图 5 - 77，在$\triangle ABC$中，$AD\perp BC$，垂足为D. O为AD上任一点，连BO且延长交AC于E，连CO且延长交AB于F.

求证：AD平分$\angle EDF$.

证明 过 A 点作 BC 的平行线与 DE、DF 的延长线分别交于 G、H，根据塞瓦定理，有

$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1.$

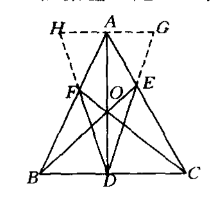


图 5 - 77

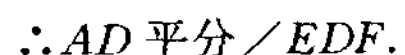
又由 $\triangle CDE\backsim\triangle AGE$ 和 $\triangle AFH\backsim\triangle BFD$，

$\therefore\frac{CE}{EA}=\frac{CD}{AG}$ 和 $\frac{AF}{FB}=\frac{AH}{BD}$.

$\therefore\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CD}{AG}\cdot\frac{AH}{BD}=1.$

$\therefore AH=AG.$

又 $\because AG/\!/BC$，$AD\perp BC$，$\therefore AD\perp HG$.



$\therefore AD$ 平分 $\angle EDF$.

题 86 如图 5 - 78，在 $\triangle ABC$ 中，BC 边上的高 AD 与中线 AP 之和等于 BC 边长的一半.

求证：垂心 H 到 BC 的距离等于 BC.

图 5 - 78

证明 $\because\angle AHB=\angle ACD$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACD\backsim\mathrm{Rt}\triangle BHD$，$\frac{AD}{BD}=\frac{CD}{HD}$.

即 $AD=\frac{BD\cdot CD}{HD}$.

又 $PD=\frac{1}{2}|BD-CD|$，

$$\begin{aligned}\therefore PA^2&=AD^2+PD^2\\&=\left(\frac{BD\cdot CD}{HD}\right)^2+\frac{1}{4}(BD-CD)^2\\&=\frac{4BD^2\cdot CD^2+HD^2(BC^2-4BD\cdot CD)}{4HD^2}\end{aligned}$$

又 $AD+AP=\frac{1}{2}BC$，$AP=\frac{1}{2}BC-AD$，

$$\begin{aligned}\therefore AP^2&=\left(\frac{1}{2}BC-AD\right)^2=\left(\frac{1}{2}BC-\frac{BD\cdot CD}{HD}\right)^2\\&=\frac{BC^2\cdot HD^2-4BD\cdot CD\cdot BC\cdot HD+4BD^2\cdot CD^2}{4HD^2}\end{aligned}$$

由 $AP^2=PA^2$，化简即有：$HD=BC$.

题 87 如图 5 - 79，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$AC^2=AB(AB+BC)$，求 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的度数.

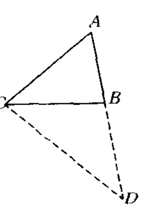


图 5 - 79

证明 延长 AB 至点 D，使 $BD=BC$，连结 DC.

$\therefore\angle BCD=\angle D$. 设为 α.

$\because AC^2=AB\cdot(AB+BC)$，

$\therefore AC^2=AB\cdot(AB+BD)=AB\cdot AD$

即$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{AC}$. 又$\angle A=\angle A$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ACD$, $\angle ACB=\angle D=\alpha$.

又$\because \angle ABC=2\angle D=2\alpha$,

$\therefore \angle ABC+\angle ACB=3\alpha=180°-\angle A=120°$.

$\therefore \alpha=40°$.

$\therefore \angle ABC=80°$, $\angle ACB=40°$.

题 88 如图 5 - 80,在$\square ABCD$的边 AD 和 AB 上分别取点 F 和 E,使 $AF=\dfrac{1}{3}AD$, $AE=\dfrac{1}{2}AB$,连结 EF 交对角线 AC 于点 G.

求证:$AG=\dfrac{1}{5}AC$.

证明 延长 FE 交 CB 的延长线于点 H.

$\because AD/\!/CB$, $\therefore \triangle AFG\backsim\triangle CHG$.

$\therefore \dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AF}{CH}$.

又$\because AE=EB$,

$\therefore HB=AF$.

又$\because BC=AD=3AF$, $\dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AF}{4AF}=\dfrac{1}{4}$,

$\therefore \dfrac{AG}{AG+GC}=\dfrac{1}{1+4}=\dfrac{1}{5}$. 即$\dfrac{AG}{AC}=\dfrac{1}{5}$.

$\therefore AG=\dfrac{1}{5}AC$.

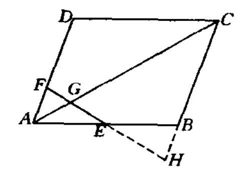


图 5 - 80

第六章　解直角三角形

题 1　试述解直角三角形主要依据及直角三角形的边角关系（$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$）.

答　(1) 两锐角间的关系　$\angle A+\angle B=90^\circ$；

(2) 边与边间的关系　$a^2+b^2=c^2$；

(3) 边与角的相互关系

$\sin A=\cos B=\frac{a}{c}$，$\cos A=\sin B=\frac{b}{c}$，

$\mathrm{tg}A=\mathrm{ctg}B=\frac{a}{b}$，$\mathrm{ctg}A=\mathrm{tg}B=\frac{b}{a}$.

(4) 直角三角形中的射影定理.

如图 6-1，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$CD\perp AB$ 于 D，则 $AC^2=AD\cdot AB$，$BC^2=BD\cdot AB$，$CD^2=AD\cdot BD$.

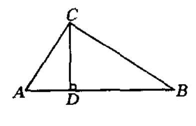


图 6-1

题 2　已知$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle A=60^\circ$，$a+b=3+\sqrt{3}$，则 a 等于（　　）.

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. 3

解　$\because\angle A=60^\circ$，$\angle A+\angle B=90^\circ$，$\therefore\angle B=30^\circ$. $\therefore c=2b$.

又 $a+b=3+\sqrt{3}$，$a^2+b^2=c^2$，

$$\therefore\begin{cases}a+b=3+\sqrt{3},\\a^2=3b^2.\end{cases}$$

$\therefore b=\sqrt{3}$，$a=3$. 故应选 D.

题 3　在$\triangle ABC$ 中，a、b、c 分别为角 A、B、C 的对边长，若 $\sin A\cdot\cos A=0$，$a=2c\cos B$，则$\triangle ABC$ 的形状是（　　）.

A. 等腰三角形　B. 等边三角形　C. 直角三角形　D. 等腰直角三角形

解　$\because\sin A\cdot\cos A=0$，$\therefore\sin A=0$，或 $\cos A=0$.

$\angle A=0^\circ$，或$\angle A=90^\circ$，但$\angle A=0^\circ$不合题意，舍去，$\therefore\angle A=90^\circ$.

又 $\cos B=\frac{a}{2c}$，且 $\cos B=\frac{c}{a}$，$\therefore\frac{a}{2c}=\frac{c}{a}$，$\therefore a=\sqrt{2}c$.

由勾股定理,得 $b=c$.

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形. $\therefore$应选 D.

题 4 面积相同的直角三角形中,斜边最小的三角形的一个锐角的正切是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sin 15°$　　D. $\frac{1}{3}$

解 设三角形两直角边为 x、y.

$\because S=\frac{1}{2}xy$ 为常数,$\therefore$ 令 $xy=k$.

$\therefore$斜边的长度$=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+\frac{k^2}{x^2}}=\sqrt{\left(x-\frac{k}{x}\right)^2+2k}$.

当 $x=\frac{k}{x}$,即 $x=\sqrt{k}$ 时,斜边长最小.这时 $y=\sqrt{k}$.

$\therefore$此时三角形是等腰直角三角形.故应选 B.

题 5 在 $Rt\triangle ABC$ 中,$a>c$. 若 $\cos A+8\cos B+\cos C=4$,则 $a:b:c=$(　　).

A. $13:12:5$　　B. $12:13:5$

C. $13:5:12$　　D. 除 A、B、C 外其它值

解 若 $\angle B=90°$,则 $\cos A+\cos C=4$,这不可能.

$\therefore \angle B\neq 90°$.

$\therefore \angle A=90°$. $\therefore \cos A=0$.

$\because \cos B=\frac{c}{a}$,$\cos C=\frac{b}{a}$,代入已知中,

$\therefore b=4a-8c$. 又 $a^2=b^2+c^2$,

$\therefore 15a^2-64ac+65c^2=0$.

$\therefore a=\frac{13}{5}c$,$b=4a-8c=\frac{12}{5}c$ 或 $a=\frac{5}{3}c$,$b=4a-8c=-\frac{4}{3}c$(舍).

$\therefore a:b:c=13:12:5$.

故应选 A.

题 6 若 α 为直角三角形中一个锐角,那么 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 的值是(　　).

A. 大于 1　　B. 小于 1

C. 等于 1　　D. 不能确定

解 设$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\alpha=\angle CAB$.

$\therefore \sin\alpha=\frac{a}{c}$,$\cos\alpha=\frac{b}{c}$. $\therefore \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{a+b}{c}$.

$\because a+b>c$,$\therefore \sin\alpha+\cos\alpha>1$. 故应选 A.

题 7 已知:在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=45°$,$\angle C=75°$,$AC=2$,求 BC.

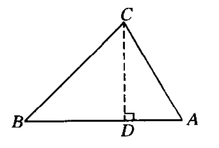


图 6-2

解 如图 6-2,作 $CD\perp AB$ 于 D.

$\because \angle B=45^\circ, \angle C=75^\circ, \therefore \angle A=60^\circ$.

$\because AC=2, \therefore \sin A=\dfrac{CD}{AC}$,即 $CD=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$,

在 Rt$\triangle BCD$ 中,$\angle CDB=90^\circ, \angle B=45^\circ$,

$\therefore BD=CD, BC=\sqrt{2}\,CD=\sqrt{6}$.

题 8 已知:等腰$\triangle ABC$ 的周长等于 72,底边 BC 等于 20,求底边上中线 AD 的长及$\angle B$ 的余弦值.

解 $\because AB=AC=\dfrac{72-20}{2}=26$,

又$\because AD$ 是等腰$\triangle ABC$ 底边 BC 上的中线,

$\therefore BD=DC=10$,且 $AD\perp BC$.

$\therefore$在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{26^2-10^2}=24$,

$\therefore \cos B=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{10}{26}=\dfrac{5}{13}$.

$\therefore$底边上中线 AD 长 24,$\angle B$ 的余弦值为$\dfrac{5}{13}$.

题 9 k 取什么值时,二次方程 $kx^2-(k+2)x+k+1=0$ 以 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 为它的两个根.

解 由根与系数关系,得

$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{k+2}{k}, \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\dfrac{k+1}{k}$.

又$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$,

$\therefore \left(\dfrac{k+2}{k}\right)^2=1+2\cdot\dfrac{k+1}{k}$.

$\therefore k^2-k-2=0, \quad \therefore k_1=2, k_2=-1$.

又 $\Delta\geqslant 0$,即$(k+2)^2-4k(k+1)\geqslant 0$.

$\therefore k^2\leqslant\dfrac{4}{3}. \therefore |k|\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \therefore k=-1$.

即 $k=-1$ 时,二次方程 $kx^2-(k+2)x+k+1=0$ 以 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 为它的两个根.

题 10 若$\triangle ABC$ 是直角三角形,$\angle C=90^\circ$,

求证:$\mathrm{tg}^2\left(45^\circ+\dfrac{A}{2}\right)=\mathrm{ctg}^2\dfrac{B}{2}$.

证明 $\because \angle A+\angle B=90^\circ, \therefore 45^\circ+\dfrac{A}{2}=90^\circ-\dfrac{B}{2}$.

$\therefore \mathrm{tg}\left(45^\circ+\dfrac{A}{2}\right)=\mathrm{ctg}\dfrac{B}{2}. \therefore \mathrm{tg}^2\left(45^\circ+\dfrac{A}{2}\right)=\mathrm{ctg}^2\dfrac{B}{2}$.

题 11 解直角$\triangle ABC(\angle C=90^\circ)$,已知:

(1) $\mathrm{tg}B=1, b=4$;

(2) $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,$\angle B$ 的平分线长 16.

解 (1) $\because \mathrm{tg}B=1$. $\therefore \angle B=45°$. $\therefore \angle A=45°$. $\therefore a=b=4, c=4\sqrt{2}$.

(2) $\because \cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \angle A=30°, \angle B=60°$.

$\therefore a=16\cos\dfrac{B}{2}=16\cdot\cos 30°=8\sqrt{3}$,

$b=a\mathrm{tg}B=24, c=\sqrt{a^2+b^2}=16\sqrt{3}$.

题12 如图 6-3,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,AB 边上的高 CD 把 AB 分为 $\dfrac{5}{2}$、$\dfrac{15}{2}$ 两段,解三角形 ABC.

解 设 $AD=\dfrac{15}{2}, BD=\dfrac{5}{2}, c=\dfrac{15}{2}+\dfrac{5}{2}=10$.

$\therefore c^2=100=a^2+b^2=AD^2+CD^2+BD^2+CD^2=\dfrac{125}{2}+2CD^2$.

$\therefore CD=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$.

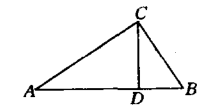


图 6-3

$\therefore ab=AB\cdot CD=10\times\dfrac{5}{2}\sqrt{3}=25\sqrt{3}$.

$a^2+b^2=c^2=100$.

$\therefore a=5, b=5\sqrt{3}$.

$\therefore \sin A=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{2}, \angle A=30°$;

$\sin B=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \angle B=60°$.

$\therefore \angle A=30°, \angle B=60°, c=10, a=5, b=5\sqrt{3}$.

题13 如图 6-4,已知 Rt△ABC 中,$\angle ACB=90°$,D 为 BC 上任一点. 若 $\angle ADC=\alpha, \angle ABC=\beta, BD=a$,

求证:$AC=\dfrac{a}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$.

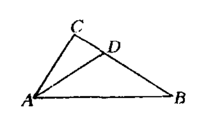


图 6-4

解 在△ACD 中,$\angle C=90°$. $\therefore CD=AC\cdot\mathrm{ctg}\alpha$.

在△ACB 中,$\angle C=90°$,

$\therefore BC=AC\cdot\mathrm{ctg}\beta$.

$\because BC-CD=BD=a$,

$\therefore AC(\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha)=a$.

$\therefore AC=\dfrac{a}{\mathrm{ctg}\beta-\mathrm{ctg}\alpha}$.

题14 如图 6-5,△ABC 中,$AD\perp BC$ 于 D. $\angle B=\alpha, \angle C=\beta, BC=a$. 求:$AD$.

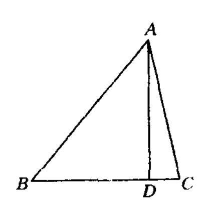


图 6-5

解 在△ABD 中,$\because \angle ADB=90°$,

$\therefore BD=AD\cdot\mathrm{ctg}\alpha$.

在$\triangle ACD$中，$\angle ADC=90^\circ$，$\therefore CD=AD\cdot\text{ctg}\beta$.

又$BD+CD=BC=a$，

$\therefore a=AD\cdot(\text{ctg}\alpha+\text{ctg}\beta)$.

$\therefore AD=\dfrac{a}{\text{ctg}\alpha+\text{ctg}\beta}$.

题15 已知$\triangle ABC$中，$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$.

求证：(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$，

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C$，(余弦定理).

(2) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，(正弦定理).

证明 (1) 如图 6 - 6，作$AD\perp BC$于D.

$\therefore BD=AB\cdot\cos B=c\cdot\cos B$，$AD=AB\cdot\sin B=c\cdot\sin B$.

$\therefore CD=BC-BD=a-c\cdot\cos B$.

又$AD^2+CD^2=AC^2$，

$\therefore(c\cdot\sin B)^2+(a-c\cdot\cos B)^2=b^2$.

$\therefore c^2\cdot\sin^2B+a^2+c^2\cdot\cos^2B-2ac\cdot\cos B=b^2$.

$\therefore b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$.

同理可证其他两个.

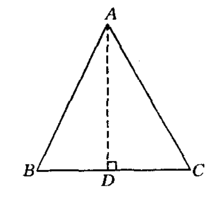


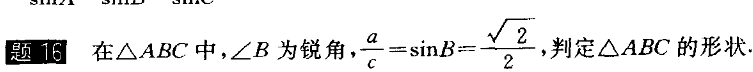
图 6 - 6

(2) 如图 6 - 6，作$AD\perp BC$于D.

$\therefore AD=c\cdot\sin B=b\cdot\sin C$.

$\therefore\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$. 同理可证$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$.

$\therefore\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.


题16 在$\triangle ABC$中，$\angle B$为锐角，$\dfrac{a}{c}=\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，判定$\triangle ABC$的形状.

解 $\because\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\angle B$为锐角，

$\therefore\angle B=45^\circ$. $\therefore\cos B=\sin B=\dfrac{a}{c}$.

由余弦定理，有

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B=a^2+c^2-2ac\cdot\dfrac{a}{c}=c^2-a^2$.

$\therefore c^2=a^2+b^2$. $\therefore\triangle ABC$为直角三角形.

又$\angle B=45^\circ$，$\therefore\angle B=\angle A=45^\circ$.

$\therefore\triangle ABC$为等腰直角三角形.

题17 设$\triangle ABC$的面积S与内角A为定值，问b、c取何值时，a最小？

解 $\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\cdot h, h=c\cdot \sin A$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot \sin A$. $\therefore bc=\frac{2S}{\sin A}$.

$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A=(b-c)^2+2bc\cdot(1-\cos A)$

$=(b-c)^2+\frac{4S(1-\cos A)}{\sin A}$.

$\therefore$当 $b=c$ 时 a 最小，此时，由 $S=\frac{1}{2}b^2\sin A$，有 $b=c=\sqrt{\frac{2S}{\sin A}}$.

题18 已知 a、b、c 为△ABC 中三个内角 A、B、C 的对边，当 $m>0$ 时，关于 x 的方程 $b(x^2+m)+c(x^2-m)-2\sqrt{m}\cdot ax=0$ 有两个相等的实数根，且 $\sin C\cdot\cos A-\cos C\cdot\sin A=0$. 试判断△$ABC$ 的形状.

解 整理原方程，有

$(b+c)x^2-2\sqrt{m}\cdot a\cdot x+bm-cm=0$.

$\because\Delta=0$，$\therefore 4a^2m-4(b+c)(b-c)m=0$，$m>0$，

$\therefore a^2-b^2+c^2=0$，$b^2=a^2+c^2$.

$\therefore$△ABC 为直角三角形，$\angle B=90°$.

$\because\sin C\cdot\cos A-\cos C\cdot\sin A=0$，$\therefore\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\cos C}{\cos A}$.

由正弦定理和余弦定理，得

$$\frac{c}{a}=\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}.$$

$\therefore a^2+b^2-c^2=b^2+c^2-a^2$. $\therefore 2a^2=2c^2$，$a=c$.

$\therefore$△ABC 为等腰直角三角形.

题19 已知：如图 6-7，在△ABC 中，D 为 AB 的中点，$\angle ACB=135°$，$AC\perp CD$. 求 $\sin A$ 的值.

解 过 D 作 BC 的平行线 DE 交 AC 于点 E.



图 6-7

$\because\angle ACB=135°$，$\angle ACD=90°$，

$\therefore\angle DCB=45°$. $\therefore\angle EDC=45°$，$CD=CE$.

又$\because D$ 为 AB 中点，$\therefore AE=EC$.

$\therefore CD=\frac{1}{2}AC$，$AC=2CD$.

在 Rt△ACD 中，$AD=\sqrt{AC^2+DC^2}=\sqrt{5}\cdot CD$，

$\therefore\sin A=\frac{CD}{AD}=\frac{CD}{\sqrt{5}\cdot CD}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

题20 已知：如图 6-8，有一段防洪大堤，其横断面为梯形 $ABCD$，$AB/\!/DC$，斜坡

AD 的坡度 $i_1=1:1.2$，斜坡 BC 的坡度 $i_2=1:0.8$，大堤顶宽 DC 为 6 米，为了增强抗洪能力，现将大堤加高，加高部分的横断面为梯形 $DCFE$，$EF\parallel DC$，点 E、F 分别在 AD、BC 的延长线上，当新大堤宽 EF 为 3.8 米时，大堤加高了多少米？

图 6 - 8

解 作 $EG\perp DC$，$FH\perp DC$，G、H 分别为垂足，那么四边形 $EFHG$ 是矩形．$GH=EF=3.8$ 米．

设大堤加高 x 米，那么 $EG=FH=x$．

$\because i_1=\dfrac{EG}{DG}=\dfrac{1}{1.2}$，$i_2=\dfrac{FH}{HC}=\dfrac{1}{0.8}$，

$\therefore DG=1.2x$，$HC=0.8x$．

由 $DG+GH+HC=6$，得 $1.2x+3.8+0.8x=6$，

解得 $x=1.1$．

答：大堤加高了 1.1 米．

题 21 已知：如图 6 - 9，在一座山的山顶 B 处用高为 1 米的测倾器望地面 C、D 两点，测得的俯角分别为 60°和 45°，若已知 DC 的长是 20 米，求山高 BE．（结果可用根式表示）

解 在 Rt△ACE 中，有 $CE=AE\cdot \text{tg}30°$，

在 Rt△ADE 中，有 $DE=AE\cdot \text{tg}45°$，

$\therefore DC=DE-CE=AE\cdot(\text{tg}45°-\text{tg}30°)$．

$\therefore AE=\dfrac{30}{\text{tg}45°-\text{tg}30°}=30+10\sqrt{3}$．

$\therefore BE=AE-AB=(20+10\sqrt{3})$米．

答：山高为$(20+10\sqrt{3})$米．

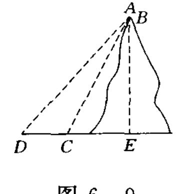


图 6 - 9

题 22 已知：如图 6 - 10，线段 AB、CD 分别表示甲、乙两栋楼的高，$AB\perp BD$，$CD\perp BD$．从甲楼顶部 A 处测得乙楼顶部 C 的俯角 $\alpha=30°$，测得乙楼底部 D 的俯角 $\beta=60°$．已知甲楼的高 $AB=24$ 米，求乙楼的高 CD．

解 作 $AE\perp CD$，E 为垂足．

由已知，得$\angle EAC=30°$，$\angle EAD=60°$，

又 $ABDE$ 为矩形，$\therefore DE=AB=24$．

在 Rt△AED 中，

$AE=DE\cdot \text{ctg}60°=24\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=8\sqrt{3}$．

在 Rt△AEC 中，

$EC=AE\cdot \text{tg}30°=8\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=8$．

$\therefore CD=DE+CE=32$(米)．

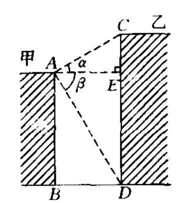


图 6 - 10

答:乙楼高为 32 米.

题23 在高出海平面 200 米的灯塔顶端,测得正北与正南的两艘船的俯角分别是 45°与 30°,求这两艘船的距离(精确到 1 米).

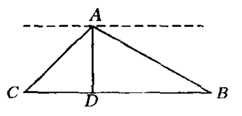


图 6 - 11

解 如图 6 - 11,A 表示灯塔顶端,B 表示正南的船,C 表示正北的船,由已知 $AD=200$ 米,$\angle B=30°$,$\angle C=45°$,得

$$BD=\frac{AD}{\mathrm{tg}30°},CD=\frac{AD}{\mathrm{tg}45°}.$$

$$\therefore BC=BD+CD=200\sqrt{3}+200$$
$$\approx 546(\text{米}).$$

答:两船距离约为 546 米.

题24 如图 6 - 12,山顶上有一座电视塔,在塔顶 B 处测得地面上一点 A 的俯角 $\alpha=60°$,在塔底 C 处测得 A 点的俯角 $\beta=45°$. 已知塔高 60 米,求山高 CD(精确到 1 米).

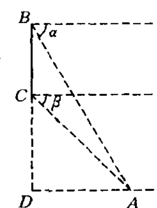


图 6 - 12

解 设 $CD=x$.

$\because \beta=45°$,$\therefore \angle ACD=\angle CAD=45°$.

$\therefore AD=CD=x$.

在 Rt$\triangle ABD$ 中,$\angle BAD=\alpha=60°$,

$\therefore BD=AD\cdot \mathrm{tg}BAD=\sqrt{3}x$.

$\because BD=BC+CD$,$\therefore \sqrt{3}x=60+x$.

解之,得 $x=30(1+\sqrt{3})\approx 82$(米).

答:山高约 82 米.

题25 已知:如图 6 - 13,水库大坝的横断面是梯形 $ABCD$,坝顶宽 4 米,坝高 6 米,斜坡 AB 的坡度 $i=1:2$,斜坡 CD 的坡角 $\alpha=60°$,求斜坡 AB 的长和坝底宽 BC(结果可以保留根号).

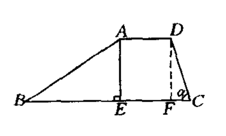


图 6 - 13

解 过点 D 作 $DF\perp BC$ 于 F,则 $DF=AE=6$,$EF=AD=4$.

Rt$\triangle ABE$ 中,$i=\frac{1}{2}=\frac{AE}{BE}$,$\therefore BE=12$.

$AB=\sqrt{AE^2+BE^2}=6\sqrt{5}$(米).

在 Rt$\triangle DCF$ 中,$FC=DF\cdot \mathrm{ctg}60°=2\sqrt{3}$,

$\therefore BC=BE+EF+FC=(16+2\sqrt{2})$(米).

题26 已知:如图 6 - 14,C 城市在 B 城市的正北方向,两城市相距 100 千米,计划在两城市间修筑一条高速公路(即线段 BC),经测量,森林保护区 A 在 B 城市的北偏东

40°的方向上，又在 C 城市的南偏东 56°的方向上，已知森林保护区 A 的范围是以 A 为圆心，半径为 50 千米的圆. 问：计划修筑的这条高速公路会不会穿越保护区？为什么？

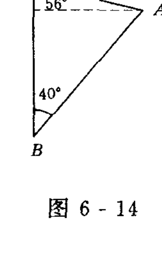


图 6 - 14

解 过点 A 作 $AD\perp BC$，垂足为 D.

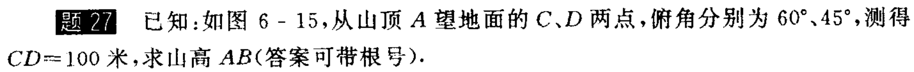
在 Rt△ADC 中，$CD=\dfrac{AD}{\text{tg}56^\circ}$，

在 Rt△ABD 中，$BD=\dfrac{AD}{\text{tg}40^\circ}$.

根据题意，得$\dfrac{AD}{\text{tg}56^\circ}+\dfrac{AD}{\text{tg}40^\circ}=100$，

$\therefore AD=\dfrac{100\text{tg}56^\circ\cdot\text{tg}40^\circ}{\text{tg}56^\circ+\text{tg}40^\circ}\approx 53.58>50$.

所以计划修筑的这条高速公路不会穿越森林保护区.



题 27 已知：如图 6 - 15，从山顶 A 望地面的 C、D 两点，俯角分别为 60°、45°，测得 $CD=100$ 米，求山高 AB（答案可带根号）.

解 ∵从山顶 A 望地面 C、D 两点，俯角分别为 60°、45°，

$\therefore \angle ACB=60^\circ, \angle ADB=45^\circ$.

设山高 AB 为 x 米，则 $BD=x$，$BC=AB\cdot\text{ctg}60^\circ$，

$\therefore x-x\text{ctg}60^\circ=100$，

$\therefore x=\dfrac{300}{3-\sqrt{3}}=50(3+\sqrt{3})$

$=150+50\sqrt{3}$.

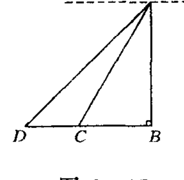


图 6 - 15

答：山高为$(150+50\sqrt{3})$米.

题 28 某通讯船在 A 处测得东北方向 9 海里的 C 处有一渔船，渔船正沿南 75°东的方向以每小时 5 海里的速度前进，而通讯船在每小时 7 海里的速度直线航行，若希望用最短的时间与渔船相会，问通讯船应沿什么方向航行？需航行多少时间？

解 如图 6 - 16，设经过 t 小时后两船在 B 处相会，由题设可知

$AB=7t, CB=5t, \angle ACB=120^\circ$.

图 6 - 16

由余弦定理，得

$(7t)^2=9^2+(5t)^2-2\times 9\times 5t\cos 120^\circ$，

$\therefore 8t^2-15t-27=0$.

$\therefore t=3, t=-\dfrac{9}{8}$（不合题意，舍去）.

由正弦定理，得

$\sin A=\dfrac{BC}{AB}\sin ACB=\dfrac{5}{14}\sqrt{3}\approx 0.6186$.

$\therefore A\approx 38^\circ 13'$.

答：通讯船应沿北偏东 83°13′方向航行，行 3 小时与渔船相会.

题 29 已知：如图 6 - 17，在湖边高出水面 BC50 米的山顶 A 处看见一艘飞艇停留在湖面上空某处，观察到飞艇底部标志 P 处的仰角为 45°，又观其在湖中之像 Q 的俯角为 60°，试求飞艇离开湖面的高度 PD.

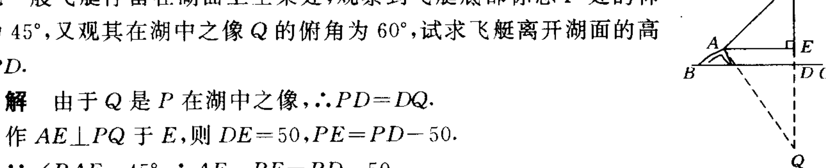


图 6 - 17

解 由于 Q 是 P 在湖中之像，$\therefore PD=DQ$.

作 $AE\perp PQ$ 于 E，则 $DE=50$，$PE=PD-50$.

$\because \angle PAE=45°$，$\therefore AE=PE=PD-50$.

而 $EQ=PD+50$，

在 Rt△AEQ 中，$\angle EAQ=60°$，

$\mathrm{tg}60°=\dfrac{EQ}{AE}$，$\therefore \sqrt{3}=\dfrac{PD+50}{PD-50}$，

$\therefore PD=(100+50\sqrt{3})$米，即这时飞艇离开湖面高度为$(100+50\sqrt{3})$米.

题 30 已知：如图 6 - 18，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，D 是 BC 的中点，$DE\perp AB$，垂足为 E，$\mathrm{tg}B=\dfrac{1}{2}$，$AE=7$，求 DE 的长.

图 6 - 18

解 $\because \mathrm{tg}B=\dfrac{1}{2}$，$\therefore \dfrac{DE}{BE}=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{1}{2}$.

设 $DE=x$，$\therefore BE=2x$.

在 Rt△BDE 中，由勾股定理，

得 $BD=\sqrt{5}x$.

$\because BD=DC$，$\therefore AC=\dfrac{1}{2}BC=BD=\sqrt{5}x$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得 $AB^2=AC^2+BC^2$.

即$(7+2x)^2=(\sqrt{5}x)^2+(2\sqrt{5}x)^2$，

$\therefore 3x^2-4x-7=0$，$\therefore x_1=\dfrac{7}{3}$，$x_1=-1$(舍去). $\therefore DE=\dfrac{7}{3}$.

题 31 已知：如图 6 - 19，某轮船向正北方向航行，在点 A 处测得灯塔 C 在北偏西 30°，船以每小时 20 海里的速度航行 2 小时到达 B 点后，测得灯塔 C 在北偏西 75°，问当此船到达灯塔 C 的正东方向时，船距灯塔 C 有多远(结果保留两位有效数字).

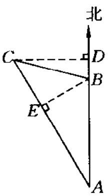


图 6 - 19

解 作 $CD\perp AB$ 于 D. $\angle CAD=30°$，$AB=20\times 2=40$.

$\because \angle CBD=75°$，$\therefore \angle ACB=45°$.

过 B 作 $BE\perp AC$ 于 E，则 $BE=\dfrac{1}{2}AB=20$.

$\therefore CE=BE=20$，$\because AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=20\sqrt{3}$.

在 Rt△ACD 中，$AC=AE+EC=20\sqrt{3}+20$，

$CD=\frac{1}{2}AC=10\sqrt{3}+10\approx10\times1.73+10\approx27$(海里).

答:当船到灯塔 C 的正东方向时,与 C 相距约 27 海里.

题 32 海上有三艘渔船在同一时刻向指挥部报告:A 船说 B 船在它的正东方向,C 船在它的北偏东 55°方向;B 船说 C 在它的北偏西 35°方向;C 船则说它到 A 船的距离比它到 B 船的距离远 40 海里. 画图,并求出三艘渔船在这一时刻彼此之间的距离(精确到 0.1 海里,数据 $\sin35°=0.5736$,$\cos35°=0.8192$,$\text{tg}35°=0.7002$,$\text{ctg}35°=1.428$ 可参考选用).

解 如图 6 - 20,设 $BC=x$ 海里,则 $AC=(x+40)$海里,$\angle CAB=35°$,$\angle CBA=55°$,
$\therefore\angle C=90°$.

$\therefore \text{tg}CAB=\frac{BC}{AC}$,$\text{tg}35°=\frac{x}{x+40}$.

$\therefore 0.7002=\frac{x}{x+40}$,$x\approx93.4$,

$\therefore x+40=133.4$.

又 $\sin35°=\frac{BC}{AB}$,$AB=\frac{93.4}{\sin35°}\approx162.8$.

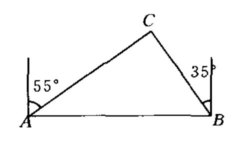


图 6 - 20

$\therefore AB=162.8$ 海里,$BC=93.4$ 海里,$AC=133.4$ 海里.

题 33 已知:如图 6 - 21,在直角坐标系中,点 $A(x_1,-3)$在第三象限,点 $B(x_2,-1)$在第四象限,线段 AB 与 y 轴交于点 D,$\angle AOB=90°$.

(1)当 $x_2=1$ 时,求图象经过点 A、B 的一次函数的解析式;

(2)当$\triangle AOB$ 的面积等于 9 时,设$\angle AOD=\alpha$,求 $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

解 (1)$\because\angle AOB=90°$,$\therefore AO^2+BO^2=AB^2$.

$\therefore[x_1^2+(-3)^2]+[1^2+(-1)^2]=(x_1-1)^2+(-3+1)^2$,

$\therefore x_1=-3$.

设过 A、B 两点的一次函数为 $y=kx+b$,

把 $x_1=-3$,$y_1=-3$ 及 $x_2=1$,$y_2=-1$ 代入,得

$$\begin{cases}-3k+b=-3,\\k+b=-1.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=-\frac{3}{2}.\end{cases}\therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}.$$

图 6 - 21

(2)作 $AE\perp y$ 轴于 E,$BF\perp y$ 轴于 F,则 $OE=3$,$OF=1$.

在 Rt$\triangle AOE$ 中,$AO=\frac{OE}{\cos\alpha}=\frac{3}{\cos\alpha}$.

在 Rt$\triangle BOF$ 中,$BO=\frac{OF}{\cos(90°-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}$.

根据题意,得$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=9$,$\therefore\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{6}$.

题 34 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c.

(1)根据锐角的正弦、余弦定义证明:$\sin A+\cos A>1$;

(2)是否存在一个一元二次方程,其两实根 α、β 满足

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\sin^2A+\sin^2B\\ \alpha\beta=\dfrac{\sin A+\sin B}{4}.\end{cases}$$

解 (1)根据定义,$\sin A=\dfrac{a}{c}$,$\cos A=\dfrac{b}{c}$,且 $a+b>c$,

$\therefore \sin A+\cos A=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a+b}{c}>1.$

(2)不存在满足条件的一元二次方程.

假设存在一个一元二次方程,其两根 α、β 满足条件式,则

$\alpha+\beta=\sin^2A+\sin^2B=\sin^2A+\cos^2A=1$,

$\therefore$ 设此方程为 $x^2-x+\dfrac{\sin A+\sin B}{4}=0$,

其判别式 $\Delta=1-4\times\dfrac{\sin A+\sin B}{4}=1-(\sin A+\sin B)<0$,

此方程无解,假设不成立,所以不存在满足条件的一元二次方程.

题35 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边长分别为 a、b、c. 若 $\sqrt{5}-2$ 是关于 x 的方程 $x^2-3\cos Ax+2\sqrt{5}-4=0$ 的根,而关于 x 的方程 $x^2+(b-2)x-b^2+5b+\dfrac{9}{4}=0$ 有两个相等的实数根.

(1)求 $\cos A$ 的值;(2)求 Rt$\triangle ABC$ 三边的长;(3)求 Rt$\triangle ABC$ 的内切圆的面积.

解 (1)由已知,得$(\sqrt{5}-2)^2-3(\sqrt{5}-2)\cos A+2\sqrt{5}-4=0$,

$\therefore 3(\sqrt{5}-2)\cos A=5-2\sqrt{5}$,

$\therefore \cos A=\dfrac{5-2\sqrt{5}}{3(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{(5-2\sqrt{5})(\sqrt{5}+2)}{3(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}.$

(2)由已知,得 $\Delta=(b-2)^2-4\times(-b^2+5b+\dfrac{9}{4})=0$,

$\therefore 5b^2-24b-5=0$,$\therefore b=5$,$b=-\dfrac{1}{5}$(不合题意,舍去).

$\therefore c=\dfrac{b}{\cos A}=\dfrac{5\times3}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}.$

$a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-5^2}=2\sqrt{5}.$

(3)设 Rt$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r,则

$r=\dfrac{a+b-c}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}+5-3\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}.$

$\therefore$ 内切圆面积 $S=\pi(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2})^2=\dfrac{15-5\sqrt{5}}{2}\pi.$

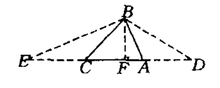


图 6 - 22

题36 已知：如图 6 - 22，$\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，且 $2b=a+c$.

(1)延长 CA 到 D，使得 $AD=AB$，连结 BD，求证：$\angle D=\frac{1}{2}\angle BAC$；

(2)求 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ 的值（$\frac{A}{2}$ 是 $\frac{1}{2}\angle BAC$，$\frac{C}{2}$ 是 $\frac{1}{2}\angle BCA$）.

解 (1)$\because AD=AB$，$\therefore \angle D=\angle ABD$，

$\therefore \angle BAC=2\angle D$，$\therefore \angle D=\frac{1}{2}\angle BAC$.

(2)延长 AC 到 E，使 $CE=a$，连结 BE，则 $\angle E=\frac{1}{2}\angle C$，作 $BF\perp AC$ 于 F.

$\because BC^2-CF^2=BA^2-AF^2$，

$\therefore a^2-CF^2=c^2-(b-CF)^2$，

$\therefore CF=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}=\frac{2b(a-c)+b^2}{2b}=a-c+\frac{b}{2}=\frac{5a-3c}{4}$，

$\therefore \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{BF}{DF}\cdot\frac{BF}{EF}=\frac{BF^2}{DF\cdot EF}=\frac{a^2-CF^2}{(c+AF)(a+CF)}=\frac{a-CF}{c+AF}$.

而 $a-CF=\frac{-a+3c}{4}$，

$c+AF=c+b-CF=c+\frac{a+c}{2}-\frac{5a-3c}{4}=\frac{-3a+9c}{4}$，

$$\therefore \operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\frac{-a+3c}{4}}{\frac{-3a+9c}{4}}=\frac{1}{3}.$$

第七章　圆

一、圆的有关性质

题1　试述圆的两种定义方法.

答　(1)在一平面内,一条线段绕它固定的一个端点旋转一周,另一个端点随之旋转所形成的图形叫做圆.

(2)圆是到定点的距离等于定长的点的集合.

题2　试述与圆有关的几个重要概念.

答　(1)连结圆上任意两点的线段叫做弦;经过圆心的弦叫做直径.

(2)弦到圆心的距离叫做弦心距.

(3)圆上任意两点间的部分叫做圆弧;任意一条直径的两个端点分圆成两条弧,每一条弧都叫半圆.

(4)圆心相同,半径不相等的两个圆叫做同心圆;圆心不相同,半径相等的两个圆叫做等圆.

(5)顶点在圆心的角叫圆心角;顶点在圆上,两边与圆相交的角叫做圆周角;顶点在圆上,一边与圆相交,另一边与圆相切的角叫做弦切角.

题3　确定一个圆的基本条件是什么?

答　(1)确定一个圆必须确定圆心、半径.圆心可确定圆的位置,半径可确定圆的大小.

(2)不在同一条直线上的三个点可以确定一个圆.

题4　试述点和圆的位置关系.

答　圆内的点⇔与圆心的距离小于半径的点.

圆上的点⇔与圆心的距离等于半径的点.

圆外的点⇔与圆心的距离大于半径的点.

题5　试述与圆有关的几个定理.

答 (1)垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的弧.

(2)圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半,一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

(3)弦切角等于它所夹的弧对的圆周角,弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半.

题6 如图7-1,在同心圆中,大圆的弦AB交小圆于C、D,已知$AB=2CD$,AB的弦心距等于CD的一半,那么同心圆大圆与小圆半径之比是( ).

A. $3:2$　　B. $\sqrt{5}:2$

C. $\sqrt{5}:\sqrt{2}$　　D. $5:4$

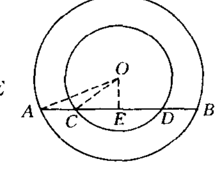


图7-1

解 作$OE\perp AB$于E,连结OC、OA,若$AO=R$,$CO=r$,设$OE=1$,则$CD=2$,$AB=4$.

由勾股定理可求得$OC=\sqrt{2}$;

且由$AE=2$,$OE=1$,$OA=\sqrt{5}$.

$\therefore R:r=\sqrt{5}:\sqrt{2}$.

选择C.

题7 如图7-2,AB为$\odot O$的直径,MN为圆内一条弦,若$AB=10$ cm,$MN=8$ cm,则A、B两点到直线MN的距离的和等于( ).

A. 12 cm　　B. 10 cm

C. 8 cm　　D. 6 cm

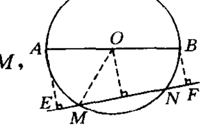


图7-2

解 作$AE\perp MN$于E,$BF\perp MN$于F,$OH\perp MN$于H,连结OM,在Rt$\triangle OMH$中,$OM=5$ cm,$MH=4$ cm,则$OH=3$ cm.

在梯形$AEFB$中,$AE/\!/OH/\!/BF$,且$AO=OB$,

$\therefore OH$是梯形的中位线.

$\therefore AE+BF=2OH=6$ cm.

$\therefore$选择D.

题8 M是$\odot O$上一点,$\odot O$半径$r=3$,在它们所在平面上有一点N,$MN=\sqrt{3}$,那么N点与$\odot O$的位置关系是( ).

A. N点在$\odot O$上　　B. N点在$\odot O$外

C. N点在$\odot O$内　　D. 不确定

解 M是$\odot O$上一点,以M为圆心,$\sqrt{3}$为半径作圆,则$\odot M$与$\odot O$相交,$\odot M$上的任意一点均可为N,所以N可以在$\odot O$内或$\odot O$上或$\odot O$外,即N与$\odot O$的位置关系不确定.

$\therefore$选择D.

题 9 下面几个命题中正确的是（　　）.

A. 两条弧的长度相等，那么它们是等弧

B. 两条弧的度数相等，那么它们是等弧

C. 度数相等的弧的长度相等

D. 等弧的度数相等

解 等弧是在同圆或等圆中能够互相重合的弧，等弧的长度、弯曲程度、度数都相等．并且，我们知道，在大小不同的圆中，度数相等的弧的长度必不相等，因此 A、B、C 都应排除.

∴选择 D.

题 10 下面几个以 a、b、c 为边的三角形中，外接圆圆心在边上的是（　　）.

A. $a=5,b=12,c=11$　　　B. $a=5,b=12,c=12$

C. $a=5,b=12,c=13$　　　D. $a=5,b=12,c=14$

解 由半圆上的圆周角可知，直角三角形外接圆的圆心在斜边上．而在所给的四个三角形中，只有 C 中 $c^2=a^2+b^2$，这是一个直角三角形．

∴选择 C.

题 11 在直径是 20 cm 的⊙O 中，AB 弧所对圆心角是 60°，那么 AB 的弦心距是（　　）.

A. $10\sqrt{3}$ cm　　B. $\frac{15}{2}\sqrt{3}$ cm　　C. $5\sqrt{3}$ cm　　D. $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ cm

解 AB 弧所对的圆心角是 60°，则弦 AB 与半径 OA、OB 组成等边三角形．由勾股定理可求得△OAB 的高为 $5\sqrt{3}$，则 AB 的弦心距为 $5\sqrt{3}$ cm.

∴选择 C.

题 12 P 在⊙O 内，$OP=2$ cm，若⊙O 的半径是 3 cm，则过 P 点的最短的弦长度为（　　）.

A. 1 cm　　B. 2 cm　　C. $\sqrt{5}$ cm　　D. $2\sqrt{5}$ cm

解 ⊙O 内过 P 点最短的弦是垂直于 OP 的弦．∵$OP=2$ cm，⊙O 的半径是 3 cm，根据勾股定理和垂径定理可求得最短弦长为 $2\sqrt{5}$ cm.

∴选择 D.

题 13 如图 7－3，⊙O 和⊙O' 是等圆，$AD\parallel OO'$，下面答案中正确的是（　　）.

A. $AB=CD$ 但 $\overset{\frown}{AB}\neq\overset{\frown}{CD}$

B. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ 但 $AB\neq CD$

C. $AB=CD$ 且 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

D. $AB\neq CD$ 且 $\overset{\frown}{AB}\neq\overset{\frown}{CD}$

图 7－3

解 过 O 作 $OE\perp AB$ 于 E，过 O' 作 $O'F\perp CD$ 于 F.

$\because AD/\!/OO'$，$\therefore OE=O'F$，则 $AB=CD$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$.

∴选择 C.

题 14 AD 是⊙O 的直径，弦 AB、AC 交于 A 点，且 AD 平分 $\angle BAC$，下列结论不正确的是(　　).

A. $AB=AC$　　　　B. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$

C. $AD\perp BC$　　　　D. $AB\neq AC$

解　由轴对称图形的有关性质可知 AD 所在直线是⊙O 的对称轴，且 AD 所在直线是 $\angle BAC$ 的对称轴，$\therefore AB=AC$，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$；$B$、$C$ 关于 AD 对称，则 $AD\perp BC$.

∴选择 D.

题 15 在⊙O 中，$\angle AOB=72°$，则弦 AB 所对的圆周角是(　　).

A. 36°　　B. 144°　　C. 72°　　D. 36°或 144°

解　AB 弦分圆为两部分，当圆周角的顶点分别在优弧或劣弧上时，圆周角的度数分别为 36°或 144°.

∴选择 D.

题 16 已知：如图 7 - 4，AB 是⊙O 的直径，CD 是弦，$AE\perp CD$ 于 E，$BF\perp CD$ 于 F.

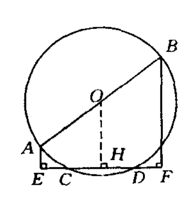


图 7 - 4

求证：$EC=FD$.

证明　过 O 作 $OH\perp CD$ 于 H，

$\because AE\perp CD$，$BF\perp CD$，$OH\perp CD$，

$\therefore AE/\!/BF/\!/OH$.

$\because AO=OB$，$\therefore EH=FH$.

$\because OH\perp CD$，$\therefore CH=DH$，$\therefore EC=FD$.

题 17 已知：如图 7 - 5，P 为⊙O 外一点，且 $AB=CD$.

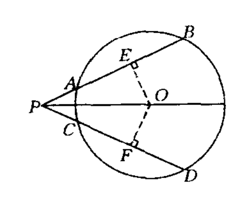


图 7 - 5

求证：(1)$\angle APO=\angle CPO$；

(2)$PA=PC$.

证明　(1)作 $OE\perp AB$ 交 AB 于 E，$OF\perp CD$ 交 CD 于 F.

$\because AB=CD$，$\therefore OE=OF$.

又 $OP=OP$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle OPE\cong \mathrm{Rt}\triangle OPF$，

$\therefore \angle APO=\angle CPO$；

(2)由(1)可知 $PE=PF$，

又 $AB=CD$，$\therefore AE=CF$，$\therefore PA=PC$.

题 18 已知：直径为 30 cm 的⊙O 中，有两条平行弦 AB 和 CD，$AB=18$ cm，$CD=24$ cm.

求：弦 AB 与弦 CD 间的距离.

解 如图 7 - 6，若 AB、CD 分别在圆心 O 点两旁，连结 OA、OC，作 $OE\perp AB$ 于 E，$OF\perp CD$ 于 F.

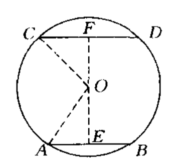


图 7 - 6

$\because OA=15$ cm，$AE=9$ cm，

由勾股定理可得 $OE=12$ cm.

同理 $CF=12$ cm，$OF=9$ cm.

$\therefore AB$、CD 间的距离为 21 cm.

如图 7 - 7，若 AB、CD 分别在圆心 O 点同侧，同理可得 $OE=12$ cm，$OF=9$ cm.

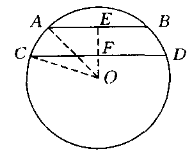
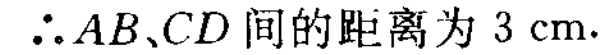


图 7 - 7



$\therefore AB$、CD 间的距离为 3 cm.

小结：在原题中没有给出图形时，要考虑符合题设的各种情况，如本题需要分 AB、CD 在圆心的两旁和同旁两种情况考虑.

题 19 已知：如图 7 - 8，O 为$\triangle ABC$ 的内心，延长 AO 交外接圆于 D.

求证：$BD=OD=CD$.

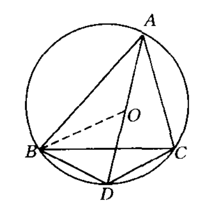


图 7 - 8

证明 连结 BO.

$\because O$ 为$\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore \angle BAD=\angle CAD$，$\angle ABO=\angle CBO$.

而$\angle BOD=\angle OAB+\angle ABO$，

$\angle OBD=\angle CBD+\angle OBC=\angle CAD+\angle OBC$，

$\therefore \angle BOD=\angle OBD$，$\therefore OD=BD$.

又$\because \angle BAD=\angle CAD$，$\therefore BD=CD$.

$\therefore BD=OD=CD$.

题 20 已知：如图 7 - 9，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，$AD\perp BC$ 于 D，E 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点.

求证：$\angle OAE=\angle DAE$.

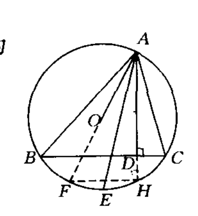


图 7 - 9

证明 延长 AO、AD 交于$\odot O$ 于 F、H，连结 FH.

$\because AF$ 为直径，$\therefore FH\perp AH$，且 $BC\perp AH$，

$\therefore BC/\!/FH$，$\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{CH}$.

$\because E$ 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$，$\therefore \overset{\frown}{FE}=\overset{\frown}{EH}$.

$\therefore \angle OAE=\angle DAE$.

题 21 在正三角形的外接圆周上任取一点，则这点与该三角形较远的顶点的距离等于这点与另两个顶点距离的和. 已知：如图 7 - 10，$\triangle ABC$ 是正三角形，P 是$\triangle ABC$ 的外接$\odot O$ 上一点. 当 P 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上时，求证：$PA=PB+PC$.

证明 延长 BP 到 D，使 $PD=PC$，连结 CD.

$\because \angle CPD=\angle BAC=60°$，

$\therefore \triangle PCD$ 是正三角形，$\angle BDC=60°$.

而 $\angle APC=\angle ABC=60°$，从而 $\angle APC=\angle BDC$.

又 $AC=BC$，$\angle PAC=\angle DBC$，$\therefore \triangle PAC \cong \triangle DBC$.

$\therefore PA=BD$，即 $PA=PB+PC$.

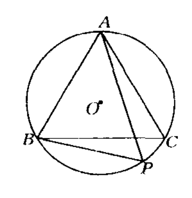


图 7-10

题 22 已知：如图 7-11，四边形 $ABCD$ 内接于圆，若 $\angle ADC$ 的平分线交 $\overset{\frown}{AB}$ 于 E，求证：BE 平分 $\angle ABC$ 的外角 $\angle ABF$.

证明 $\because DE$ 是 $\angle ADC$ 的平分线，

$\therefore \angle ADE=\frac{1}{2}\angle ADC$.

又 $\because \angle ABE=\angle ADE$，$\therefore \angle ABE=\frac{1}{2}\angle ADC$.

$\because \angle ABF=\angle ADC$，$\therefore \angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABF$.

即 BE 平分 $\angle ABF$.

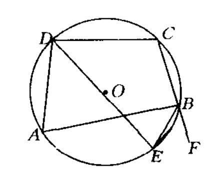


图 7-11

题 23 已知：如图 7-12，$\odot O$ 中，弦 AB、CD 互相垂直于 E，$AE=5$ cm，$BE=13$cm，O 到 AB 的距离为 $2\sqrt{10}$ cm.

求：CD 到圆心 O 的距离，O 到 E 的距离，及圆的半径.

解 作 $OF\perp AB$ 于 F，$OG\perp CD$ 于 G，连结 OE，

$\because AB$、CD 互相垂直，

$\therefore$ 四边形 $EFOG$ 是矩形.

$\because OF\perp AB$，$AE=5$ cm，$BE=13$ cm，

$\therefore AF=9$ cm，$EF=4$ cm，$OG=4$ cm，

$\therefore CD$ 到圆心 O 的距离为 4 cm.

$\because OF=2\sqrt{10}$ cm，

$\therefore GE=2\sqrt{10}$cm，$OG=4$ cm，

由勾股定理可得 $OE=\sqrt{OG^2+GE^2}=2\sqrt{14}$ cm.

$\because OF=2\sqrt{10}$ cm，$BF=9$ cm，

$\therefore$ 圆的半径 $OB=\sqrt{OF^2+BF^2}=11$ cm.

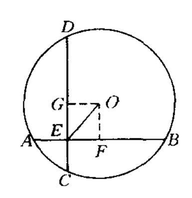


图 7-12

题 24 已知：如图 7-13，在 $\odot O$ 中，CD 是直径，AB 是弦，$AB\perp CD$ 于 M，$CD=15$ cm，$OM:OC=3:5$.

求：弦 AB 长.

解 连结 AO，

$\because CD=15$ cm，$\therefore CO=AO=7.5$cm.

$\because OM:OC=3:5$，$\therefore OM=4.5$ cm.

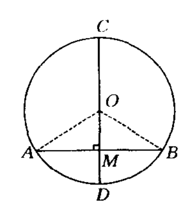


图 7-13

在△AOM 中，$AM=\sqrt{7.5^2-4.5^2}=6$ cm.

∵CD 是直径，AB 是弦，$AB\perp CD$ 于 M，

∴$AM=MB$，∴$AB=12$ cm.

题 25 已知：如图 7-14，在⊙O 中，M、N 分别是两条不平行的弦 AB 和 CD 的中点，且 $AB=CD$.

求证：$\angle AMN=\angle CNM$.

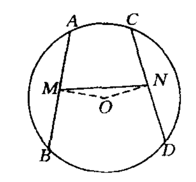


图 7-14

证明 连结 OM、ON，

∵M、N 分别是 AB、CD 的中点，

∴$\angle AMO=\angle CNO$.

∵$AB=CD$，∴$OM=ON$.

则$\angle OMN=\angle ONM$，

∴$\angle AMN=\angle CNM$.

题 26 已知：如图 7-15，四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接四边形，对角线 $AC\perp BD$，垂足为 E，M 为 AD 的中点，$ON\perp BC$.

求证：$EM=ON$.

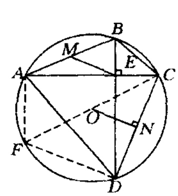


图 7-15

证明 连结 CO 并延长交⊙O 于 F，连结 AF、BF.

∵$CO=OF$，$CN=NB$，

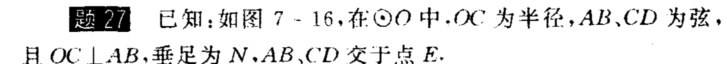
∴$ON=\frac{1}{2}BF$.

∵$AC\perp BD$，在 Rt△ADE 内，$EM=\frac{1}{2}AD$，

∵CF 是直径，$FA\perp AC$，

∴$AF\parallel BD$.

∴$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BF}$，$AD=BF$，∴$EM=ON$.



题 27 已知：如图 7-16，在⊙O 中，OC 为半径，AB、CD 为弦，且 $OC\perp AB$，垂足为 N，AB、CD 交于点 E.

求证：$AC\cdot BC=CE\cdot CD$.

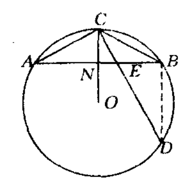
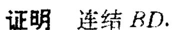


图 7-16



证明 连结 BD.

∵半径 $OC\perp$ 弦 AB，∴$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$.

∴$AC=BC$，$\angle CBA=\angle D$.

∵$\angle BCE=\angle DCB$，∴△BCE∽△DCB.

∴$\frac{BC}{DC}=\frac{CE}{BC}$，∴$BC^2=CD\cdot CE$.

∴$AC\cdot BC=CE\cdot CD$.

题 28 已知：如图 7-17，⊙O 内两弦 AB、CD 延长交于 P，PQ 是$\angle APC$ 的平分线，M、N 分别是$\overset{\frown}{AB}$与$\overset{\frown}{CD}$的中点，MN 交 AB 于 E、交 CD 于 F.

求证：$MN \perp PQ$.

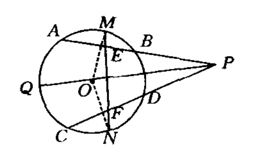


图 7 - 17

证明 连结 OM、ON.

$\because M$ 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，

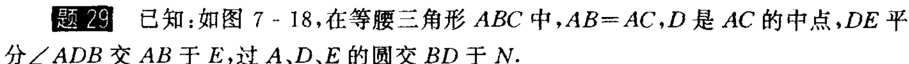
$\therefore OM \perp AB$，则$\angle M + \angle MEA = 90°$.

同理$\angle N + \angle NFC = 90°$.

又 $OM = ON$，$\angle M = \angle N$，$\therefore \angle MEA = \angle NFC$，

则$\angle PEF = \angle PFE$，$\triangle PEF$ 是等腰三角形.

PQ 是$\angle APC$ 的平分线，$\therefore MN \perp PQ$.



题29 已知：如图 7 - 18，在等腰三角形 ABC 中，$AB = AC$，D 是 AC 的中点，DE 平分$\angle ADB$ 交 AB 于 E，过 A、D、E 的圆交 BD 于 N.

求证：$BN = 2AE$.

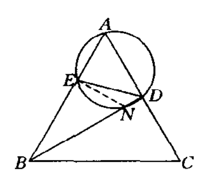


图 7 - 18

证明 连结 EN，

$\because DE$ 平分$\angle ADB$，$\therefore AE = EN$.

$\because \angle BEN = \angle BDA$，$\angle EBN = \angle DBA$，

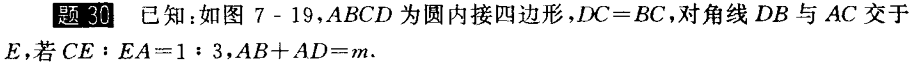
$\therefore \triangle BEN \backsim \triangle BDA$.

$\therefore \dfrac{BN}{EN} = \dfrac{AB}{AD}$.

又$\because AB = AC$，D 是 AC 的中点，

$\therefore AB = 2AD$，$\therefore \dfrac{BN}{EN} = 2$，

$\therefore BN = 2EN$，$BN = 2AE$.



题30 已知：如图 7 - 19，$ABCD$ 为圆内接四边形，$DC = BC$，对角线 DB 与 AC 交于 E，若 $CE : EA = 1 : 3$，$AB + AD = m$.

求 BD 的长 .

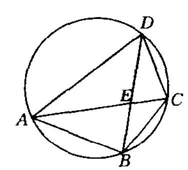


图 7 - 19

解 设 $EC = x$，则 $AE = 3x$，$AC = 4x$，

$\because DC = BC$，$\overset{\frown}{DC} = \overset{\frown}{BC}$，

$\therefore \angle CAB = \angle DBC$，$\angle ACB = \angle BCE$.

$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle BEC$.

$\therefore \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{BC}{EC}$. $BC^2 = AC \cdot EC = 4x^2$，

$\therefore BC = 2x$.

$\therefore \dfrac{EB}{AB} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{2}$，$EB = \dfrac{1}{2}AB$.

同理：$DE = \dfrac{1}{2}AD$.

$\therefore DB = \dfrac{1}{2}(AB + AD) = \dfrac{1}{2}m$.

题31 已知:如图 7 - 20,$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,AD 平分$\angle BAC$ 交$\odot O$ 于 D,$DE /\!/ AB$ 交 AC 于 P.

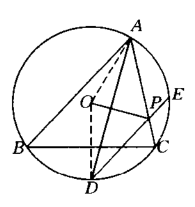


图 7 - 20

求证:$PO \perp AD$.

证明 $\because AD$ 平分$\angle BAC$,$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.

$\because DE /\!/ AB$,$\therefore \angle BAD=\angle ADE$.

$\therefore \angle CAD=\angle ADE$,$\therefore AP=DP$.

P 在 AD 的垂直平分线上,

连结 OA、OD,则 $OA=OD$,

O 在 AD 的垂直平分线上,$\therefore PO \perp AD$.



题32 已知:如图 7 - 21,在$\odot O$ 中,弦 AB 的长是半径 OA 的 $\sqrt{3}$ 倍,C 是$\overset{\frown}{AB}$的中点.

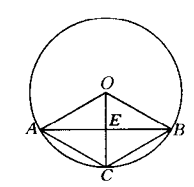


图 7 - 21

求证:$OACB$ 是菱形.

证明 $\because C$ 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,$\therefore \angle AOC=\angle BOC$.

$\because AO=BO$,$\therefore CO \perp AB$ 于 E,$AE-BE$.

在 Rt$\triangle AOE$ 中,$AB=\sqrt{3}\,OA$,

$\therefore AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}AO$.

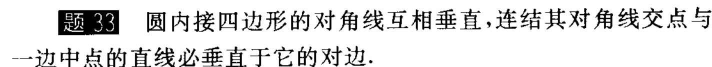
$\cos OAE=\dfrac{AE}{AO}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore \angle OAE=30^\circ$,$\angle AOE=60^\circ$.

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形.

$\therefore AO=AC=OC$. 同理:$BO=BC=OC$.

$\therefore AO=AC=BC=BO$,$\therefore$四边形 $OACB$ 是菱形.



题33 圆内接四边形的对角线互相垂直,连结其对角线交点与一边中点的直线必垂直于它的对边.

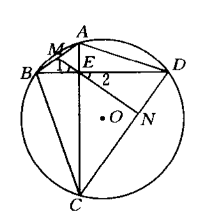


图 7 - 22

已知:如图 7 - 22,四边形 $ABCD$ 内接于圆,$AC \perp BD$ 于 E,M 是 AB 的中点,ME 的延长线交 CD 于 N.



求证:$MN \perp CD$.

证明 $\because AE \perp BE$,M 是 AB 的中点,

$\therefore BM=ME$,$\angle MBE=\angle 1$.

又$\angle 1=\angle 2$,$\angle ABE=\angle ECD$,

$\therefore \angle 2=\angle ECD$.

$\therefore \angle END=180^\circ-(\angle 2+\angle EDN)$

$=180^\circ-(\angle ECD+\angle EDC)$

$=\angle CED=90°$.

$\therefore MN\perp CD$.

题 34　已知:如图 7-23,$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,AE 切$\odot O$ 于 A,BD 平分$\angle ABC$ 交$\odot O$ 于 D,交 AC 于 E,$DF\perp AE$ 于 F.

求证:(1)$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{DE}$;

(2)$AC=2AF$.

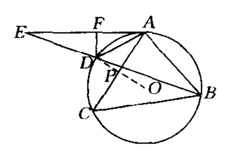
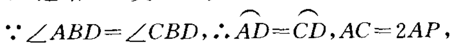


图 7-23

证明　(1)$\because \angle BEA=\angle AED, \angle EBA=\angle EAD$,

$\therefore \triangle BED\backsim\triangle AED$,$\therefore \dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{DE}$;

(2)连结 OD 交 AC 于 P.



$\because \angle ABD=\angle CBD$,$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$,$AC=2AP$,

$\because \begin{cases}\angle AFD=\angle APD,\\ \angle DAF=\angle DAP,\\ AD=AD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADF\cong\triangle ADP$,$AF=AP$,$AC=2AF$.

题 35　证明:由三角形外接圆上一点向三边所引的垂线足在一条直线上.

已知:如图 7-24,P 是$\triangle ABC$ 外接圆上的一点,$PD\perp BC$ 于 D,$PE\perp AC$ 的延长线于 E,$PF\perp AB$ 于 F.

求证:D、E、F 在一直线上.

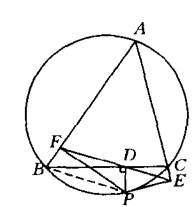


图 7-24

证明　连结 BP、CP,

$\angle PCE=\angle PBF$,

$\because PE\perp AC, PF\perp AB$,$\therefore \angle BPF=\angle CPE$.

$\because PE\perp AC, PD\perp BC$,

$\therefore P$、E、C、D 四点共圆.$\therefore \angle CPE=\angle CDE$.

同理$\angle BPF=\angle BDF$.

$\therefore \angle CDE=\angle BDF$,$BDC$ 为一直线,

$\therefore F$、D、E 在一直线上.

题 36　已知:如图 7-25,AB 为$\odot O$ 的直径,AC 与$\odot O$ 相切于点 A,$CE/\!/AB$ 交$\odot O$ 于 D、E.

求证:$EB^2=CD\cdot AB$.

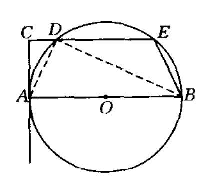


图 7-25

证明　连结 AD、DB.

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,AC 切$\odot O$ 于点 A,

$\therefore \angle CAB=90°$,$\angle ADB=90°$.

$\because CE/\!/AB$,$\therefore \angle C+\angle CAB=180°$.

$\therefore \angle C=90°$,$\angle C=\angle ADB$.

$\because \angle CAD=\angle DAB$，$\therefore \triangle ACD \backsim \triangle BDA$.

$\therefore \dfrac{CD}{AD}=\dfrac{AD}{AB}$，即 $AD^2=CD\cdot AB$.

由 $CE /\!/ AB$，得 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{EB}$，$\therefore AD=EB$，$\therefore EB^2=CD\cdot AB$.

题 37 已知：如图 7 - 26，AB 是$\odot O$ 的弦，C、D 在 AB 上，且 $AC=BD$，$EC\perp AB$ 于 C，$FD\perp AB$ 于 D.

求证：$EC=FD$.

证明 作 $OH\perp AB$ 于 H，$OM\perp CE$ 于 M，$ON\perp DF$ 于 N，连结 OE、OF，

$\because OH\perp AB$，$\therefore AH=BH$.

$\because AC=BD$，$\therefore CH=DH$.

又$\because OH\perp AB$，$EC\perp AB$，$OM\perp EC$，

$\therefore CHOM$ 是矩形.

同理可证 $DHON$ 是矩形.

$\therefore MC=OH=ND$.

$OM=CH=DH=ON$，且 $OE=OF$，

$\therefore \text{Rt}\triangle OME\cong \text{Rt}\triangle ONF$，$\therefore EM=FN$，

$\therefore EC=FD$.

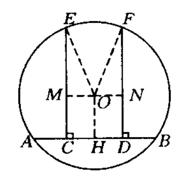
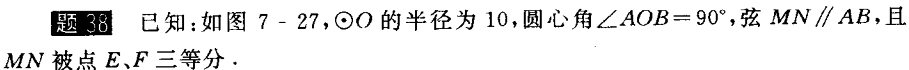


图 7 - 26



题 38 已知：如图 7 - 27，$\odot O$ 的半径为 10，圆心角$\angle AOB=90^\circ$，弦 $MN /\!/ AB$，且 MN 被点 E、F 三等分.

求证：O 点到 MN 的距离的平方等于半径的长.

证明 作 $OD\perp AB$ 于 D，OD 交 MN 于 C，

$\because MN /\!/ AB$，$\therefore OC\perp MN$，且 OC 平分$\angle AOB$.

设 $OC=x$，则 $EF=2x$，$FN=2x$，$CN=3x$.

$\because ON^2=OC^2+CN^2$，

$\therefore 10^2=x^2+(3x)^2$，$\therefore x=\sqrt{10}$.

$\therefore OC=\sqrt{10}$，半径为 10.

即 O 点到 MN 的距离的平方等于半径的长.

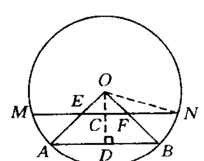


图 7 - 27

题 39 已知：如图 7 - 28，AB 是$\odot O$ 的直径，$OD /\!/ AC$.

求证：OD 平分$\overset{\frown}{BC}$.

证明 连结 OC，

$\because OD /\!/ AC$，

$\therefore \angle C=\angle COD$，$\angle A=\angle DOB$.

$\because OA=OC$，$\therefore \angle A=\angle C$.

$\therefore \angle COD=\angle DOB$，$\therefore OD$ 平分$\overset{\frown}{BC}$.

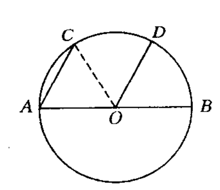


图 7 - 28

题40 已知：如图 7 - 29，OAB 是以 O 为圆心、OA 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆，在 $\overset{\frown}{AB}$ 上任取一点 P，过点 P 作切线 l，从点 B 作 l 的垂线 BE 交 l 于 E，从点 P 作 OB 的垂线 PF 交 OB 于 F.

(1)求 $\angle APB$ 的度数；(2)求证：$PE=PF$.

图 7 - 29

解 (1)∵ $\angle APB$ 的度数等于它所对优弧的度数的 $\frac{1}{2}$，而 $\angle AOB=90°$，

∴ $\angle APB=\frac{1}{2}(360°-90°)=135°$.

(2)连结 OP，∵ P 是切点，l 是切线，

∴ $OP\perp l$，又 $BE\perp l$，∴ $\angle PBE=\angle OPB$.

又 $OP=OB$，

∴ $\angle PBF=\angle OPB$，∴ $\angle PBE=\angle PBF$.

又∵ $\angle PEB=\angle PFB=90°$，$PB=PB$，

∴ $\triangle PEB\cong\triangle PFB$，∴ $PE=PF$.

题41 已知：如图 7 - 30，AB、EF 过⊙O 和⊙O' 的交点 C，且 $AB/\!/OO'$.

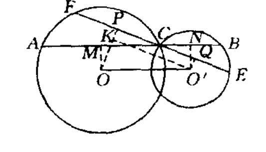


图 7 - 30

求证：$AB>EF$.

证明 过 O 作 $OM\perp AB$ 于 M，过 O' 作 $O'N\perp AB$ 于 N.

∵ $AB/\!/OO'$，∴ $OO'NM$ 是矩形.

又∵ $AM=CM$，$BN=CN$，

∴ $AB=2MN$，$AB=2OO'$.

过 O 作 $OP\perp EF$ 于 P，过 O' 作 $O'Q\perp EF$ 于 Q，过 O' 作 $O'K\perp OP$ 于 K，则 $O'QPK$ 是矩形.

又 $FP=CP$，$CQ=EQ$，

∴ $EF=2PQ$，$EF=2KO'$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO'K$ 中，$\angle O'KO=90°$，

∴ $OO'>KO'$，∴ $AB>EF$.

题42 已知：如图 7 - 31，在⊙O 中，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，$D$、$E$ 分别是半径 OA、OB 的中点.

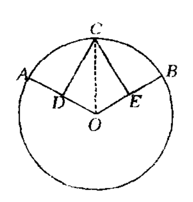


图 7 - 31

求证：$CD=CE$.

证明 连结 OC，

∵ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$，∴ $\angle AOC=\angle COB$.

∵ $AO=BO$，

∴ D、E 分别是 OA、OB 的中点，$OD=OE$.

又 $CO=CO$，∴$\triangle ODC\cong\triangle OEC$.

∴$CD=CE$.

题 43 已知：如图 7 - 32(1)，圆内接三角形 ABC 中，$AB=AC$，D 是 BC 边上的一点，E 是直线 AD 和$\triangle ABC$ 外接圆的交点.

(1)证明：$AB^2=AD\cdot AE$；

(2)当 D 为 BC 延长线上一点时，第(1)小问的结论成立吗？如果成立，请证明；不成立，请说明理由.

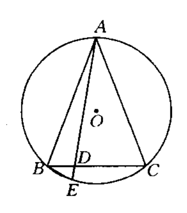


图 7 - 32(1)

证明 (1)连结 BE.

∵$\angle AEB=\angle ACB=\angle ABC$，

∴$\angle BAE=\angle BAE$，∴$\triangle ABE\backsim\triangle ADB$，$AB^2=AD\cdot AE$.

(2)当 D 为 BC 延长线上一点时，结论成立.

作图 7 - 32(2)，并连结 EC.

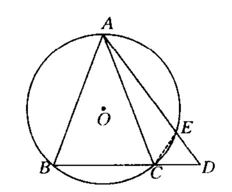


图 7 - 32(2)

在$\triangle ACE$ 和$\triangle ADC$ 中，

$\angle ACD+\angle ACB=180°$，$\angle AEC+\angle CED=180°$，

∴$\angle CED=\angle ABC=\angle ACB$，

∴$\angle ACD=\angle AEC$，$\angle DAC$ 为公共角，

∴$\triangle ACE\backsim\triangle ADC$，

∴$AC^2=AD\cdot AE$，∴$AB^2=AD\cdot AE$.

题 44 已知：如图 7 - 33，⊙O 中两条相等的弦 AB、CD 分别延长到 E、F，使 $BE=DF$.

求证：EF 的垂直平分线必过 O 点.

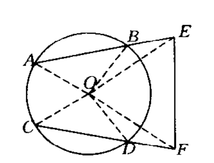


图 7 - 33

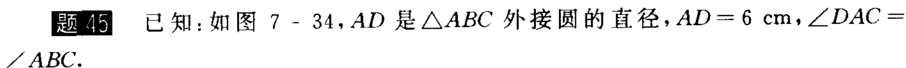
证明 连结 AO、BO、CO、DO、EO、FO，

∵$AO=CO$，$BO=DO$，$AB=CD$，

∴$\triangle AOB\cong\triangle COD$. ∴$\angle A=\angle C$.

又∵$AE=CF$，$AO=CO$，

∴$\triangle AEO\cong\triangle CFO$，∴$OE=OF$，∴$O$ 点在 EF 的垂直平分线上.



题 45 已知：如图 7 - 34，AD 是$\triangle ABC$ 外接圆的直径，$AD=6$ cm，$\angle DAC=\angle ABC$.

求 AC 的长.

解 连结 DC，则$\angle B=\angle D$，

∵$\angle DAC=\angle ABC$，∴$\angle DAC=\angle D$.

∵AD 是⊙O 的直径，∴$\angle ACD=90°$，

∴$\angle DAC=\angle D=45°$，$AC=DC$.

∵$AD=6$ cm，∴$AC=3\sqrt{2}$ cm.

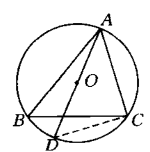


图 7 - 34

题46 已知：如图 7－35，在$\odot O$中，AB为直径，C、D为$\odot O$上的点，且C、D在AB的两旁，$OD\perp AB$.

求：$\angle ACB$与$\angle BCD$的度数.

解 $\because AB$为直径，

$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because OD\perp AB$，

$\therefore \overset{\frown}{BD}$为 90°，

$\therefore \angle BCD=45°$.

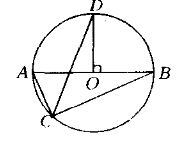


图 7－35

题47 已知：如图 7－36，在▱$ABCD$中，$\angle D=60°$，以钝角的顶点A为圆心，AB长为半径画圆分别交AD、BC于F、G，交BA的延长线于E.

求$\overset{\frown}{EG}$的度数.

解 连结AG，

在▱$ABCD$中，$\because \angle D=60°$，$\therefore \angle B=60°$.

$\therefore \angle EAF=60°$.

又$\because AB=AG$，$\therefore \angle AGB=60°$.

$\angle AGB=\angle GAF$，$\therefore \angle GAF=60°$.

$\therefore \angle EAG=120°$，$\overset{\frown}{EG}$是 120°的弧.

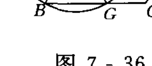


图 7－36

题48 已知：如图 7－37，在$\odot O$中，BC、DF为直径，A、E为$\odot O$上的点，$AB=AC$，$EF=\frac{1}{2}DF$.

求$\angle ABD+\angle CBE$的值.

解 $\because BC$为直径，$AB=AC$，$\therefore \angle ABC=45°$，$\overset{\frown}{AC}$为 90°.

$\because DF$为直径，$EF=\frac{1}{2}DF$，

$\therefore \angle DEF=90°$，$\angle EDF=30°$，$\angle F=60°$，$\overset{\frown}{DE}$为 120°.

$\because \overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CE}$为 150°，

$\therefore \angle ABD+\angle CBE=75°$

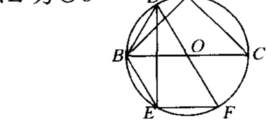


图 7－37

题49 已知：如图 7－38，等腰三角形ABC的顶角为 50°，$AB=AC$，以AB为直径作半圆与BC交于D，与AC交于E.

求：$\overset{\frown}{BD}$、$\overset{\frown}{DE}$和$\overset{\frown}{AE}$的度数.

解 连结AD，

$\because AB=AC$，AB为直径，

$\therefore AD\perp BC$，$\angle BAD=\angle CAD$.

$\because \angle BAC=50°$，$\therefore \angle BAD=\angle CAD=25°$，

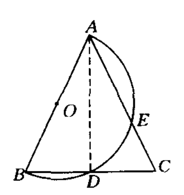


图 7－38

$\therefore \overset{\frown}{BD}$为 50°，$\overset{\frown}{DE}$为 50°.

$\because \overset{\frown}{AEB}$为半圆，$\therefore \overset{\frown}{AE}$为 80°.

题 50 已知：如图 7 - 39，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=60°$，$AC=3$ cm，$\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆.

求$\odot O$ 的半径.

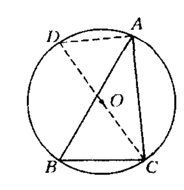


图 7 - 39

解 延长 CO 交$\odot O$ 于 D，连结 AD

$\therefore \angle DAC=90°$.

又$\angle D=\angle B=60°$.

$\therefore CD=\dfrac{AC}{\sin 60°}$，$\therefore CD=2\sqrt{3}$.

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{3}$.

题 51 已知：如图 7 - 40，a、b、c 分别是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边，且 a、b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+4(c+2)=(c+4)x$ 的两个根. 点 D 在 AB 上，以 BD 为直径的$\odot O$ 切 AC 于点 E.

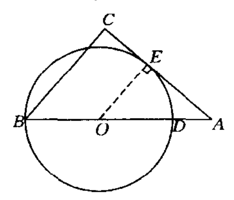
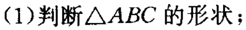


图 7 - 40



(1)判断$\triangle ABC$ 的形状；

(2)若 $\text{tg}A=\dfrac{3}{4}$，求 AE 的长.

解 (1)由题意，得 $a+b=c+4$，$ab=4(c+2)$，

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(c+4)^2-8(c+2)=c^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)由$\angle C=90°$，得 $\text{tg}A=\dfrac{a}{b}$.

$\because \text{tg}A=\dfrac{3}{4}$，$\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$.

设 $a=3k$，则 $b=4k$，从而 $c=5k(k>0)$.

代入 $a+b=c+4$，得 $k=2$，$\therefore a=6$，$b=8$，$c=10$.

连结 OE，$\because AE$ 是切线，$\therefore OE\perp AE$.

又$\because BC\perp AC$，$\therefore OE/\!/BC$.

$\therefore \dfrac{OE}{BC}=\dfrac{OA}{AB}$，$\therefore \dfrac{OE}{6}=\dfrac{10-OE}{10}$，$\therefore OE=\dfrac{15}{4}$.

在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，$AE=\dfrac{OE}{\text{tg}A}=\dfrac{\frac{15}{4}}{\frac{3}{4}}=5$.

题 52 已知：如图 7 - 41，两圆交于 A、B 两点，过 B 的直线交两圆于 C、D，两圆外一点 P，连结 CP、DP 分别交两圆于 E、F 两点.

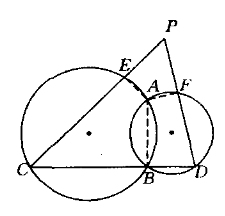


图 7 - 41

求证：P、E、A、F 四点共圆.

证明 连结 AE、AB、AF，

$\because \angle PEA=\angle ABC$，$\angle ABC=\angle AFD$，

$\therefore \angle AFD=\angle PEA$，

$\therefore P$、E、A、F 四点共圆.

题53 已知：如图 7-42，AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，P 为 CD 上一点，连结 AP、BP 并延长分别交$\odot O$ 于 E、F.

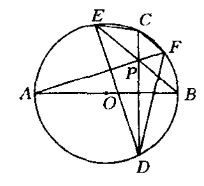


图 7-42

求证：$\dfrac{FC}{FD}=\dfrac{EC}{ED}$.

证明 $\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，$CD\perp AB$.

$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$.

$\therefore \angle AEC=\angle AED$，$\angle BFC=\angle BFD$，

$\therefore \dfrac{FC}{FD}=\dfrac{CP}{PD}$，$\dfrac{EC}{ED}=\dfrac{CP}{PD}$，

$\therefore \dfrac{FC}{FD}=\dfrac{EC}{ED}$.

题54 已知：如图 7-43，两圆相交于 P、Q，过一圆上两定点 A、B，作直线 AP、AQ 及 BP、BQ，交另一圆于 C、D、E、F.

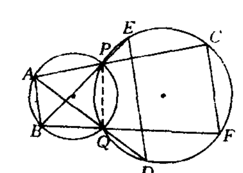


图 7-43

求证：$CF\parallel ED$.

证明 连结 PQ，

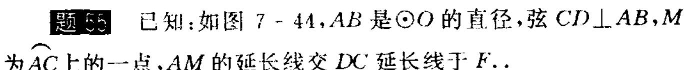
$\because \angle BAQ=\angle BPQ$，且$\angle BPQ=\angle D$，

$\therefore \angle BAQ=\angle D$，$\therefore AB\parallel DE$.

$\because \angle CPQ=\angle ABQ$，$\angle CPQ+\angle F=180^\circ$，

$\therefore \angle ABQ+\angle F=180^\circ$，$\therefore AB\parallel CF$，

$\therefore CF\parallel ED$.



题55 已知：如图 7-44，AB 是$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$，M 为$\overset{\frown}{AC}$上的一点，AM 的延长线交 DC 延长线于 F..

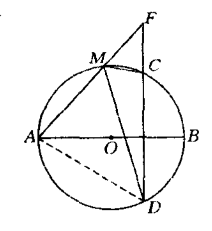


图 7-44

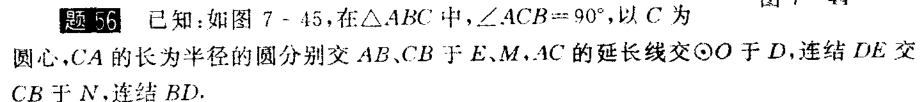
求证：$\angle AMD=\angle FMC$.

证明 连结 AD，

$\because AB\perp CD$，AB 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，$\therefore \angle ADC=\angle AMD$.

$\because \angle FMC=\angle ADC$，$\therefore \angle AMD=\angle FMC$.



题56 已知：如图 7-45，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，以 C 为圆心，CA 的长为半径的圆分别交 AB、CB 于 E、M，AC 的延长线交$\odot O$ 于 D，连结 DE 交 CB 于 N，连结 BD.

求证：(1)$\triangle ABD$ 是等腰三角形；

(2)$CM^2=CN\cdot CB$.

证明 (1)$\because CB\perp AD,DC=AC$,

$\therefore BD=BA$,即$\triangle ABD$是等腰三角形.

(2)$\because AD$是$\odot C$的直径,$\therefore\angle DEA=90°$,

$\therefore\angle EDA=90°-\angle A=\angle CBA$,

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle DNC\backsim\mathrm{Rt}\triangle BAC$.

$\therefore\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{NC}{AC}$,

又$\because AC=DC=CM$,$\therefore CM^2=CN\cdot CB$.

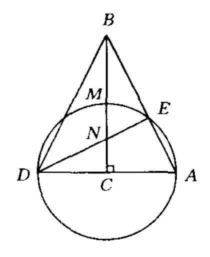


图 7 - 45

题57 已知:如图 7 - 46,P为正三角形ABC外接圆的$\overset{\frown}{BC}$上的一点,BP、CP的延长线分别与AC、AB的延长线交于E、F.

求证:$BC^2=BF\cdot CE$.

证明 $\because ABPC$是圆内接四边形,

$\therefore\angle CPE=\angle A=60°$.

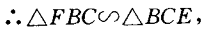
$\because\angle BCF=\angle CPE-\angle CBE=60°-\angle CBE$,

$\angle E=\angle ACB-\angle CBE=60°-\angle CBE$,

$\therefore\angle BCF=\angle E$.

又$\because\angle FBC=\angle BCE=120°$,

$\therefore\triangle FBC\backsim\triangle BCE$,



$\therefore\dfrac{BC}{BF}=\dfrac{CE}{BC}$,即$BC^2=BF\cdot CE$.

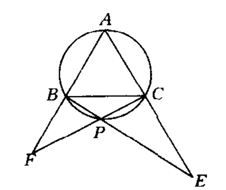


图 7 - 46

题58 已知:如图 7 - 47,$\odot M$与$\odot N$交于A、B点,M在$\odot N$上,$\odot N$上的弦MC分别交AB、$\odot M$于D、E.

求证:(1)$ME^2=MD\cdot MC$;

(2)E是$\triangle ABC$的内心.

证明 连结AM、MB、BE,

(1)$\because MA=MB$,$\therefore\angle MAB=\angle MBA$.

$\because\angle MCB=\angle MAB$,$\therefore\angle MCB=\angle MBA$.

又$\because\angle CMB=\angle BMD$,

$\therefore\triangle CMB\backsim\triangle BMD$.

$\therefore\dfrac{MB}{MD}=\dfrac{MC}{MB}$. $\therefore MB^2=MD\cdot MC$.

$\because ME=MB$,$\therefore ME^2=MD\cdot MC$.

(2)$\because MA=MB$,$\therefore\overset{\frown}{MA}=\overset{\frown}{MB}$,

$\therefore\angle MCA=\angle MCB$.

$\because\angle AMC=\angle ABC$,$\angle AMC=2\angle ABE$,

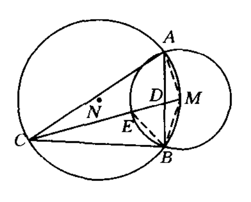


图 7 - 47

$\therefore \angle ABE=\angle CBE$. $\therefore E$ 是$\triangle ABC$的内心.

题 59　已知:如图 7 - 48,在$\triangle ABC$中,$\angle A=60°$,$BD\perp AC$于D,F是AB边上一点,E是BC的中点,且有$FE=\frac{1}{2}BC$,若$\triangle ABC$的面积为 32 cm^2.

求:$\triangle ADF$的面积.

解　连结FC,

$\because FE=\frac{1}{2}BC$,$E$是$BC$的中点,

$\therefore BF\perp CF$,又$BD\perp AC$,

$\therefore F$、B、C、D四点共圆.

$\therefore \angle ADF=\angle ABC$,$\angle A=\angle A$,

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle ADF$.

$\therefore S_{\triangle ADF} : S_{\triangle ABC}=AD^2 : AB^2$.

在$Rt\triangle ABD$中,$\because \angle A=60°$,$\therefore AD=\frac{1}{2}AB$.

$\therefore S_{\triangle ADF} : S_{\triangle ABC}=1 : 4$.

$\because S_{\triangle ABC}=32\ cm^2$,$\therefore S_{\triangle ADF}=8\ cm^2$.

图 7 - 48

题 60　已知:如图 7 - 49,$\odot O$半径$OA\perp OB$,弦$AC\perp BD$.

求证:$AD/\!/BC$.

证明　$\because OA\perp OB$,$\therefore \angle C=45°$.

$\because AC\perp BD$,$\therefore \angle DBC=45°$.

又$\angle C=\angle D$,$\therefore \angle D=\angle DBC$,

$\therefore AD/\!/BC$.

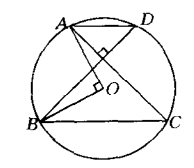


图 7 - 49

题 61　已知:如图 7 - 50,$\triangle ABC$的边AB是$\odot O$的直径,另两边BC和AC分别交$\odot O$于D、E两点,$DF\perp AB$交AB于F,交BE于G,交AC的延长线于H.

求证:$DF^2=HF\cdot GF$.

证明　连结AD.

$\because AB$是直径,$\therefore \angle AEB=90°$.

$\because HF\perp AB$,$\therefore \angle HFA=90°$.

$\therefore \angle HGE+\angle H=90°$,$\angle EAB+\angle H=90°$.

$\therefore \angle HGE=\angle EAB$.

$\because \angle HGE=\angle FGB$,$\therefore \angle FGB=\angle EAB$.

$\therefore Rt\triangle AHF\backsim Rt\triangle GBF$.

$\therefore \frac{HF}{BF}=\frac{AF}{GF}$,即$AF\cdot BF=HF\cdot GF$.

$\because \angle ADB=90°$,$DF\perp AB$,

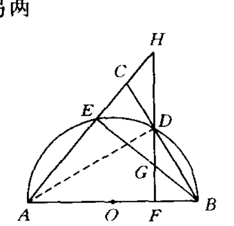


图 7 - 50

$\therefore DF^2=AF\cdot BF$. $\therefore DF^2=HF\cdot GF$.

题62 已知：如图 7-51，AB 是$\odot O$的弦，P 是 AB 所对优弧上一点，直径 $CD\perp AB$，PB 交 CD 于 E，延长 AP 交 CD 的延长线于 F.

求证：$\triangle EPF\backsim\triangle EOA$.

证明 $\because AB$ 是弦，直径 $CD\perp AB$，

$\therefore CD$ 垂直平分 AB，$AE=BE$.

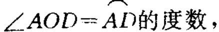
$\therefore \angle AEO=\angle BEO$，$\angle BEO=\angle PEF$，

$\therefore \angle AEO=\angle PEF$.

$\because \angle EPF=\angle B+\angle PAB$，

$\angle B+\angle PAB=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{BP})$的度数

$=\overset{\frown}{AD}$的度数，



$\angle AOD=\overset{\frown}{AD}$的度数，

$\therefore \angle AOD=\angle EPF$.

$\therefore \triangle AOE\backsim\triangle FPE$.

图 7-51

题63 已知：如图 7-52，在圆的内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=90°$，AB、DC 的延长线相交于 P，且 $AB=4$，$BC=1$，$AD=2\sqrt{3}$.

求$\angle D$ 的度数.

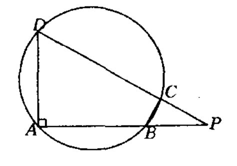


图 7-52

解 设 $PB=x$，$\because \angle A=90°$，$\therefore BC\perp DP$，

$\therefore \frac{AP}{AD}=\frac{CP}{BC}$，$\therefore \frac{4+x}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{x^2-1}}{1}$.

化简，得 $11x^2-8x-28=0$，解得 $x=2$，$x=-\frac{14}{11}$（舍去）.

$\therefore BP=2$，$AP=AB+BP=6$，

$\therefore \mathrm{tg}D=\frac{AP}{AD}=\frac{6}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

$\therefore \angle D=60°$.

二、直线与圆的位置关系

题64 简述直线和圆的位置关系.

答 平面内直线和圆的位置关系有(1)相离、(2)相切、(3)相交三种.

如果圆 O 的圆心到直线的距离为 d，圆 O 的半径为 r，则上述三种位置关系可以由 d 与 r 之间的大小来确定，即．

$d>r\Leftrightarrow$ 直线与圆 O 相离；

$d=r\Leftrightarrow$ 直线与圆 O 相切；

$d<r\Leftrightarrow$ 直线与圆 O 相交．

题 65 简述圆的切线的判定方法．

答 (1)直线和圆有唯一公共点时，这条直线叫做圆的切线．

(2)与圆心的距离等于半径的直线是圆的切线．

(3)经过半径的外端，并且垂直于该半径的直线是圆的切线．

题 66 简述圆的切线的性质．

答 (1)圆的切线垂直于过切点的半径．

(2)经过圆心且垂直于切线的直线必经过切点．

(3)经过切点且垂直于切线的直线必经过圆心．

题 67 简述与圆有关的比例线段．

答 (1)相交弦定理：圆内的两条相交弦被分点分成的两条线段长的积相等．

推论：若弦与直径垂直相交，那么弦的一半是它分直径所成的两条线段的比例中项．

(2)切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项．

(3)割线定理：从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等．

题 68 如图 7-53，TP、TQ 是⊙O 的两条切线，P、Q 是切点，R 是圆上的点，如果 $\angle PTQ=60°$，则 $\angle PRQ$ 是(　　)．

A. 120°　B. 60°　C. 30°　D. 90°

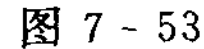


图 7-53

解 连结 OP、OQ，

$\because \angle OPT=\angle OQT=90°$，$\angle PTQ=60°$，

$\therefore \angle POQ=120°$，$\angle PRQ=60°$．

∴选择 B．

题 69 圆内两弦相交，其中一条弦长为 8 cm，且被交点平分，另一条弦被交点分为 1∶4 两部分，则这条弦长为(　　)．

A. 2 cm　　B. 8 cm　　C. 10 cm　　D. 16 cm

解 设弦的两部分分别为 x、$4x$，根据相交弦定理

$4\times 4=x\cdot 4x$，$\because x>0$，$x=2$，则弦长为 $x+4x=10$ cm．

∴选择 C．

题 70 $\triangle ABC$ 的三边长为 a、b、c，它的内切圆半径为 r，则 $\triangle ABC$ 的面积为(　　)．

A. $(a+b+c)r$　　　B. $\frac{1}{2}(a+b+c)r$

C. $\frac{1}{3}(a+b+c)r$　　　D. $\frac{1}{4}(a+b+c)r$

解　连结内切圆圆心与A、B、C三点，则把$\triangle ABC$分成三部分，面积和为$S=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}(a+b+c)r$.

$\therefore$选择B.

题71　如图7-54，PA切$\odot O$于A，直线PCD经过圆心，交圆于C、D两点，且弦$AB\perp CD$于M，则$MC:CP$等于(　　).

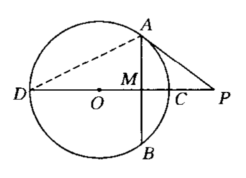
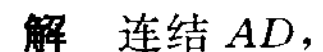
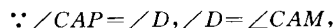


图7-54

A. $PC:PD$　　B. $PC:PA$

C. $AC:PA$　　D. $AM:AP$


解　连结AD,


$\because \angle CAP=\angle D, \angle D=\angle CAM$,

$\therefore \angle PAC=\angle MAC$,

$\therefore \frac{AM}{AP}=\frac{MC}{CP}$. $\therefore$选择D.

题72　如图7-55，AB切$\odot O$于B，AD交$\odot O$于C、D，$OP\perp CD$于P，若$AB=4$，$AD=8$，$OP=1$，则OA等于(　　).

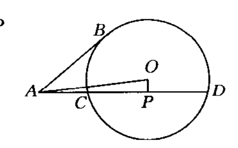


图7-55


A. $\sqrt{26}$　　B. $2\sqrt{6}$

C. $\sqrt{17}$　　D. $\sqrt{37}$

解　$\because AB^2=AC\cdot AD$,

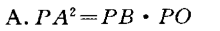
$\therefore 4^2=AC\cdot 8, AC=2, \therefore CD=6$.

$\because OP\perp CD$于P，$\therefore CP=DP=3, \therefore AP=5$,

$AO=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$. $\therefore$选择A.

题73　如图7-56，PA切$\odot O$于A点，PO交$\odot O$于B，则下列等式中成立的是(　　).

图7-56


A. $PA^2=PB\cdot PO$　　　B. $PA^2=PB\cdot BO$

C. $PA^2=PO^2-BO^2$　　　D. $PA^2=OB\cdot OP$

解　连结OA,

$\because PA$切$\odot O$于A，$\therefore \angle OAP=90°$.

$\therefore PO^2=PA^2+OA^2$,

$PA^2=PO^2-OA^2$.

$\because OA=OB, \therefore PA^2=PO^2-BO^2$.

$\therefore$选择C.

题74　如图7-57，AB切$\odot O$于B点，BE是$\odot O$的直径，切线AD与BE延长线交

于 C 点，若 $CD=\sqrt{3}CE$，则(　　).

A. $BE=3CE$　　　　B. $AD=CD$

C. $AB=BE$　　　　D. $CB=AB$

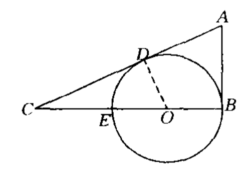


图 7 - 57

解　$\because AC$ 与⊙O 相切，

$\therefore CD^2=CE\cdot CB$，$(\sqrt{3}CE)^2=CE\cdot CB$.

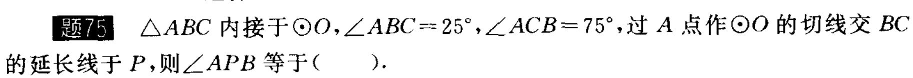
$\therefore CB=3CE$，$\therefore BE=2CE$，$BO=OE=CE$.

设 $AD=AB=x$，连结 OD，

则$\triangle COD\backsim\triangle CAB$，$\therefore \dfrac{OD}{x}=\dfrac{CD}{BC}$.

$\therefore \dfrac{CE}{x}=\dfrac{\sqrt{3}CE}{3CE}$，$x=\sqrt{3}CE$.

$\therefore AD=CD$. $\therefore$选择 B.



题75　$\triangle ABC$ 内接于⊙O，$\angle ABC=25°$，$\angle ACB=75°$，过 A 点作⊙O 的切线交 BC 的延长线于 P，则$\angle APB$ 等于(　　).

A. 62.5°　　B. 55°　　C. 50°　　D. 40°

解　$\because AP$ 是⊙O 的切线，$\therefore \angle PAC=\angle B=25°$，

$\angle APB=\angle ACB-\angle CAP=75°-25°=50°$. $\therefore$选择 C.

题76　如图 7 - 58，四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，AB 是直径，MN 切⊙O 于 C 点，$\angle BCM=38°$，那么$\angle ABC$ 的度数是(　　).

A. 38°　　B. 52°　　C. 68°　　D. 42°

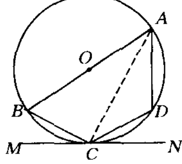
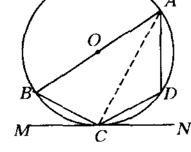



图 7 - 58

解　连结 AC，

$\because MN$ 切于⊙O 于 C，$\angle BCM=38°$，

$\therefore \angle BAC=\angle BCM=38°$.

$\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ACB=90°$，$\angle ABC=52°$.

$\therefore$选择 B.

题77　如图 7 - 59，PC、DA 为⊙O 的切线，AB 为⊙O 的直径，若已知 $DA=2$，$CD:DP=1:2$，则 AB 的长为(　　).

A. $4\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 4

图 7 - 59

解　$\because PC$、DA 为⊙O 的切线，$DA=2$，

$\therefore CD=2$.

$\because CD:DP=1:2$，$\therefore DP=4$.

在 Rt$\triangle DAP$ 中，$DP=4$，$DA=2$，

$\therefore \angle P=30°$.

在 Rt$\triangle OCP$ 中，$\angle P=30°$，$CP=6$，

$\therefore CO=2\sqrt{3}$.

$AB=2CO=4\sqrt{3}$

∴选择 A.

题78 AB 为⊙O 的直径，PM、PA 与⊙O 相切于 C、A，$\angle BCM=32°$，则$\angle P$ 等于(　　).

A. 50°　　B. 64°　　C. 60°　　D. 55°

解 连结 OC，$OC\perp PM$，$\angle BCM=32°$，$\angle OCB=58°$.

则$\angle B=58°$，$\angle COB=64°$.

$\therefore \angle AOC=116°$.

$\because OA\perp PA$，$OC\perp PC$，$\therefore \angle P=64°$. ∴选择 B.

题79 如图 7 - 60，⊙O_1与⊙O_2相交于 A、B 两点，AC 是⊙O_2的切线交⊙O_1于 C，AD 是⊙O_1的切线交⊙O_2于 D，则(　　).

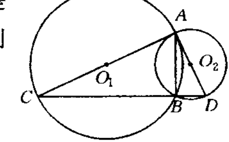


图 7 - 60

A. $AB^2=BC\cdot BD$

B. $AB\cdot BC=BD\cdot AD$

C. $AB\cdot AD=AC\cdot BC$

D. $AC^2=AB\cdot AD$

解 AD 切⊙O_1于 A，$\therefore \angle DAB=\angle C$.

同理$\angle CAB=\angle D$. $\therefore \triangle CAB\backsim\triangle ADB$.

$\therefore \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{AC}{AD}$，$\therefore AB^2=BC\cdot BD$. ∴选择 A.

题80 如图 7 - 61，$ABCD$ 为圆的内接正方形，$AD=4$，弦 AE 平分 BC 交 BC 于 M，则 CE 的长为(　　).

A. 2　　　　B. $2\sqrt{5}$

C. $2\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

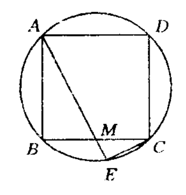


图 7 - 61

解 $\because AB=AD=4$，$BM=2$，$AM=2\sqrt{5}$，

$\therefore BM\cdot MC=AM\cdot ME$，$ME=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

又$\angle E=\angle B=90°$.

$\therefore EC=\sqrt{CM^2-ME^2}=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}$，∴选择 D.

题81 如图 7 - 62，若$\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=9$，$BC=5$，$CA=6$，内切圆⊙O 切 AB、BC、CA 于 D、E、F，则 AF 的长为(　　).

A. 5　　B. 10　　C. 7.5　　D. 4

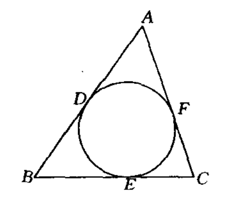


图 7 - 62

解　设 $AF=x, BD=y, CE=z$,

根据切线长定理,得 $AF=AD=x, BD=BE=y, CE=CF=z$,

$$\therefore \begin{cases} x+y=9, & ① \\ y+z=5, & ② \\ x+z=6. & ③ \end{cases}$$

①+③−②,得 $2x=10, x=5$,即 $AF=5$.

选择 A.

题82　已知:如图 7 - 63,AB 是⊙O 的直径,$AB=2$,$\angle CAB=30°$,$\angle ABD=120°$,点 C 在⊙O 上,且 $CD\perp BD$,AD 交⊙O 于点 E.

(1)求 BD 的长;

(2)求证:$CD^2=DE\cdot DA$.

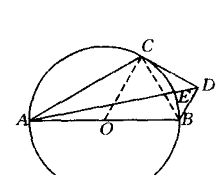


图 7 - 63

解　(1)连结 BC,

$\angle ACB=90°$,$\angle CAB=30°$,$BC=\dfrac{1}{2}AB=1$.

又 $CD\perp BD$,$\triangle CDB$ 是直角三角形,

$\angle CBA=60°$,

$\angle CBD=60°$,$\angle BCD=30°$,

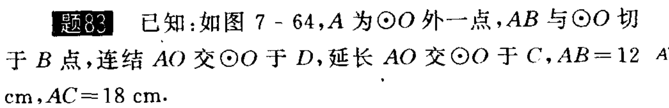
$\therefore DB=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}$.

(2)连结 OC,$AO=CO$,

$\angle OCA=30°$,$\angle OCB=60°$,

$\therefore \angle OCD=\angle OCB+\angle BCD=90°$.

$\therefore CD$ 是⊙O 的切线,则 $CD^2=DE\cdot DA$.



题83　已知:如图 7 - 64,A 为⊙O 外一点,AB 与⊙O 切于 B 点,连结 AO 交⊙O 于 D,延长 AO 交⊙O 于 C,$AB=12$ cm,$AC=18$ cm.

求⊙O 的直径.

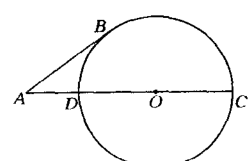



图 7 - 64

解　由切割线定理,得 $AB^2=AD\cdot AC$,

$\therefore 12^2=AD\cdot 18$,$AD=8$.

$\therefore DC=10$ cm,即⊙O 的直径为10 cm.

题84　已知:如图 7 - 65,P 为⊙O 外一点,PA、PB 分别与⊙O 切于 A、B 两点,OP 与 AB 交于 C,$\angle APB=60°$,⊙O 的半径为8 cm.

求 AB 的长.

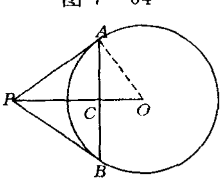


图 7 - 65

解 连结 OA，则 $\angle OAP=90°$.

$\because OP$ 平分 $\angle APB$，$\angle APB=60°$，

$\therefore \angle APO=30°$.

$\therefore \text{tg}30°=\dfrac{OA}{PA}$，$PA=8\sqrt{3}$.

$\because PA=PB$，$\angle APB=60°$.

$\therefore \triangle PAB$ 是等边三角形，

$\therefore AB=8\sqrt{3}$ cm.

题85 已知：如图 7 - 66，A 为 $\odot O$ 外一点，AB、AC 切 $\odot O$ 于 B、C，延长 OB 到 D，使 $BD=OB$，连结 AD，$\angle DAC=90°$，$\odot O$ 的半径为4 cm.

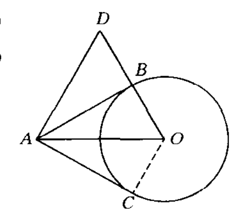


图 7 - 66

求 $\triangle ABD$ 的周长.

解 连结 OC，

$\because OB\perp AB$，$OC\perp AC$，$BO=CO$，$AO=AO$，

$\therefore \text{Rt}\triangle OAB\cong \text{Rt}\triangle OAC$.

$\because OD\perp AB$，$BD=OB$，$AB=AB$，

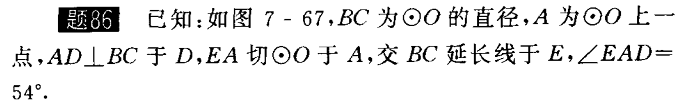
$\therefore \triangle ABO\cong\triangle ABD$.

$\therefore \triangle OAC\cong\triangle OAB\cong\triangle DAB$.

$\because \angle DAC=90°$，$\angle DAB=\angle OAB=\angle OAC$，

$\therefore \angle BAO=30°$，

$\because BO=4\text{cm}$，$\therefore AO=8\text{cm}$，$AB=4\sqrt{3}$ cm.



$\therefore \triangle OAB$ 的周长为$(12+4\sqrt{3})$ cm，则 $\triangle ABD$ 的周长为$(12+4\sqrt{3})$ cm.

题86 已知：如图 7 - 67，BC 为 $\odot O$ 的直径，A 为 $\odot O$ 上一点，$AD\perp BC$ 于 D，EA 切 $\odot O$ 于 A，交 BC 延长线于 E，$\angle EAD=54°$.

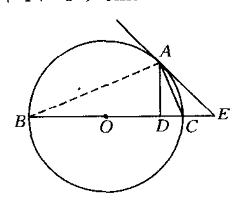


图 7 - 67



求 $\angle DAC$ 的度数.

解 连结 AB，

$\because BC$ 为 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle BAC=90°$.

$\because AD\perp BC$，$\therefore \angle B=\angle CAD$.

$\because EA$ 为 $\odot O$ 的切线，$\therefore \angle B=\angle EAC$，

$\therefore \angle CAD=\angle EAC$，$\angle EAD=54°$. $\therefore \angle DAC=27°$.

题87 已知：如图 7 - 68，$\odot O$ 的半径 OA、OB 互相垂直，过 A 的一条直线交 OB 于 C，交 $\odot O$ 于 E，过 E 引 $\odot O$ 的切线交 OB 的延长线于 D，且 $EC=DE$，求 $\angle A$ 的度数.

解 连结 OE，设 $\angle A=x$，

$\because OA=OE$，$\angle OEA=\angle A=x$，

$BO \perp OA$，$\angle OCA=90^\circ-x$，

$\therefore \angle ECD=90^\circ-x$.

$\because EC=DE$，$\therefore \angle D=90^\circ-x$.

$\therefore \angle DEC=180^\circ-2(90^\circ-x)=2x$.

$\because OE \perp DE$，$\therefore \angle DEO=90^\circ$，

$\therefore \angle DEC+\angle OEC=90^\circ$，$2x+x=90^\circ$，$x=30^\circ$.

即$\angle A$的度数是30°.

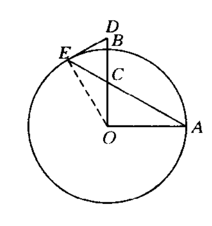


图 7 - 68

题88 已知：如图 7 - 69，在$\triangle APQ$中，$AP=QP$，$AP=\sqrt{3}PB$，以AB为直径的$\odot O$过点P.

求证：直线PQ与$\odot O$相切.

证明 连结OP，$\because AB$是直径，

$\therefore \angle APB=90^\circ$.

$\because AP=\sqrt{3}PB$，$\therefore \dfrac{AP}{PB}=\sqrt{3}$.

而$\text{ctg}A=\dfrac{AP}{PB}$，$\therefore \text{ctg}A=\sqrt{3}$，$\angle A=30^\circ$.

又$AP=QP$，$\therefore \angle Q=\angle A=30^\circ$.

又$\angle PBA=60^\circ$，$PB=\dfrac{1}{2}AB=OB$.



$\because OP=OB=PB$，$\therefore \triangle OPB$是等边三角形，

$\therefore \angle POB=60^\circ$，$\therefore \angle OPQ=90^\circ$.

P是圆上一点，$\therefore PQ$是$\odot O$的切线.

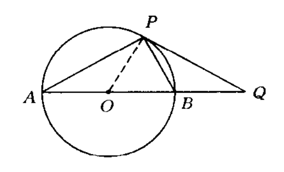
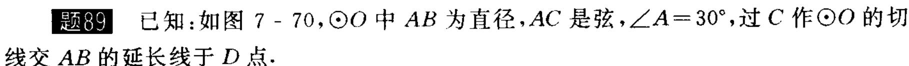


图 7 - 69



题89 已知：如图 7 - 70，$\odot O$中AB为直径，AC是弦，$\angle A=30^\circ$，过C作$\odot O$的切线交AB的延长线于D点.

(1)求证：$BD=\dfrac{1}{2}AB$；

(2)若$BD=2$ cm，求$\triangle ACD$的周长.

解 (1)连结BC、OC，

$\because AB$是直径，$\angle A=30^\circ$，

$\therefore \angle ACB=90^\circ$，$\angle CBA=60^\circ$，且$BC=\dfrac{1}{2}AB$，



$\because CD$是$\odot O$的切线，

$\therefore \angle DCB=\angle A=30^\circ$，$\therefore \angle D=30^\circ$，

$\therefore BD=BC$，$\therefore BD=\dfrac{1}{2}AB$.

(2)$\because \angle A=\angle D=30^\circ$，$\therefore AC=DC$，

$\because BD=BC=2\text{cm}$，$\text{tg}A=\dfrac{BC}{AC}$，$\therefore AC=\dfrac{2}{\text{tg}30^\circ}=2\sqrt{3}$ cm.

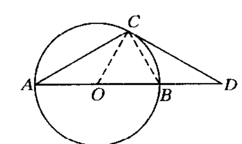


图 7 - 70

$\therefore DC=2\sqrt{3}$ cm. $\therefore AB=2BC=4$ cm.

$\therefore \triangle ACD$ 的周长为$(6+4\sqrt{3})$ cm.

题90 已知:如图 7 - 71,BC 是$\odot O$ 的直径,AC 切$\odot O$ 于点 C,AB 交$\odot O$ 于点 D,若 $AD:DB=2:3$,$AC=10$.求 $\sin B$ 的值.

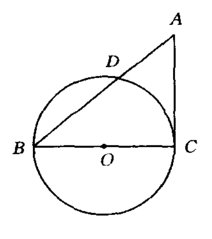


图 7 - 71

解 由已知 $AD:DB=2:3$,可设 $AD=2k$,$DB=3k(k>0)$,

$\because AC$ 切$\odot O$ 于点 C,线段 ADB 为$\odot O$ 的割线,

$\therefore AC^2=AD\cdot AB$.

$\because AB=AD+DB=2k+3k=5k$,

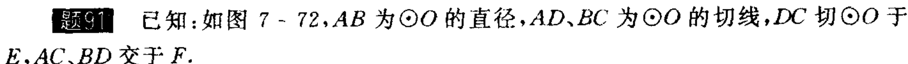
$\therefore 10^2=2k\cdot 5k$,$\therefore k^2=10$,又$\because k>0$,$\therefore k=\sqrt{10}$.

$\therefore AB=5k=5\sqrt{10}$.

$\because AC$ 切$\odot O$ 于点 C,BC 为$\odot O$ 的直径,

$\therefore AC\perp BC$.

$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中,$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{10}{5\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.



题91 已知:如图 7 - 72,AB 为$\odot O$ 的直径,AD、BC 为$\odot O$ 的切线,DC 切$\odot O$ 于 E,AC、BD 交于 F.

(1)求证:$EF/\!/DA$;

(2)若 $AD=3$ cm,$BC=5$ cm,求 EF 的长.

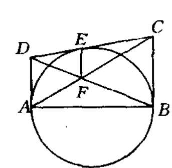
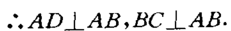


图 7 - 72

解 (1)$\because AD$、BC 为$\odot O$ 的切线,



$\therefore AD\perp AB$,$BC\perp AB$.

$\therefore AD/\!/BC$,$\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AF}{CF}$.

$\because DC$ 切$\odot O$ 于 E,

$\therefore AD=DE$,$BC=CE$.

$\therefore$ 在$\triangle CDA$ 中,$\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{AF}{CF}$,

$\therefore EF/\!/AD$.

(2)$\because AD=3$ cm,$\therefore DE=3$ cm,

$\because BC=5$ cm,$\therefore CE=5$ cm.

在$\triangle CDA$ 中,$EF/\!/AD$,

$\therefore \dfrac{CE}{CD}=\dfrac{EF}{AD}$,$\dfrac{5}{3+5}=\dfrac{EF}{3}$,$\therefore EF=\dfrac{15}{8}$ cm.

题92 已知:如图 7 - 73,$\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,以 BC 边为直径做半圆交 AB 于 E,交 AC 边的中线 BD 于 F.

求证:$BC:BE=CF:EF$.

证明 $\because DC\perp BC$,$CF\perp BD$,

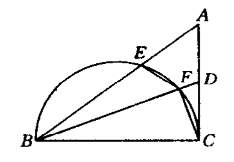


图 7 - 73

$\therefore \triangle BCF \backsim \triangle BDC, \frac{BC}{BD}=\frac{CF}{CD}.$

$\because \angle ADB+\angle BDC=180°,$

$\angle ADB+\angle FCB=180°, \angle BEF+\angle FCB=180°,$

$\therefore \angle BEF=\angle BDA, \angle EBF=\angle DBA,$

$\therefore \triangle BEF \backsim \triangle BDA,$

$\therefore \frac{BE}{BD}=\frac{EF}{AD}.$

$\because AD=CD, \therefore \frac{BC}{CF}=\frac{BE}{EF}.$ 即：$BC:BE=CF:EF.$

题93 已知：如图 7 - 74，在⊙O 中，弦 $AB // CD$，连结 AC、BC，过点 B 作⊙O 的切线交 CD 延长线于 P

求证：$\frac{PB}{PD}=\frac{CB}{CA}.$

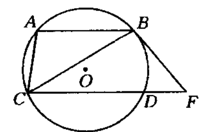


图 7 - 74

证明 ∵PB 是⊙O 的切线，

$\therefore PB^2=PD \cdot PC, \therefore \frac{CP}{PB}=\frac{PB}{PD}.$

又∵$\angle A=\angle CBP, \angle ABC=\angle BCP,$


$\therefore \triangle ABC \backsim \triangle BCP,$

$\therefore \frac{CB}{CA}=\frac{CP}{PB}, \therefore \frac{PB}{PD}=\frac{CB}{CA}.$

题94 已知：如图 7 - 75，A、B、C 三点在⊙O 上，过⊙O 外一点 P 的切线 PA 交割线 PBC 于 P，$BC=3PB$，延长△PAC 的中线 AN 交⊙O 于点 M.

求证：(1)$PC=2PA$；

(2)$MA:MB=MC:MN.$

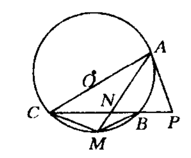
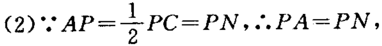


图 7 - 75

证明 (1)设 $PB=x$，则 $BC=3x, PC=4x.$

$AP^2=BP \cdot PC=4x^2, \therefore AP=2x, PC=2PA.$


(2)$\because AP=\frac{1}{2}PC=PN, \therefore PA=PN,$

$\therefore \angle CNM=\angle ANP=\angle NAP=\angle ACM,$

$\therefore \triangle CNM \backsim \triangle ACM, \therefore \frac{CM}{MN}=\frac{AM}{CM}.$

又$\angle NCM=\angle CAM=\angle CBM, \therefore CM=BM,$

$\therefore \frac{MA}{MB}=\frac{MC}{MN}, MA:MB=MC:MN.$

题95 已知：如图 7 - 76，AB 是⊙O 的直径，AC 是⊙O 的切线，A 是切点，割线 CDF 交 AB 于 E，且 $CD:DE:EF=1:2:1$，若 $AC=4$，求⊙O 的直径 AB.

解 设 $CD=x$，则 $DE=2x, EF=x,$

∵AC 是⊙O 的切线，

$\therefore AC^2=CD \cdot CF, 16=x(x+2x+x).$

$\therefore x=2, AC=4, CE=6.$

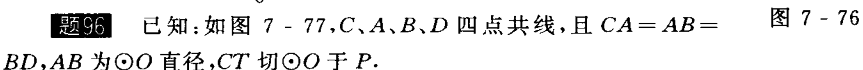
$\therefore AE=\sqrt{CE^2-AC^2}=\sqrt{6^2-4^2}=2\sqrt{5}.$

又$\because AE\cdot EB=DE\cdot EF$,

$\therefore 2\sqrt{5}EB=4\times 2, BE=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}.$

$\therefore AB=AE+BE=\dfrac{14}{5}\sqrt{5}.$

图 7 - 76



题96 已知:如图 7 - 77,C、A、B、D 四点共线,且 $CA=AB=BD$,AB 为⊙O 直径,CT 切⊙O 于 P.

求证:$\angle CPA=\angle DPT$.

证明 过 P 点作⊙O 的直径 PE,连接 DE、CE,延长 PA 交 CE 于点 F.

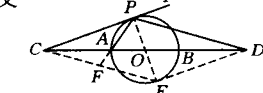


图 7 - 77

$\because CA=AB=BD$,AB 为⊙O 的直径.

$\therefore CO=DO$,且 $PO=EO$,

$\therefore CEDP$ 为平行四边形,

$\angle TPD=\angle PCE$,

$\because CO$ 为$\triangle CPE$ 的中线,$CA=2AO$,

$\therefore A$ 为 Rt$\triangle CPE$ 的重心,

$\therefore PF$ 为 Rt$\triangle CPE$ 的斜边 CE 上的中线,且 $CF=PF$,

即$\angle ECP=\angle CPA$,$\therefore \angle CPA=\angle DPT$.

题97 已知:如图 7 - 78,从直径 AB 的延长线上一点 C 作圆的切线 CD,切点为 D,$\angle ACD$ 的平分线交 BD 于 F,交 AD 于 E. 求证:$\angle CED=45°$.

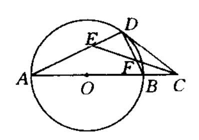


图 7 - 78

证明 在$\triangle EAC$ 和$\triangle FDC$ 中,CD 与圆相切,

$\therefore \angle EAC=\angle FDC$,$\angle ACE=\angle DCF$;

$\therefore \angle AEC=\angle DFC$,$\therefore \angle DEF=\angle DFE$.

而$\angle EDF=90°$,$\therefore \triangle DEF$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle CED=45°$.

题98 已知:如图 7 - 79,AE 切⊙O 于 D,并与弦 CB 的延长线交于 A,CD 平分$\angle BDE$,$CD=7$,$AD=12$.

求:AC 的长.

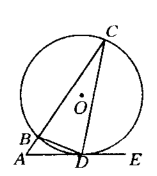


图 7 - 79

解 $\because AD$ 为⊙O 的切线,

$\therefore \angle CDE=\angle CBD$,而$\angle CDE=\angle CDB$,

$\therefore \angle CBD=\angle CDB$,$CB=CD$.

$\because CD=7$,$\therefore CB=7$. 而 $AD^2=AB\cdot AC$,

设 $AC=x$，$AB=x-7$，$AD=12$，

$\therefore 12^2=x(x-7)$，$x^2-7x-144=0$，

$x_1=16$，$x_2=-9$（舍去负值），$\therefore AC=16$.

题99 已知：如图 7 - 80，过$\triangle ABC$ 的外心 O 及 AB 的中点 D 的直线交 AC 于 E，过$\odot O$ 上 B、C 两点的切线交于 F.

求证：$EF\parallel AB$.

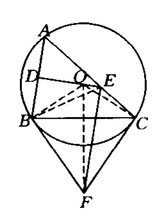


图 7 - 80

证明 连结 OB、OC、OF、BE，

$\because \odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆，

$\therefore DE$ 垂直平分 AB.

则 $AE=BE$，且$\angle BEC=2\angle A$.

又$\because BF$、CF 是$\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OBF=\angle OCF=90°$，$O$、$B$、$F$、$C$ 四点共圆，OF 是此圆的直径.

又$\angle BOC=2\angle A$，$\therefore \angle BOC=\angle BEC$.

$\therefore$点 E 在 O、B、F、C 所确定的圆上.

$\angle OEF=90°$，$\therefore AB\parallel EF$.

题100 已知：如图 7 - 81，AB 是半圆 O 的直径，点 D 在半圆上（不与 A、B 重合），C 点是$\overset{\frown}{AD}$的中点，$CF\perp AB$，垂足为 F，连结 AD 交 CF 于 E.

(1)求证：$\triangle AEC$ 是等腰三角形；

(2)设 $AB=4$，当$\angle DAB=30°$时，求 CE 的长.

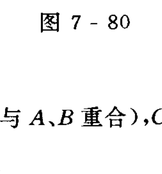


图 7 - 81

证明 (1)连结 BC.

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle CAD=\angle B$.

又$\because AB$ 为直径，$\therefore \angle B=90°-\angle CAB$.

而 $CF\perp AB$，$\angle ACF=90°-\angle CAB$.

$\therefore \angle B=\angle ACF$，$\therefore \angle ACF=\angle CAE$，$\therefore \triangle AEC$ 是等腰三角形.


(2)$\because \angle DAB=30°$，$\therefore \overset{\frown}{BD}$的度数为$60°$，$\overset{\frown}{AD}$的度数为$120°$.

又$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{DC}$，$\therefore \angle B=30°$，$\angle CAF=60°$.

又$\because$在 Rt$\triangle ACF$ 中，设 $AF=x$，

则 $CF=\text{tg}60°\cdot x=\sqrt{3}x$.

又$\because$在 Rt$\triangle ACB$ 中，$CF\perp AB$，

$\therefore CF^2=AF\cdot FB$，即$(\sqrt{3}x)^2=x\cdot(4-x)$.

解得 $x_1=1$，$x_2=0$（舍去）.

在 Rt$\triangle AEF$ 中，$AE=\dfrac{AF}{\cos30°}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore CE=AE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

题101 已知:如图 7 - 82,过圆周上一点 P 作直径 AB 的垂线 PM,M 为垂足,过 P 及 A 作圆的切线交于 Q,BQ 交 PM 于 N.

求证:$PN=MN$.

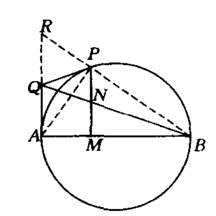


图 7 - 82

证明 延长 BP、AQ 交于 R,连结 AP.

则$\angle APR=90°$,$\therefore \triangle APR$ 为直角三角形.

$\because QA$、QP 为圆的两条切线,

$\therefore QA=QP$,Q 为 AR 的中点.

$\because RA\perp AB$,$PM\perp AB$,

$\therefore PM/\!/RA$,$\frac{PN}{RQ}=\frac{BN}{BQ}$,$\frac{MN}{QA}=\frac{BN}{BQ}$.

$\therefore \frac{PN}{RQ}=\frac{MN}{QA}$,$\therefore PN=MN$.

题102 已知:如图 7 - 83,从圆外一点 P 作圆的一条切线 PA,A 为切点,过点 P 作一直线与圆交于 B、C 两点,弦 $CD/\!/AP$,PD 与圆交于 E,连结 EB 并延长交 AP 于 M.

求证:$AM=PM$.

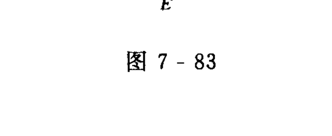


图 7 - 83

证明 $\because PA/\!/CD$,$\therefore \angle C=\angle MPB$.

又$\angle C=\angle E$,$\therefore \angle E=\angle MPB$.

$\because \angle BMP=\angle PME$,

$\therefore \triangle BMP\backsim\triangle PME$,$\therefore PM^2=MB\cdot ME$.

$\because MA$ 是圆的切线,$\therefore AM^2=MB\cdot ME$.

$\therefore AM^2=PM^2$,$AM=PM$.

题103 已知:如图 7 - 84,$\triangle ABC$ 中,$\angle BAC=90°$,$AD\perp BC$ 于 D,过 A、D 两点的$\odot O$ 交 BC 于点 E,且 $BE=CD$. 作 BF 切$\odot O$ 于点 F.

求证:$BF\cdot BC=AB\cdot AC$.

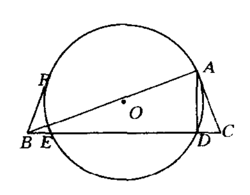


图 7 - 84

证明 $\because \angle BAC=90°$,$AD\perp BC$,

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle CAD$.

$\therefore \frac{BD}{AD}=\frac{AD}{CD}$,$\therefore AD^2=CD\cdot BD$.

由切割线定理,得 $BF^2=BE\cdot BD$.

又 $BE=CD$,$\therefore BF^2=AD^2$,$BF=AD$.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$,

$\therefore AD\cdot BC=AB\cdot AC$,$\therefore BF\cdot BC=AB\cdot AC$.

题104 已知:如图 7 - 85,AB 是⊙O 的直径,点 C 在⊙O 上,过 O 作 $EO/\!/CB$ 交 AC 于 E,延长 EO 到 F,使 $EF=CB$,连结 AF 并延长交⊙O 于 G、交 CB 的延长线于 D,连结 BE 并延长交⊙O 于 H.

求证:(1)$AG=HB$;(2)$AE^2=HE\cdot FD$.

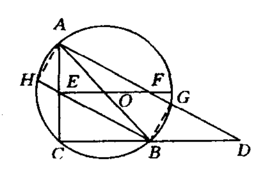


图 7 - 85

证明 (1)连结 AH、GB.

∵AB 为⊙O 的直径,

∴$\angle AHB=\angle AGB=90°$,

∴$AH\perp HB$,$BG\perp AG$.

∵O 是 AB 的中点,$EO/\!/CB$,即 $EF/\!/CD$,

∴E、F 分别是 AC、AD 的中点,∴$EF=\frac{1}{2}CD$.

∵$EF=CB$,∴$BD=CB=EF$,

∴四边形 $EBDF$ 是平行四边形,∴$EB/\!/FD$,

∴$AH\perp AG$,∴$AH/\!/BG$,

∴四边形 $AHBG$ 是矩形,∴$AG=HB$.

(2)∵四边形 $EBDF$ 是平行四边形,∴$EB=FD$.

∵$AE\cdot EC=HE\cdot EB$,$AE=EC$,∴$AE^2=HE\cdot FD$.

题105 已知:如图 7 - 86,从圆心 O 作 OA 垂直于圆外一条直线 MN,过垂足 A 作割线交⊙O 于 B、C,过 B、C 分别作⊙O 的切线交 MN 于 E、D.

求证:$AD=AE$.

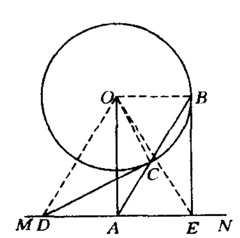


图 7 - 86

证明 连接 OB、OC、OD、OE.

∵CD 是⊙O 的切线.

∴$\angle OCD=90°$,且$\angle OAD=90°$,

∴O、C、A、D 四点共圆,$\angle ODA=\angle OCB$.

∵BE 是⊙O 的切线.

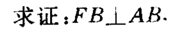
∴$\angle OBE+\angle OAE=180°$,

∴O、B、E、A 四点共圆,$\angle OEA=\angle OBC$.

又∵$OB=OC$,∴$\angle OCB=\angle OBC$.

∴$\angle ODA=\angle OEA$,$OD=OE$,

∴$AD=AE$.

 已知:如图 7 - 87,△ABC 中,$AB=AC$,以 AB 为直径作半圆 O,分别交 BC、AC 于 D、E,过 E 作⊙O 的切线 EF 与 OD 延长线交于 F.

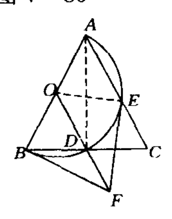


图 7 - 87

求证:$FB\perp AB$.

证明 连结 OE、AD.

$\because AB=AC, AD\perp BC, \angle BAD=\angle CAD$,

$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DE}$, $\therefore \angle BOF=\angle EOF$,

又 $OB=OE, OF=OF$,

$\therefore \triangle OBF\cong\triangle OEF$,

$\because \angle OEF=90^\circ$, $\therefore \angle OBF=90^\circ$, $FB\perp AB$.

题107 已知:如图 7 - 88,把弦 AB 向两端延长到 C、D,使得 $AC=BD$,过 C、D 在 AB 两侧分别作圆的切线 CK、DF,切点为 E、F.

求证:EF 平分 AB.

证明 设 EF 和 AB 的交点为 G,过 D 作 CE 的平行线与 EF 的交点为 H.

$\therefore \angle DHG=\angle CEG$, $\angle HDG=\angle ECG$.

$\because EK$、FD 都是圆的切线,

$\therefore \angle KEF=\angle DFE$.

又 $\because EK\parallel DH$,

$\therefore \angle KEF=\angle DHF$.

$\therefore \angle DFE=\angle DHF$, $\therefore DF=DH$.

$\because DF=CE$, $\therefore CE=DH$,

$\therefore \triangle CEG\cong\triangle DHG$. $\therefore CG=DG$, $AG=BG$,

$\therefore EF$ 平分 AB.

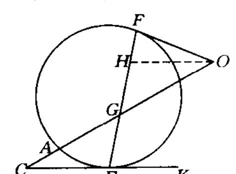


图 7 - 88

题108 已知:如图 7 - 89,EC 是$\odot O$ 的直径,且 $EC=2$,作 $BC\perp AC$ 于 C,使 $BC=2$,过 B 作$\odot O$ 的切线 BA 交 CE 的延长线于 A,切点为 D.

(1)求证:$AD\cdot AB=AO\cdot AC$;

(2)求 AE 及 AD 的长.

解 (1)连结 OD,

$\because \angle ODA=\angle BCA=90^\circ$, $\angle A=\angle A$,

$\therefore \triangle ADO\backsim\triangle ACB$.

$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AO}{AB}$, $\therefore AD\cdot AB=AO\cdot AC$.

(2)由(1)得$\triangle ADO\backsim\triangle ACB$, $\therefore \dfrac{AO}{AB}=\dfrac{OD}{BD}$.

设 $AE=x$, $AD=y$,则$\dfrac{x+1}{y+2}=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore y=2x$. ①

又由切割线定理,得 $AD^2=AE\cdot AC$.

$\therefore y^2=x(x+2)$. ②

把①代入②,得$4x^2=x^2+2x$,

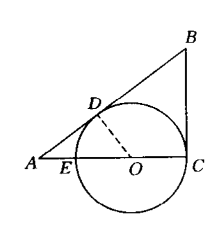


图 7 - 89

解得 $x_1=\frac{2}{3}$，$x_2=0$（舍去），$\therefore y=2x=\frac{4}{3}$.

$\therefore AE$ 长为 $\frac{2}{3}$，AD 长为 $\frac{4}{3}$.

题109 已知：如图 7-90，DB 为⊙O 的直径，A 为 BD 延长线上一点，AC 与⊙O 相切于点 E，$CB\perp AB$，如果 $AE:EC=2:1$，$DE+BE=4+2\sqrt{2}$，求△ABC 的面积.

解 设 $CE=x$.

$\because AE:EC=2:1$，$\therefore AE=2x$.

又 $\because DB$ 是直径，且 $CB\perp DB$，

$\therefore CB$ 是⊙O 的切线，$\therefore CB=CE=x$.

在 Rt△ABC 中，由勾股定理，得

$AC^2=CB^2+AB^2$.

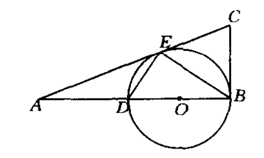


图 7-90

$\therefore AB=\sqrt{9x^2-x^2}=2\sqrt{2}x$.

$\because \angle AED=\angle ABE$，$\angle A=\angle A$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle AEB$.

$\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AE}{AB}=\frac{DE}{EB}$.

$\therefore \frac{AD}{2x}=\frac{2x}{2\sqrt{2}x}=\frac{DE}{EB}$，$\therefore AD=\sqrt{2}x$，$\frac{DE}{EB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because DE+BE=4+2\sqrt{2}$，$\therefore DE=2\sqrt{2}$，$BE=4$.

在 Rt△BED 中，由勾股定理，得 $BD=2\sqrt{6}$.

$\therefore AB-AD=\sqrt{2}x=2\sqrt{6}$.

$\therefore x=2\sqrt{3}$，$\therefore AB=4\sqrt{6}$，$CB=2\sqrt{3}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{6}\times 2\sqrt{3}=12\sqrt{2}$.

题110 已知：如图 7-91，⊙O 内切△ABC 的三边 BC、AC、AB 于 D、E、F，作 $DH\perp BC$，交内切圆于 H，连结 AH，并延长交 BC 于 G.

求证：$DG=AB-AC$.

证明 D 为 BC 与⊙O 的切点．$DH\perp BC$，则 DH 必过圆心 O，过 H 作 $KL/\!/BC$，分别交 AB、AC 于 K、L．连结 OK、OB、OE、OF.

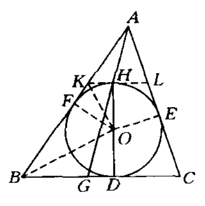


图 7-91

$\because KL/\!/BC$，

$\therefore$ ⊙O 为梯形 $BCLK$ 的内切圆．

$\because \angle LKB+\angle KBC=180^\circ$，

$\angle HKO=\angle FKO$，$\angle FBO=\angle DBO$，

$\therefore \angle FBO+\angle FKO=90^\circ$，$\angle KOB=90^\circ$.

又 $OF\perp BK$，$\therefore OF^2=BF\cdot KF$.

同理 $OE^2=CE\cdot LE$.

$\because OE=OF,KF=KH,LE=LH,BF=BD,CE=CD$，

$\therefore BD\cdot KH=CD\cdot LH$，$\therefore KH:LH=CD:BD$.

$\because KL /\!/ BC$，

$\therefore KH:BG=AH:AG,HL:CG=AH:AG$，

$\therefore KH:BG=LH:CG$，即 $KH:LH=BG:CG$.

$\therefore CD:BD=BG:CG$.

$\therefore CD:(CD+BD)=BG:(BG+CG)$. $\therefore CD=BG$.

$\therefore DG=BD-BG=BD-CD=BF-CE$.

$\because AF=AE$，$\therefore AB-AC=BF-CE$，

$\therefore DG=AB-AC$.

题111 已知：如图 7 - 92，在同心圆 O 中，大圆的弦 AC、AF 分别切小圆于 D、E，延长 DE 交大圆于 B.

(1)求证：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BE}{CD}$；

(2)若知 $AC=8$ cm，$CF=6$ cm，求 BE 的长.

证明 (1)连结 OD、OE、BF.

$\because OD=OE$，

$\therefore AC=AF,AD=AE=DC=EF$.

$\because DE /\!/ CF$，

$\therefore \angle BEF=\angle AFC=\angle ABC$，

且$\angle EFB=\angle ACB$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle BEF$，

$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BE}{EF}$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BE}{CD}$.

图 7 - 92

(2)延长 BD 交$\odot O$ 于 G，则 $BE=DG$.

$\because DE$ 是$\triangle ACF$ 的中位线，$CF=6$ cm，$\therefore DE=3$ cm.

设 $BE=x$ cm，则 $EG=(3+x)$ cm.

$AC=8$ cm，$AF=8$ cm，$AE=EF=4$ cm.

$\because AE\cdot EF=BE\cdot EG$，

$\therefore 4\times 4=x(3+x)$，$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$(舍去负值)，

$\therefore BE=\dfrac{\sqrt{73}-3}{2}$ cm.

题112 已知：如图 7 - 93，$\odot O$ 的半径为8 cm，$OD\perp AB$ 于 D，$\angle AOD=\angle B$，$AD=16$ cm，$BD=4$ cm.

求证：AB 是⊙O 的切线.

证明 ∵$OD\perp AB$ 于 D，

∴$\angle ADO=\angle ODB=90°$，

∵$\angle AOD=\angle B$，

∴$\triangle AOD\backsim\triangle OBD$，

∴$\dfrac{AD}{OD}=\dfrac{OD}{BD}$，且 $AD=16$，$BD=4$，

∵$OD>0$，∴$OD=8$ cm.

即 O 到 AB 的距离等于圆的半径，AB 是⊙O 的切线.

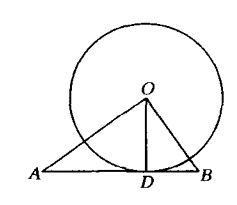


图 7 - 93

题113 已知：如图 7 - 94，在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以 C 为圆心作圆切 AB 边于 F 点，AD、BE 分别与⊙C 切于 D、E 两点.

求证：$AD/\!/BE$.

证明 ∵$\angle ACB=90°$，

∴$\angle CAB+\angle CBA=90°$.

∵AD、AB、BE 分别为圆的切线，

∴$\angle CAF=\angle CAD$，$\angle CBF=\angle CBE$，

∴$\angle DAF+\angle EBF=180°$，

∴$AD/\!/BE$.

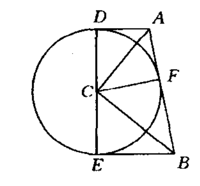


图 7 - 94

题114 已知：如图 7 - 95，AB 是⊙O 的直径，点 P 在 BA 的延长线上，弦 $CD\perp AB$，垂足为 E，$\angle POC=\angle PCE$.

(1)求证：PC 是⊙O 的切线；

(2)若 $OE:EA=1:2$，$PA=6$，求⊙O 的半径；

(3)求 $\sin\angle PCA$ 的值.

证明 (1)在$\triangle OCP$ 和$\triangle CEP$ 中，

∵$\angle POC=\angle PCE$，$\angle OPC=\angle CPE$，

∴$\angle OCP=\angle CEP$.

∵$CD\perp AB$，∴$\angle CEP=90°$，$\angle OCP=90°$，

∴PC 是⊙O 的切线.

(2)设 $OE=x$，∵$OE=EA=1:2$，

∴$EA=2x$，$OA=OC=3x$，$OP=3x+6$.

∵CE 是 Rt$\triangle COP$ 斜边上的高，∴$OC^2=OE\cdot OP$.

即$(3x)^2=x(3x+6)$，解这个方程，得 $x=1$.

∴$OA=3$，即⊙O 的半径是3.

(3)∵PC 是⊙O 的切线，C 为切点，AB 为⊙O 的直径，$CD\perp AB$，

∴$\overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{AD}$，$\angle PCA=\angle ACD$.

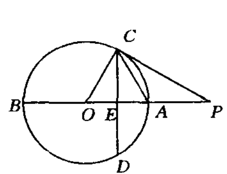


图 7 - 95

$\therefore \sin\angle PCA=\sin\angle ACE=\dfrac{AE}{AC}$，而 $AE=2,OE=1,OC=3$.

$AC=\sqrt{EC^2+EA^2}=\sqrt{OC^2-OE^2+EA^2}=\sqrt{3^2-1^2+2^2}=2\sqrt{3}$.

$\therefore \sin\angle PCA=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

题115 已知：如图 7－96，AB 为△ABC 外接⊙O 的直径，D 为⊙O 上的一点，且 $DE\perp CD$ 交 BC 于 E.

求证：$BE\cdot CD=AC\cdot DE$.

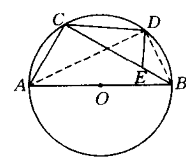


图 7－96

证明 连结 AD、BD.

$\because \angle DEB$ 是△CDE 的外角，

$\therefore \angle DEB=90°+\angle DCE$，

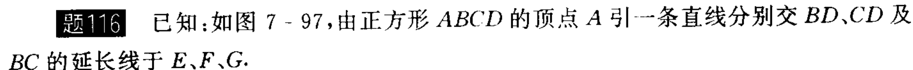
$\because \angle ACD=90°+\angle DCE$，

$\therefore \angle DEB=\angle ACD$.

又 $\angle DBE=\angle CAD$，

$\therefore \triangle BED\backsim\triangle ACD$，

$\therefore \dfrac{BE}{AC}=\dfrac{DE}{CD}$，$\therefore BE\cdot CD=AC\cdot DE$.



题116 已知：如图 7－97，由正方形 $ABCD$ 的顶点 A 引一条直线分别交 BD、CD 及 BC 的延长线于 E、F、G.

求证：CE 和△CGF 的外接圆⊙O 相切.

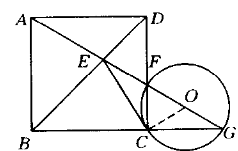


图 7－97

证明 连结 CO.

$\because \angle DCG=90°$，$\therefore FG$ 为⊙O 的直径.

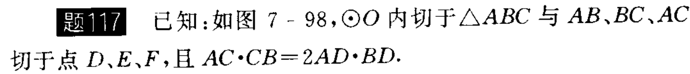
$\because \angle OCF=\angle OFC=\angle DFA$，

且 $\angle DFA+\angle DAF=90°$，

而△ADE≌△CDE，$\angle DAF=\angle DCE$，

$\therefore \angle OCE=\angle DCE+\angle OCF=90°$，

$\therefore CE$ 与⊙O 相切.



题117 已知：如图 7－98，⊙O 内切于△ABC 与 AB、BC、AC 切于点 D、E、F，且 $AC\cdot CB=2AD\cdot BD$.

求证：△ABC 为直角三角形.

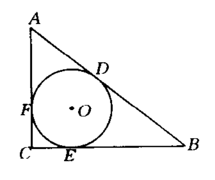
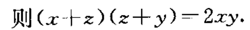


图 7－98

证明 ⊙O 内切于△ABC，设 $AD=AF=x$，$BD=BE=y$，$CE=CF=z$，



则 $(x+z)(z+y)=2xy$.

即 $z^2+(x+y)z-xy=0$.

解关于 z 的方程，得

$z=\dfrac{-(x+y)\pm\sqrt{(x+y)^2+4xy}}{2}$(舍去负根)，

$\therefore 2z=-(x+y)+\sqrt{(x+y)^2+4xy}$，

$\therefore (x+z)+(y+z)=\sqrt{(x+y)^2+4xy}$.

两边平方，得

$[(x+z)+(y+z)]^2=(x+y)^2+4xy$，

$\therefore [(x+z)+(y+z)]^2=(x+y)^2+2(x+z)(z+y)$，

$\therefore (x+z)^2+(y+z)^2=(x+y)^2$，

即 $AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C$ 为直角.

题118 已知：点 M、N 分别为正三角形 ABC 的边 AB、AC 中点，直线 MN 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的一个交点为 P.

求证：$\dfrac{PC}{PB}+\dfrac{PB}{PC}=3$.

证明 如图 7-99，设 MN 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的另一个交点为 P'，连结 $P'C$、PC.

由圆、正三角形的轴对称性可知 $PM=NP'$，$PB=P'C$，

设 $BC=a$，则 $MN=AN=NC=\dfrac{a}{2}$，

设 $PM=NP'=x$.

$\because PN\cdot NP'=AN\cdot NC$，

$\therefore (x+\dfrac{a}{2})x=\dfrac{a}{2}\times\dfrac{a}{2}$，$\therefore x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}a$，

即 $P'N=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}a$. $PN=x+\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}a$.

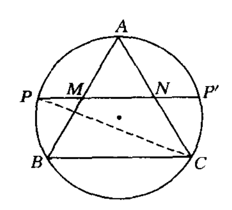
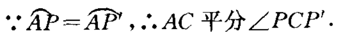


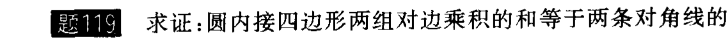
图 7-99



$\because \overset{\frown}{AP}=\overset{\frown}{AP'}$，$\therefore AC$ 平分 $\angle PCP'$.

$\therefore \dfrac{PC}{PB}=\dfrac{PC}{P'C}=\dfrac{PN}{P'N}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$.

$\therefore \dfrac{PC}{PB}+\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}=3$.



题119 求证：圆内接四边形两组对边乘积的和等于两条对角线的乘积.

已知：如图 7-100，$ABCD$ 内接于圆 .

求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.

证明 在 BD 上取一点 E，

使 $\angle BAE=\angle CAD$.

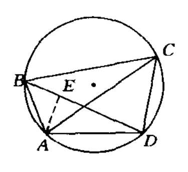


图 7-100

又∵$\angle ABE=\angle ACD$，∴$\triangle BAE\backsim\triangle CAD$，

∴$\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{CD}$，即 $AB\cdot CD=AC\cdot BE$，

∵$\angle BCA=\angle EDA$，$\angle BAC=\angle EAD$，

∴$\triangle BCA\backsim\triangle EDA$.

∴$\frac{BC}{ED}=\frac{AC}{AD}$，即 $BC\cdot AD=AC\cdot DE$.

∴$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BE+DE)=AC\cdot BD$.

题120 已知：如图 7 - 101，M 是弦 AB 的中点，CD、EF 是过 M 点的圆的另两条弦，CF、DE 分别交 AB 于 G、H.

求证：$MG=MH$.

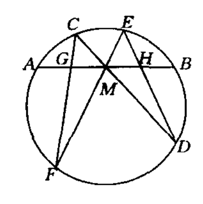


图 7 - 101

证明 设 $AB=2a$，$MH=x$，$MG=y$，

设 $S_{\triangle CMG}=S_1$，$S_{\triangle EMH}=S_2$，

$S_{\triangle FMG}=S_3$，$S_{\triangle DHM}=S_4$，

∴$S_1=\frac{1}{2}CG\cdot CM\cdot\sin C$

$=\frac{1}{2}MC\cdot MG\cdot\sin CMG$；

$S_2=\frac{1}{2}EH\cdot EM\cdot\sin E$

$=\frac{1}{2}ME\cdot MH\cdot\sin EMH$；

$S_3=\frac{1}{2}FG\cdot FM\cdot\sin F=\frac{1}{2}MF\cdot MG\cdot\sin FMG$；

$S_4=\frac{1}{2}DM\cdot DH\cdot\sin D=\frac{1}{2}MH\cdot MD\cdot\sin HMD$.

∵$\angle C=\angle E$，$\angle F=\angle D$，$\angle CMG=\angle HMD$，$\angle GMF=\angle EMH$，

∴$(CG\cdot CM)(ME\cdot MH)(FG\cdot FM)(MH\cdot MD)$

$=(MC\cdot MG)(EH\cdot EM)(MF\cdot MG)(DM\cdot DH)$.

∴$CG\cdot FG\cdot x^2=EH\cdot DH\cdot y^2$，

又由相交弦定理可得

$CG\cdot FG=AG\cdot BG$，$EH\cdot DH=AH\cdot BH$，

∴$AG\cdot BG\cdot x^2=AH\cdot BH\cdot y^2$，

即$(a-y)(a+y)x^2=(a+x)(a-x)\cdot y^2$

∴$x^2=y^2$，$x=y$，

即 $MG=MH$.

题121 已知：如图 7 - 102，AT 切$\odot O$ 于 T，ADB 交$\odot O$ 于 D、B，BC 是直径，在 AB 上取 $AE=AT$，过 E 点作 AB 的垂线 EF，交 AC 的延长线于 F.

求证：(1)$AB\cdot AC=AE\cdot AF$；

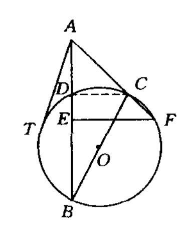


图 7 - 102

(2)$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AFE}$.

证明　(1) 连结 CD,则 $CD/\!/EF$,

$\therefore \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AE}{AD}$.

$\because AT^2=AE^2=AD\cdot AB$,$\therefore \dfrac{AE}{AD}=\dfrac{AB}{AE}$.

$\therefore \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AB}{AE}$,即 $AB\cdot AC=AE\cdot AF$.

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin BAC$,

$S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin EAF$,$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AFE}$.

题122　已知:如图 7 - 103,AB 是$\odot O$ 的弦,P 为$\odot O$ 上任意一点,直线 AP、PB 交 AB 的中垂线于 E、F.

求证:$OE\cdot OF$ 为定值.

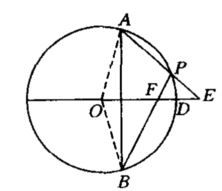


图 7 - 103

证明　连结 OA、OB.

在$\triangle APB$ 中,$\angle EPB=\angle PAB+\angle PBA$,

$\therefore \angle EPB=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{APB}$的度数,

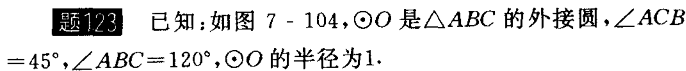
$\angle EOB=\overset{\frown}{BD}$的度数,

$\because \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{APB}=\overset{\frown}{BD}$,$\therefore \angle EPB=\angle EOB$.

$\because \angle OFB=\angle EFP$,$\therefore \angle OBF=\angle E$.

且$\angle AOE=\angle BOF$,$\therefore \triangle OEA\backsim\triangle OBF$.

$\therefore \dfrac{OE}{OB}=\dfrac{OA}{OF}$,$\therefore OE\cdot OF=OA\cdot OB=R^2$(定值).


题123　已知:如图 7 - 104,$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆,$\angle ACB=45°$,$\angle ABC=120°$,$\odot O$ 的半径为1.

(1)求弦 AC、AB 的长;

(2)若 P 为 CB 延长线上一点,试确定 P 点的位置,使 PA 与$\odot O$ 相切,并证明你的结论.

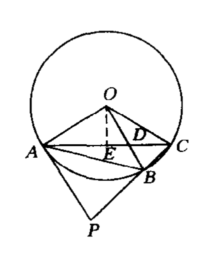
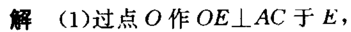


图 7 - 104


解　(1)过点 O 作 $OE\perp AC$ 于 E,

$\because \angle ABC=120°$,$\therefore \angle AOC=120°$.

又$\because OA=OC$,$\therefore \angle OAC=\angle OCA=30°$.

在 $Rt\triangle AEO$ 中,$\because OA=1$,$\angle OAE=30°$

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}$,$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because OE\perp AC$,$\therefore AC=2AE=\sqrt{3}$.

$\because \angle AOB=2\angle ACB$，$\angle ACB=45°$，$\therefore \angle AOB=90°$，

$\therefore AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=\sqrt{2}$.

(2)若 PA 是⊙O 的切线，则 $PA\perp AO$.

又$\because BO\perp AO$，$\therefore PA /\!/ BD$，$\therefore \dfrac{PB}{BC}=\dfrac{AD}{DC}$.

$\because \angle AOD=90°$，$\angle OAC=30°$，$\angle AOC=120°$，

$\therefore AD=2DO$. 又$\because \angle OCD=\angle DOC=30°$，

$\therefore OD=DC$，$\therefore AD=2DC$，$\therefore \dfrac{PB}{BC}=2$，即 $PB=2BC$.

$\therefore$当 $PB=2BC$ 时，PA 是⊙O 的切线.

证明如下：

$\because PB=2BC$，$AD=2DC$，$\therefore OB /\!/ PA$，

又 $OB\perp AO$，$PA\perp AO$，$\therefore PA$ 是⊙O 的切线.

题124 已知：如图 7 - 105，圆内接四边形 $ABCD$，延长 CD、BA 交于 E，且 $CD=AE$，$CE=12$ cm，$EB=24$ cm，$DA\perp EB$.

求：AC 的长.

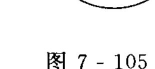


图 7 - 105

解 连结 BD. 设 $DC=EA=x$.

$\because ED\cdot EC=EA\cdot EB$.

$\therefore (12-x)\cdot 12=x\cdot 24$，

解得 $DC=EA=4$ cm.

$\because DA\perp EB$，$\therefore BD$ 为四边形 $ABCD$ 外接圆的直径，$\angle ECB=90°$.

$\because EC=12$ cm，$EB=24$ cm，$\therefore \angle CBE=30°$，$\angle E=60°$.

$\because AC^2=EC^2+EA^2-2EC\cdot EA\cdot \cos 60°$.

$=12^2+4^2-2\times 4\times 12\times \cos 60°=112$.

$\therefore AC=4\sqrt{7}$ cm.

题125 已知：如图 7 - 106，⊙O 是△ABC 的外接圆，EA 切⊙O 于 A，EC 切⊙O 于 C，BC 边的中垂线交 AB 于 D，$AD=2$ cm，$BD=3$ cm，$AC=4$cm.

求：AF 的长.

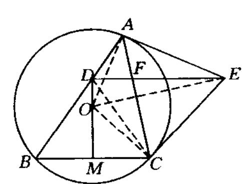


图 7 - 106

解 连结 OA、OC、OE、CD，

$\because BD=DC$，$\therefore$△DBC 是等腰三角形.

$\because EA$ 切⊙O 于 A，EC 切⊙O 于 C，

$\therefore EA=EC$，△EAC 是等腰三角形，

且$\angle EAC=\angle B$，$\therefore$△$DBC\backsim$△EAC，

$\therefore \angle BDC=\angle AEC$，$\therefore \angle MDC=\angle OEC$，

$\therefore O$、C、E、D 四点共圆，

又$\because OA\perp AE, OC\perp CE$，

$\therefore O$、C、E、A 四点共圆，$\therefore O$、C、E、A、D 在同一圆周上.

$\therefore \angle ODE=\angle OAE=90°$.

又 $DM\perp BC$，$\therefore DF/\!/BC$. $\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$，

$\because AD=2$ cm，$BD=3$ cm，$AC=4$ cm，

$\therefore \dfrac{2}{2+3}=\dfrac{AF}{4}$，$AF=\dfrac{8}{5}$ cm.

题126 已知：如图 7 - 107，AC 是$\odot O$ 的直径，$PA\perp AC$ 于 A，PB 切$\odot O$ 于 B，$BE\perp AC$ 于 E，且 $AE=6$ cm，$EC=2$ cm.

求：BD 的长.

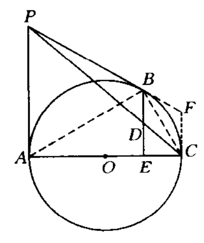


图 7 - 107

解 过 C 作$\odot O$ 的切线 CF 交 PB 的延长线于 F.

$\because PA\perp AC, BE\perp AC, CF\perp AC$，

$\therefore PA/\!/BE/\!/CF$，

$\therefore \dfrac{BD}{PB}=\dfrac{CF}{PF}$，$\dfrac{DE}{CE}=\dfrac{PA}{CA}$，即$\dfrac{DE}{PA}=\dfrac{CE}{CA}$.

$\because BF=CF$，且$\dfrac{CE}{CA}=\dfrac{BF}{PF}$，$\therefore \dfrac{BD}{PB}=\dfrac{DE}{PA}$.

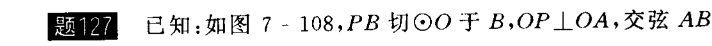
$\because PA=PB$，$\therefore BD=DE$.

连结 AB、BC，

$\because \angle ABC=90°, BE\perp AC$，

$\therefore BE^2=AE\cdot EC$，$AE=6$，$EC=2$，

$\therefore BE^2=6\times 2$，$BE=2\sqrt{3}$. $\therefore BD=\sqrt{3}$ cm.



题127 已知：如图 7 - 108，PB 切$\odot O$ 于 B，$OP\perp OA$，交弦 AB 于 C.

求证：$PB=PC$.

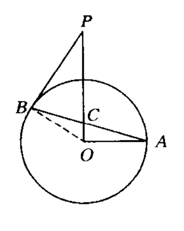


图 7 - 108

证明 连结 OB，

$\because PB$ 与$\odot O$ 相切，$\therefore PB\perp OB$，

$\therefore \angle PBC+\angle ABO=90°$.

$\because OP\perp OA$，$\therefore \angle BAO+\angle ACO=90°$.

$\because OB=OA$，$\therefore \angle ABO=\angle BAO$，

$\therefore \angle PBC=\angle ACO$，

又$\because \angle PCB=\angle ACO$，$\therefore \angle PBC=\angle PCB$，

$\therefore PB=PC$.

题128 已知：如图 7 - 109，PC 是$\triangle ABC$ 外接圆的切线，C 是切点，PBD 是割线，PE 和弦 AB 平行，且交 AC、BC 于 E、F 点.

求证:$PE\cdot PF=PB\cdot PD$.

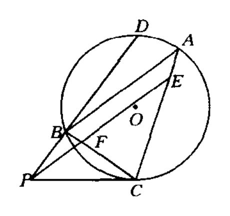


图 7 - 109

证明 ∵PC与⊙O相切,∴$\angle A=\angle BCP$,

∵$PE/\!/AB$,∴$\angle A=\angle CEP$,

∴$\angle CEP=\angle BCP$.

又∵$\angle CPF=\angle EPC$,∴$\triangle CPF\backsim\triangle EPC$

∴$\dfrac{PC}{PE}=\dfrac{PF}{PC}$,∴$PC^2=PE\cdot PF$,

∵PC与⊙O相切,∴$PC^2=PB\cdot PD$,

∴$PE\cdot PF=PB\cdot PD$.

题129 已知:如图 7 - 110,P为⊙O外一点,PA切圆于A,从PA中点M引⊙O的割线MNB,$\angle PNA=128°$.

求:$\angle PBA$的度数.

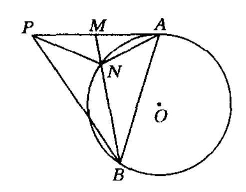


图 7 - 110

解 ∵PA是圆的切线,MNB是割线,

∴$MA^2=MN\cdot MB$.

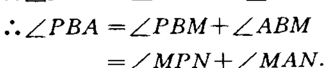
又∵$\angle AMN=\angle BMA$,

∴$\triangle AMN\backsim\triangle BMA$,∴$\angle MAN=\angle ABM$.

∵M是PA的中点,$MA=MP$,

∴$MP^2=MN\cdot MB$,且$\angle PMN=\angle BMP$,

∴$\triangle PNM\backsim\triangle BPM$,∴$\angle MPN=\angle PBM$.

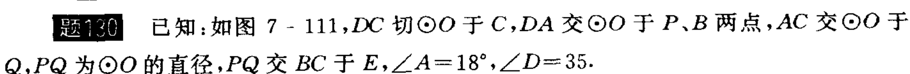


∴$\angle PBA=\angle PBM+\angle ABM$

$=\angle MPN+\angle MAN$.

而$\angle PNA=128°$,∴$\angle MPN+\angle MAN=52°$,

∴$\angle PBA=52°$.



题130 已知:如图 7 - 111,DC切⊙O于C,DA交⊙O于P、B两点,AC交⊙O于Q,PQ为⊙O的直径,PQ交BC于E,$\angle A=18°$,$\angle D=35$.

求:$\angle PQC$与$\angle PEC$的度数.

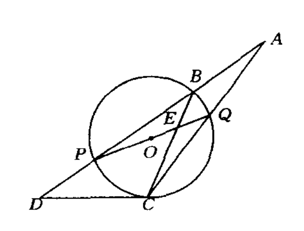


图 7 - 111

解 连结BQ,

∵PQ为⊙O的直径,∴$\angle QBA=90°$,

且$\angle A=18°$,∴$\angle AQB=72°$.

∴$\angle BQC=108°$.

∵DC是⊙O的切线,

∴$\angle BCD=\angle BQC=108°$.

∵$\angle D=35°$,∴$\angle DBC=37°$,

∴$\angle PQC=37°$.

∵$\angle ACD=127°$,∴$\angle ACB=19°$,

$\therefore \angle PEC=\angle ACB+\angle PQC=56°$.

题131 已知:如图 7-112,$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于 A、B,过 A 作直线交$\odot O_1$于 C,交$\odot O_2$于 D,过 C、D 分别作$\odot O_1$与$\odot O_2$的切线,两条切线交于 E.

求证:B、D、E、C 四点共圆.

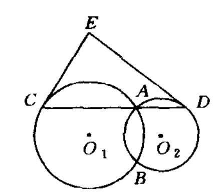


图 7-112

证明 连结 BC、BA、BD.

$\because EC$、ED 分别是$\odot O_1$与$\odot O_2$的切线,

$\therefore \angle ECD=\angle ABC$,$\angle EDC=\angle ABD$,

$\because \angle E+\angle ECD+\angle EDC=180°$,

$\therefore \angle E+\angle ABC+\angle ABD=180°$,

即$\angle E+\angle CBD=180°$,

$\therefore B$、D、E、C 四点共圆.

题132 已知:如图 7-113,$\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D,过 A 作$\odot O$ 切 BC 于 D,并且分别交 AB、AC 于 E、F.

求证:$EF\parallel BC$.

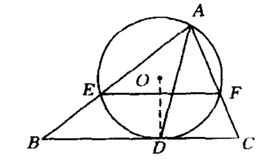


图 7-113

证明 连结 OD.

$\because AD$ 平分$\angle BAC$,$\angle BAD=\angle CAD$,

$\therefore \overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{DF}$.

又$\because OD$ 是$\odot O$ 的半径,$\therefore OD\perp EF$,

$\because BC$ 切$\odot O$ 于 D,$\therefore OD\perp BC$,$\therefore EF\parallel BC$.

题133 已知:如图 7-114,EF 与$\odot O$ 相切,EDC、EAB 分别为圆的割线,$AB=35$,$DC=50$,$AD:BC=1:2$.

求 EF 的长.

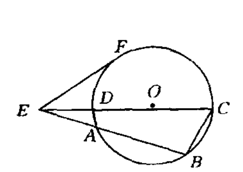


图 7-114

解 $\because \angle DAE=\angle C$,$\angle BEC=\angle DEA$,

$\therefore \triangle EAD\backsim\triangle ECB$. $\therefore \dfrac{ED}{EB}=\dfrac{AD}{BC}$.

$\because AD:BC=1:2$,$\therefore \dfrac{ED}{EB}=\dfrac{1}{2}$.

设 $ED=x$,则 $EB=2x$.

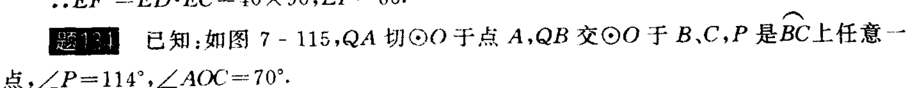
$\because ED\cdot EC=EA\cdot EB$,$AB=35$,$DC=50$,

$\therefore x(x+50)=(2x-35)\cdot 2x$,

$3x^2-120x=0$,$x_1=0$(不合题意,舍去),$x_2=40$.

$\because EF$ 与$\odot O$ 相切,

$\therefore EF^2=ED\cdot EC=40\times 90$,$EF=60$.



题134 已知:如图 7-115,QA 切$\odot O$ 于点 A,QB 交$\odot O$ 于 B、C,P 是$\overset{\frown}{BC}$上任意一点,$\angle P=114°$,$\angle AOC=70°$.

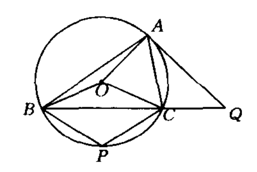


图 7 - 115

求：$\angle Q$ 的度数.

解 ∵$\angle P=114°$，∴$\angle BAC=66°$.

∵$\angle AOC=70°$，∴$\angle ABC=35°$.

∵QA 切⊙O 于点 A，

∴$\angle QAC=\angle ABC=35°$.

∴$\angle Q=180°-(\angle ABC+\angle BAQ)$

$=180°-(\angle ABC+\angle BAC+\angle CAQ)$

$=180°-(35°+66°+35°)=44°$.

题135 已知：如图 7 - 116，P 是⊙O 外一点，割线 PA、PB 分别与⊙O 相交于 A、C、B、D 四点，PT 切⊙O 于点 T，点 E、F 分别在 PB、PA 上，且 $PE=PT$，$\angle PFE=\angle ABP$.

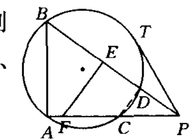


图 7 - 116

(1)求证：$PD\cdot PF=PC\cdot PE$；

(2)若 $PD=4$，$PC=5$，$AF=\frac{21}{20}$，求 PT 的长.

证明 (1)连结 CD，则四边形 $ABCD$ 是⊙O 的内接四边形，

∴$\angle DCP=\angle ABP$.

又∵$\angle ABP=\angle PFE$，∴$\angle DCP=\angle PFE$，∴$CD/\!/EF$.

∴$\frac{PD}{PE}=\frac{PC}{PF}$，即 $PD\cdot PF=PC\cdot PE$.

(2)设 PT 的长为 x，

∵$PE=PT$，∴由(1)的结论得 $PF=\frac{5PE}{4}=\frac{5}{4}x$.

∵PT 是⊙O 的切线，

∴$PT^2=PC\cdot PA=PC(PF+AF)$，

即 $x^2=5\left(\frac{5}{4}x+\frac{21}{20}\right)$，

化简得$4x^2-25x-21=0$，解得 $x_1=7$，$x_2=-\frac{3}{4}$(舍去).

∴PT 的长是7.

题136 已知：如图 7 - 117，P 为⊙O 外一点，PA、PB 切⊙O 于 A、B，OP 与 AB 相交于 M 点，过 M 作弦 CD，连结 PC、OD.

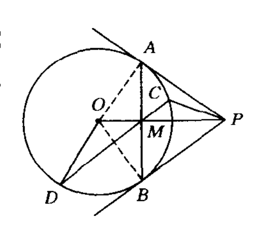


图 7 - 117

求证：$\angle CPO=\angle CDO$.

证明 连结 OA、OB.

∵PA、PB 与⊙O 相切，

∴$OA\perp PA$，$OB\perp PB$，

∴P、A、O、B 四点共圆，

$\therefore MA \cdot MB = MP \cdot MO$.

$\because MA \cdot MB = MC \cdot MD$,

$\therefore MP \cdot MO = MC \cdot MD$.

即$\dfrac{MP}{MD}=\dfrac{MC}{MO}$，且$\angle PMC=\angle DMO$，

$\therefore \triangle PMC \backsim \triangle DMO$，$\therefore \angle CPO=\angle CDO$.

题137 已知：如图 7 - 118，PA 和 PB 切$\odot O$于 A、B 两 点，AC 为$\odot O$的直径，PC 交$\odot O$于 D 点.

(1) 当$\angle APB=60°$时，求$\angle ACB$ 的度数；

(2) 当$\angle APB=60°$，又 AB 长为$7\sqrt{3}$时，求 AC、PC 和 PD 的长.

解 (1)$\because PA$、PB 与$\odot O$相切，$\therefore PA=PB$.

$\because \angle APB=60°$，$\therefore \triangle PAB$ 为等边三角形.

$\therefore \angle PAB=60°$.

$\because \angle ACB=\angle PAB$，$\therefore \angle ACB=60°$.

(2)$\because AC$ 是$\odot O$的直径，$\therefore AB\perp BC$.

$\because \angle BAC=90°-60°=30°$，$AB=7\sqrt{3}$，



图 7 - 118

$\therefore AC=14$，$PA=7\sqrt{3}$，

$\because PA$ 与$\odot O$相切，$\therefore PA\perp AC$，

$\therefore PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=7\sqrt{7}$.

$\because PA^2=PD\cdot PC$，$\therefore PD=\dfrac{PA^2}{PC}=3\sqrt{7}$.

题138 已知：如图 7 - 119，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A$ 的平分线和$\triangle ABC$ 的外接$\odot O$相交于 D，CD 的延长线和$\odot O$的切线 BE 相交于点 E.

求证：(1)$\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{BE}{CE}$；　(2)$\dfrac{CD^2}{BC^2}=\dfrac{DE}{CE}$.

证明 (1)连结 BD.

$\because \angle BAD=\angle CAD$，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，

$\therefore BD=CD$，

$\because BE$ 与$\odot O$相切，$\therefore \angle BCD=\angle DBE$，

又$\because \angle DEB=\angle BEC$，

$\therefore \triangle DEB \backsim \triangle BEC$，

$\therefore \dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BE}{CE}$，且 $BD=CD$，$\therefore \dfrac{CD}{BC}=\dfrac{BE}{CE}$.

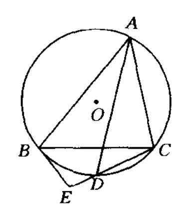


图 7 - 119

(2)$\because \triangle DEB \backsim \triangle BEC$，

$\therefore \dfrac{BD}{BC}=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{BE}{EC}$，$BD=CD$，

$\therefore \frac{CD^2}{BC^2}=\frac{DE}{BE}\cdot\frac{BE}{EC}=\frac{DE}{EC}$.

题139 已知:如图 7 - 120,$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,BD、CE 为三角形的高.

求证:$OA\perp DE$.

证明 延长 AO 交$\odot O$ 于 F,连结 CF.

$\because BD\perp AC, CE\perp AB$,

$\therefore B$、C、D、E 四点共圆,$\therefore \angle ADE=\angle ABC$,

$\because \angle ABC=\angle F$,$\therefore \angle F=\angle ADE$.

$\because AF$ 是$\odot O$ 的直径,$\therefore \angle FAC+\angle F=90°$.

$\therefore \angle ADE+\angle F=90°$.

即 $OA\perp DE$.

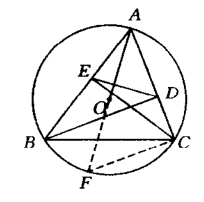


图 7 - 120

题140 已知:如图 7 - 121,平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 在圆上,AD 边、对角线 AC、AB 边分别与圆交于 R、Q、P 三点,在 AC 上有一点 E,使得 $AQ\cdot AE=AR\cdot AD$.

求证:(1)$\triangle AQR\backsim\triangle ADE$;

(2)$\triangle APQ\backsim\triangle CED$;

(3)$AQ\cdot AC=AP\cdot AB+AR\cdot AD$.

证明 (1) $\because AQ\cdot AE=AR\cdot AD, \angle RAQ=\angle EAD$,

$\therefore \triangle AQR\backsim\triangle ADE$.

(2) $\because \angle DEQ=\angle ARQ$,

$\angle DEC=180°-\angle DEQ$,

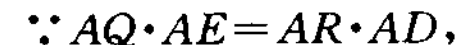
$\angle APQ=180°-\angle ARQ$,

$\therefore \angle DEC=\angle APQ$,且$\angle DCE=\angle QAP$,

$\therefore \triangle APQ\backsim\triangle CED$.

(3) $AQ\cdot AC=AQ(AE+EC)$

$=AQ\cdot AE+AQ\cdot EC$



$\because AQ\cdot AE=AR\cdot AD$,

$\triangle APQ\backsim\triangle CED$,$\frac{AQ}{DC}=\frac{AP}{EC}$,

$AQ\cdot EC=AP\cdot DC$,

$\therefore AQ\cdot AC=AR\cdot AD+AP\cdot DC$,

$\because AB=CD$,

$\therefore AQ\cdot AC=AR\cdot AD+AP\cdot AB$.

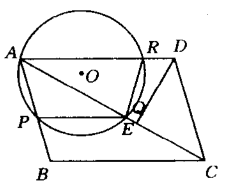


图 7 - 121

题141 已知:如图 7 - 122,在$\triangle ABC$ 中,$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$\angle ACB=2\angle B$.

求证:$c^2-b^2=ab$.

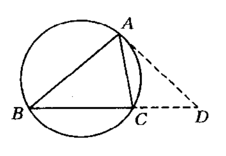


图 7 - 122

证明 作$\triangle ABC$的外接圆，过A点作圆的切线交BC延长线于D.

$\because \angle ACB=\angle CAD+\angle D=2\angle B$,

AD是切线，$\therefore \angle B=\angle DAC$,

$\therefore \angle CAD=\angle D, CD=AC=b, \angle B=\angle D, AD=AB=c$,

又$\because AD^2=CD\cdot BD, c^2=b(a+b)$，$\therefore c^2-b^2=ab$.

题142 已知：如图 7 - 123，AB是$\odot O$的直径，点C在$\odot O$上，$\odot C$切AB于点D，与$\odot O$相交于E、F两点，EF交CD于点G.

求证：$CG=DG$.

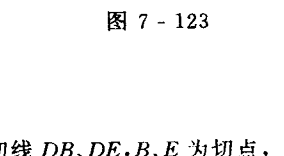


图 7 - 123

证明 延长CD交$\odot O$于H，延长DC交$\odot C$于K.

$\because CG\cdot GH=EG\cdot GF$,

$EG\cdot GF=GD\cdot GK$,

$\therefore CG\cdot GH=GD\cdot GK, \dfrac{GK}{CG}=\dfrac{GH}{DG}$.

$\because CD\perp AB, \therefore CD=DH$，且$CD=CK$，即$CK=DH$,

$\therefore \dfrac{GK-CG}{CG}=\dfrac{GH-DG}{DG}$，即$\dfrac{CK}{CG}=\dfrac{DH}{DG}$.

$\therefore CG=DG$.

题143 已知：如图 7 - 124，过$\odot O$外一点D引$\odot O$的切线DB、DE，B、E为切点，AB为$\odot O$的直径，AD交$\odot O$于点C，连结AE、EC、CB，$\angle EDB=\alpha$，$AB=6$ cm，$AC=4$ cm.

(1)试用α的式子表示$\angle EAB$的大小；

(2)试求切线DE的长.

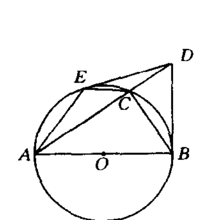


图 7 - 124

解 (1)连结OE,

$\because DE$、DB为切线，

$\therefore \angle DEO=\angle DBO=90°$,

$\therefore D$、E、O、B四点共圆，

$\angle EDB+\angle EOB=180°$.

$\because \angle EDB=\alpha, \therefore \angle EOB=180°-\alpha$.

$\therefore \angle EAB=\dfrac{1}{2}\angle EOB=90°-\dfrac{\alpha}{2}$.

(2)$\because DB\perp AB, BC\perp AD, \therefore AB^2=AC\cdot AD$.

$\because AB=6$ cm，$AC=4$ cm，$\therefore AD=9$ cm.

$\therefore DE=DB=\sqrt{AD^2-AB^2}=3\sqrt{5}$ cm.

题144 已知：如图 7 - 125，在$\odot O$中，直径AB与弦CD相交于点M，且M是CD的中点，点P在DC的延长线上，PE是$\odot O$的切线，E是切点，AE与CD相交于点F.

求证：$PF^2=PC\cdot PD$.

证明 连结 BE.

$\because AB$ 是$\odot O$的直径，$\therefore \angle AEB=90°$.

$\therefore \angle A+\angle B=90°$.

$\because M$ 是 CD 的中点，

$\therefore AB\perp CD$，$\therefore \angle A+\angle AFM=90°$.

$\therefore \angle AFM=\angle B$.

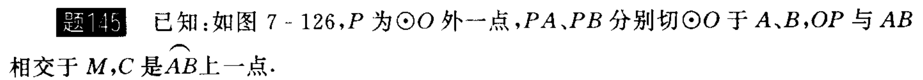
$\because \angle PFE=\angle AFM$，$\therefore \angle PFE=\angle B$.

$\because PE$ 切$\odot O$于 E，$\therefore \angle PEF=\angle B$.

$\because \angle PFE=\angle PEF$，$PF=PE$.

$\because PE^2=PC\cdot PD$，$\therefore PF^2=PC\cdot PD$.

图 7 - 125



题145 已知：如图 7 - 126，P 为$\odot O$外一点，PA、PB 分别切$\odot O$于 A、B，OP 与 AB 相交于 M，C 是$\overset{\frown}{AB}$上一点.

求证：$\angle OPC=\angle OCM$.

证明 连结 OB.

$\because PB$ 是切线，$\therefore BP\perp OB$.

$\because PO$ 平分$\angle APB$，$PA=PB$，

$\therefore PM\perp AB$.

在 Rt$\triangle OBP$ 中，$OB^2=OP\cdot OM$，

$OB=OC$，$\therefore OC^2=OP\cdot OM$.

在$\triangle OMC$ 和$\triangle OCP$ 中，

$\because \angle MOC=\angle COP$，$\dfrac{OM}{OC}=\dfrac{OC}{OP}$，

$\therefore \triangle OMC\backsim\triangle OCP$，$\angle OPC=\angle OCM$.

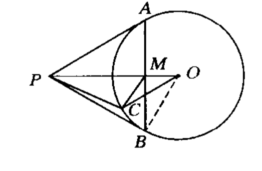


图 7 - 126

题146 已知：如图 7 - 127，A 是$\odot O$上的一点，割线 PC 交$\odot O$于 B、C 两点，D 是 PC 上的一点，且 PD 是 PB 和 PC 的比例中项，$PD=PA$，连结 AD 并延长交$\odot O$于点 E.

求证：$BE=CE$.

证明 连结 AB、AC.

$\because PD$ 是 PB、PC 的比例中项，$\therefore \dfrac{PB}{PD}=\dfrac{PD}{PC}$，

$PD=PA$. $\therefore \dfrac{PB}{PA}=\dfrac{PA}{PC}$.

$\because \angle APB=\angle CPA$，$\therefore \triangle PAB\backsim\triangle PCA$，

$\therefore \angle PAB=\angle PCA$.

$\because \angle PDA=\angle PCA+\angle DAC$，

$\angle PDA=\angle PAD$，

$\therefore \angle PAD=\angle PCA+\angle DAC$，

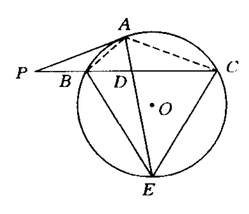


图 7 - 127

即$\angle PAB+\angle BAD=\angle PCA+\angle DAC$，

$\therefore \angle BAD=\angle DAC$，

即$\angle BAE=\angle EAC$，$\therefore \overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{CE}$，$\therefore BE=CE$.

题147 已知：如图 7 - 128，$\odot O$ 是以 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 AC 为直径的圆，且与斜边 AB 交于 D，过 D 作 $DH\perp AC$，垂足为 H，又过点 D 作直线交 BC 于 E，使$\angle HDE=2\angle A$.

求证：(1)DE 是$\odot O$ 的切线；

(2)OE 是 Rt$\triangle ABC$ 的中位线.

证明 (1)连结 OD，则 OD 为$\odot O$ 的半径.

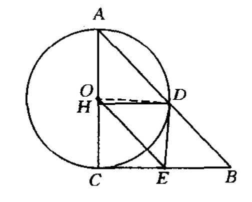


图 7 - 128

$\because \angle HDE=2\angle A$，又$\angle DOH=2\angle A$，

$\therefore \angle HDE=\angle DOH$.

$\because DH\perp AC$，$\therefore \angle DOH+\angle ODH=90°$，

$\therefore \angle HDE+\angle ODH=90°$，

$\therefore DE$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)Rt$\triangle ABC$ 中，直角边 AC 为$\odot O$ 的直径.

$\because AC\perp CB$，$\therefore CE$ 切$\odot O$ 于 C.

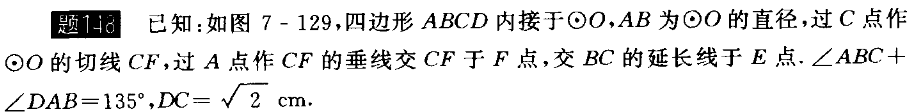
$\because DE$ 切$\odot O$ 于 D，

$\therefore \angle OED=\angle OEC$，$\therefore \angle COE=\angle DOE$，

$\because \angle COE+\angle DOE=2\angle A$，

$\therefore \angle COE=\angle A$，$\therefore OE\parallel AB$.

又$\because AO=OC$，$\therefore OE$ 是 Rt$\triangle ABC$ 的中位线.



题148 已知：如图 7 - 129，四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$，AB 为$\odot O$ 的直径，过 C 点作$\odot O$ 的切线 CF，过 A 点作 CF 的垂线交 CF 于 F 点，交 BC 的延长线于 E 点. $\angle ABC+\angle DAB=135°$，$DC=\sqrt{2}$ cm.

求：AE 的长.

解 延长 AD 交 CE 的延长线于 H 点，则

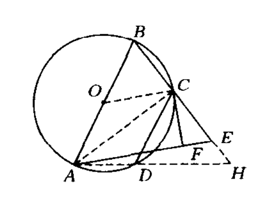


图 7 - 129

$\angle AHB=180°-(\angle ABC+\angle DAB)=45°$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形，

$\therefore \angle DCH=\angle DAB$，$\angle CDH=\angle ABC$，

$\therefore \triangle HCD\backsim\triangle HAB$，$\therefore \dfrac{DC}{AB}=\dfrac{CH}{AH}$.

连结 AC、OC，

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=\angle ACH=90°$.

$\angle CAH=180°-\angle ACH-\angle AHC=45°$.

$\therefore \dfrac{DC}{AB}=\dfrac{CH}{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\therefore AB=\sqrt{2}DC=2$ cm.

$\because CF$ 是⊙O 的切线，$\therefore OC\perp CF$，

又 $AF\perp CF$，$\therefore OC/\!/AE$.

OC 为$\triangle ABE$ 的中位线，$\therefore AE=2OC=AB=2$ cm.

题149 已知：C 为线段 AB 的中点，$BCDE$ 是以 BC 为边的正方形，以 B 为圆心，BD 为半径的圆与 AB 及其延长线相交于 H 及 K.

求证：$AH\cdot AK=2AC^2$.

证明 如图 7 - 130，连结 AD、BD.

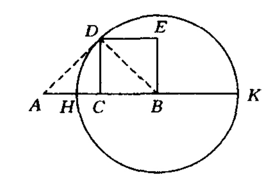


图 7 - 130

$\because CD=BC=AC$，$\therefore \angle ADB=90°$，

$\therefore AD\perp BD$，

$\therefore AD$ 为 ⊙B 的切线.

又$\because AK$ 为⊙B 的割线，$\therefore AH\cdot AK=AD^2$.

$\because CD\perp AB$，$CD=AC$，

$\therefore AD^2=CD^2+AC^2=2AC^2$.

$\therefore AH\cdot AK=2AC^2$.

题150 已知：如图 7 - 131，在⊙O 中，AB 是弦，CD 是直径，$AB\perp CD$，H 是垂足，点 P 在 DC 的延长线上，且$\angle PAH=\angle POA$，$OH:HC=1:2$，$PC=6$.

(1) 求证：PA 是圆 O 的切线；

(2) 求⊙O 的半径的长；

(3) 试在$\overset{\frown}{ACB}$上任取一点 E(与点 A、B 不重合)，连结 PE 并延长与$\overset{\frown}{ADB}$交于点 F，设 $EH=x$，$PF=y$，求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

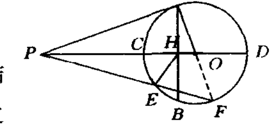


图 7 - 131

解 (1)$\because AH\perp OH$，$\therefore \angle AHO=90°$.

$\therefore \angle HOA+\angle OAH=90°$.

$\because \angle PAH=\angle HOA$，$\therefore \angle PAH+\angle OAH=90°$，

即$\angle PAO=90°$.

又$\because OA$ 是⊙O 的半径，$\therefore PA$ 是⊙O 的切线.

(2)在 Rt$\triangle POA$ 中，$OA^2=OH\cdot OP$.

设 $OH=a$，那么 $CH=2a$，$OA=OC=3a$，$PO=6+3a$.

$\therefore (3a)^2=a(6+3a)$，$\because a>0$，

$\therefore a=1$，$OA=3$，即⊙O 的半径长为3.

(3)连结 OF.

在 Rt$\triangle PAO$ 中，$PA^2=PH\cdot PO$，

由切割线定理,得 $PA^2=PE\cdot PF$,

$\therefore PH\cdot PO=PE\cdot PF$,即$\dfrac{PH}{PF}=\dfrac{PE}{PO}$.

又$\because \angle EPH=\angle OPF$,$\therefore \triangle EPH\backsim\triangle OPF$.

$\therefore \dfrac{PF}{PH}=\dfrac{OF}{EH}$.

$\because PH=8$,$OF=3$,$PF=y$,$EH=x$,

$\therefore y=\dfrac{24}{x}$,自变量 x 的取值范围是$2\leqslant x<2\sqrt{2}$.

题151 已知:如图 7-132,AB 为$\odot O$ 的直径,C 是$\odot O$ 上一点,过点 C 的切线与 AB 的延长线相交于 E,$AD\perp EC$,交$\odot O$ 于 F,垂足为 D,$CG\perp AB$,垂足为 G.

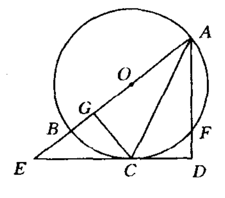


图 7-132



求证:(1)$\triangle ACG\cong\triangle ACD$;

(2)$BG\cdot GA=DF\cdot DA$.

证明 (1)连结 BC.

则$\angle ABC=\angle ACD$,$\angle ACB=90°$.

$\because CG\perp AB$,$\therefore \angle ACG=\angle ABC=\angle ACD$.

又 $AC=AC$,$\angle ADC=90°$,$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACG\cong\mathrm{Rt}\triangle ACD$.

(2)$\because \triangle ACG\cong\triangle ACD$,$\therefore CD=GC$,

$\because CD$ 是$\odot O$ 的切线,$\therefore CD^2=DF\cdot AD$.

又 $CG^2=BG\cdot AG$,$\therefore BG\cdot GA=DF\cdot DA$.

题152 已知:如图 7-133,梯形 $ABCD$ 内接于$\odot O$,$DC/\!/AB$,$AB=AC$,过点 A 作$\odot O$ 的切线与 CD 的延长线交于 E.

求证:$AD^2=ED\cdot EC$.

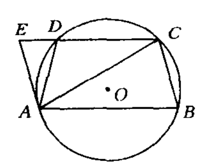


图 7-133

证明 $\because AE$ 是$\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle EAD=\angle ACD$,

$\because DC/\!/AB$,$\therefore \angle ACD=\angle CAB$.

$\therefore \angle EAD=\angle CAB$.

$\because$四边形 $ABCD$ 内接于$\odot O$,$\therefore \angle EDA=\angle CBA$.



$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$,即$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AB}{AC}$.

$\because AB=AC$,$\therefore AD=AE$.

由切割线定理,得 $AE^2=ED\cdot EC$,$\therefore AD^2=ED\cdot EC$.

题153 已知:如图 7-134,$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$,过点 A 作$\odot O$ 的切线交 BC 的延长线于点 P,D 是 AC 的中点,PD 的延长线交 AB 于点 E,弦 $AF\perp BC$ 于点 H,G 是 BF 的中点.

求证：(1) $OG=\frac{1}{2}AC$；

(2) $PC^2:PA^2=AE:BE$.

证明 (1)连结 FO 并延长交⊙O 于 M，连结 BM、AM.

$\because O$、G 分别是 FM、FB 的中点，$\therefore OG=\frac{1}{2}MB$.

$\because FM$ 是⊙O 的直径，$\therefore \angle FAM=90°$，

即 $AF\perp AM$.

又 $\because AF\perp BC$，$\therefore AM/\!/CB$，

$\therefore \overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{AC}$，$BM=AC$，$\therefore OG=\frac{1}{2}AC$.

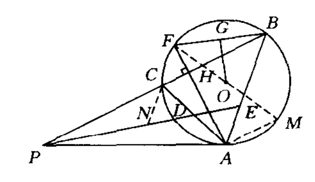


图 7 - 134

(2)过点 C 作 $CN/\!/BA$ 交 PE 于点 N.

$\because D$ 是 AC 的中点，$\angle CDN=\angle ADE$，$\angle CND=\angle AED$，

$\therefore \triangle CDN\cong\triangle ADE$，$\therefore CN=AE$.

$\because CN/\!/BA$，$\therefore \frac{PC}{PB}=\frac{CN}{BE}$，$\therefore \frac{PC}{PB}=\frac{AE}{BE}$.

又 $\because PA$ 为⊙O 的切线，$\therefore PA^2=PC\cdot PB$.

$\therefore \frac{PC^2}{PA^2}=\frac{PC}{PB}$，$\therefore \frac{PC^2}{PA^2}=\frac{AE}{BE}$，

即 $PC^2:PA^2=AE:BE$.

题154 已知：如图 7 - 135，以△ABC 的边 BC 为直径作⊙O，分别交 AB、AC 于点 D、E，过 E 作 BC 的垂线交 BC 于点 F，交⊙O 于点 M，P 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，连结 PC 交 EM 于点 G，连结 BG，$\text{ctg}BGF=\frac{1}{4}$，$AB=13$，$AE=7$.

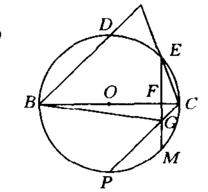


图 7 - 135

(1) 求 $BF:FC$；

(2)求 AD 的长.

解 (1) $\because BC$ 是⊙O 的直径，$\therefore \overset{\frown}{BC}$是180°的弧，

又 $\because P$ 是 $\overset{\frown}{BC}$的中点，$\therefore \overset{\frown}{BP}$是90°的弧，

$\therefore \angle BCP=90°\times\frac{1}{2}=45°$.

$\because EM\perp BC$，$\therefore \angle CFG=90°$.

$\therefore \angle FGC=90°-45°=45°$，$\therefore \angle FGC=\angle BCP$，

$\therefore FC=GF$.

$\because \text{ctg}BGF=\frac{1}{4}$，$\therefore GF:BF=1:4$，

$\therefore BF:FC=4:1$.

(2)连结 BE，则$\angle BEC=90°$.

$\therefore BE\perp AC$，$\therefore \angle BEA=90°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，由勾股定理，得

$BE^2=AB^2-AE^2=13^2-7^2=120$.

设 $FC=x$，则 $BF=4x$，$BC=5x$.

在 Rt$\triangle BEC$ 中，

$BE^2=BF\cdot BC=4x\cdot 5x=20x^2$.

$\therefore 20x^2=120$，$x>0$，$x=\sqrt{6}$.

同理 $CE^2=FC\cdot BC=x\cdot 5x=5x^2=30$，$CE=\sqrt{30}$.

由割线定理，得 $AD\cdot AB=AE\cdot AC$.

$\therefore AD=\dfrac{AE(AE+CE)}{AB}=\dfrac{7(7+\sqrt{30})}{13}=\dfrac{49+7\sqrt{30}}{13}$.

题155 已知：如图 7 - 136，圆 O 是$\triangle ABC$ 的外接圆，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 D，交$\odot O$ 于 E，与过 C 点的切线相交于 F.

求证：(1) $CF\cdot DE=CD\cdot EF$；

(2) $CF\cdot CD=AF\cdot DE$.

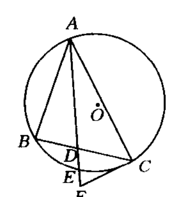


图 7 - 136

证明 (1) 连结 CE.

$\because CF$ 是$\odot O$ 的切线，$\therefore \angle ECF=\angle CAE$.

$\because \angle BAE=\angle BCE$，$\angle BAE=\angle CAE$，

$\therefore \angle ECF=\angle BCE$.

$\therefore \dfrac{CD}{CF}=\dfrac{DE}{EF}$，$\therefore CF\cdot DE=CD\cdot EF$.

(2) $\because CF$ 是$\odot O$ 的切线，

$\therefore CF^2=EF\cdot AF$. $\therefore \dfrac{CF}{AF}=\dfrac{EF}{CF}$.

$\because \dfrac{CD}{CF}=\dfrac{DE}{EF}$，$\therefore \dfrac{EF}{CF}=\dfrac{DE}{CD}$，$\therefore \dfrac{DE}{CD}=\dfrac{CF}{AF}$.

$\therefore CF\cdot CD=AF\cdot DE$.

题156 已知：如图 7 - 137，直线 l 与$\odot O$ 相交，直径 $AB\perp l$ 于 M，直线 AD、AE 分别交$\odot O$ 与 l 于 C、D、E、F.

求证：$AC\cdot AD=AE\cdot AF$.

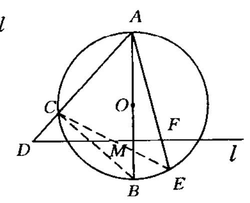


图 7 - 137

证明 连结 CB、CE，AB 是$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ACB=90°$，又 $AM\perp MD$，

$\therefore M$、B、D、C 四点共圆.

$\therefore \angle CDM=\angle B$.

$\because \angle B=\angle E$，$\therefore \angle ADF=\angle E$，

又$\angle CAE=\angle DAF$，$\triangle ACE\backsim\triangle AFD$，

$\therefore \dfrac{AC}{AF}=\dfrac{AE}{AD}$，$\therefore AC\cdot AD=AE\cdot AF$.

题157 已知：如图 7 - 138，AB 是$\odot O$ 的直径，$AB=AC$，$\odot O$ 交 BC 于点 D，$DE\perp AC$ 于点 E，BE 交$\odot O$ 于点 F.

求证：$AE\cdot EC=BE\cdot EF$.

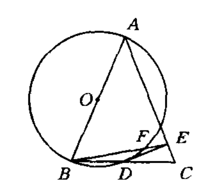


图 7 - 138

证明 连结 AD、OD.

$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，$\therefore AD\perp BC$.

$\because DE\perp AC$，$\therefore DE^2=AE\cdot EC$.

$\because AB=AC$，$\therefore BD=DC$.

$\because OB=OA$，$\therefore OD$ 是$\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore OD/\!/AC$，$\therefore DE\perp OD$，DE 是$\odot O$ 的切线.

$\therefore DE^2=BE\cdot EF$，$\therefore AE\cdot EC=BE\cdot EF$.

题158 已知：如图 7 - 139，AB 是$\odot O$ 的直径，C 是 BA 延长线上一点，CD 切$\odot O$ 于 D，$\angle BCD$ 的平分线交 BD 于 E，$CA=1$，CD 是$\odot O$ 半径的 $\sqrt{3}$ 倍.

求：DE 和 EB 的长.

解 设$\odot O$ 的半径为 R，则 $CD=\sqrt{3}R$，$CB=1+2R$.

$\because CD$ 是$\odot O$ 的切线，$\therefore CD^2=CA\cdot CB$.

$\therefore(\sqrt{3}R)^2=1\times(1+2R)$，$R_1=1$，$R_2=-\dfrac{1}{3}$（不合题意，舍去）.

$\therefore CD=\sqrt{3}$，$CB=3$.

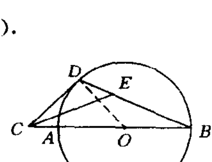


图 7 - 139

连结 OD，则 $OD\perp CD$.

$\because OD=\dfrac{1}{2}AB=1=\dfrac{1}{2}OC$，

$\therefore \angle OCD=30^\circ$，$\angle COD=60^\circ$，

$\therefore \angle B=30^\circ$，$\therefore DB=CD=\sqrt{3}$.

$\because CE$ 平分$\angle BCD$，$\therefore \dfrac{DE}{EB}=\dfrac{CD}{CB}$.

设 $DE=x$，则 $EB=\sqrt{3}-x$.

$\therefore \dfrac{x}{\sqrt{3}-x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $x=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})$.

即 $DE=\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})$.

$EB=\sqrt{3}-x=\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})=\dfrac{3}{2}(\sqrt{3}-1)$.

题159 已知：如图 7 - 140，在$\triangle ABC$ 中，$AC=2$ cm，周长为8 cm，P、K、N 是$\triangle ABC$

与其内切圆 O 的切点，作 $DE/\!/AC$ 切⊙O 于点 M，交 AB 于 D，交 BC 于 E.

求：DE 的长.

解 ∵P、K、N 是$\triangle ABC$ 与其内切圆的切点.

∴$AP=AK, CP=CN$，

∴$AK+NC+AC=4$，

$DK=DM, ME=EN$，∴$\triangle BED$ 的周长为4.

∵$DE/\!/AC$，∴$\triangle BDE\backsim\triangle BAC$，

∴$\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{4}{8}$，$AC=2$，∴$DE=1$ cm.

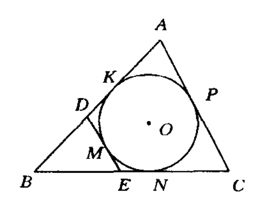


图 7 - 140

题160 已知：如图 7 - 141，$ABCD$ 为圆内接四边形，$DC=BC$，对角线 DB 与 AC 交于 E，若 $CE:EA=1:3$，$AB+AD=m$.

求：BD 的长.

解 设 $EC=x$，则 $AC=4x$.

∵$\angle CAB=\angle DBC$，$\angle ACB$ 为公共角.

∴$\triangle ABC\backsim\triangle BEC$，∴$\dfrac{EB}{AB}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{EC}{BC}$.

$BC^2=AC\cdot EC=4x^2$，∴$BC=2x$.

∴$\dfrac{EB}{AB}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{1}{2}$，$EB=\dfrac{1}{2}AB$. 同理：$DE=\dfrac{1}{2}AD$.

∴$DB=\dfrac{1}{2}(AB+AD)=\dfrac{1}{2}m$.

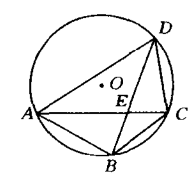


图 7 - 141

题161 已知：如图 7 - 142，PE、PF 分别与⊙O 相切于 E、F 两点，A 为⊙O 上不同于 E、F 的点，$AB\perp EF$ 于 B，$AC\perp PE$ 于 C，$AD\perp PF$ 于 D.

求证：(1) A、B、E、C 四点共圆，A、B、D、F 四点共圆；

(2) $\angle ACB=\angle ABD$；

(3) $\triangle ACB\backsim\triangle ABD$；

(4) $AC\cdot AD=AB^2$.

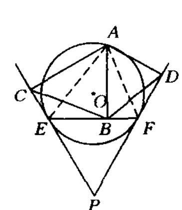


图 7 - 142

证明 (1) ∵$AB\perp EF$，$AC\perp PE$，

∴A、B、E、C 四点共圆.

同理，A、B、F、D 四点共圆.

(2) 连结 AF、AE，则$\angle ACB=\angle AEB=\angle AEF$.

∵PF 为切线，∴$\angle AEF=\angle AFD$，

又$\angle AFD=\angle ABD$，∴$\angle ACB=\angle ABD$，

(3) $\angle CEB=\angle DFB$，∴$\angle CAB=\angle BAD$，

又$\angle ACB=\angle ABD$，∴$\triangle ACB\backsim\triangle ABD$.

(4) $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AB}{AD}$，∴$AB^2=AC\cdot AD$.

题162 已知:如图 7 - 143,设四边形 $ABCD$ 内接于圆,AD 与 BC 的延长线交于点 F,AB 与 DC 的延长线交于点 E,由 E、F 向圆引切线 EP、FQ.

求证:$EP^2+FQ^2=EF^2$.

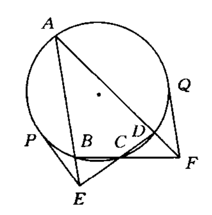


图 7 - 143

证明 过 C、D、F 三点可作一圆,此圆交 EF 于 K,

则 $EP^2=EC\cdot ED=EK\cdot EF$

$\because \angle CKE=\angle CDF, \angle CDF=\angle ABC$

$\therefore \angle ABC=\angle CKE$,$\therefore E$、$B$、$C$、$K$ 四点共圆.

$\therefore FQ^2=FC\cdot FB=FK\cdot EF$

$\therefore EP^2+FQ^2=EK\cdot EF+FK\cdot EF$

$=(EK+FK)\cdot EF=EF^2$.

题163 已知:圆内接四边形 $ABCD$. 求证:$\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{AB\cdot AD+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+AD\cdot CD}$.

证明 连结 AC、BD.

$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot \sin A, S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BC\cdot CD\cdot \sin C$,

且 $\sin A=\sin C$,

$\therefore S_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AB\cdot AD\cdot +BC\cdot CD)\sin A$,

同理 $S_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{2}(AB\cdot BC\cdot +AD\cdot DC)\sin B$,

若设圆半径为 R,则 $\sin A=\dfrac{BD}{2R}, \sin B=\dfrac{AC}{2R}$.

$\therefore \dfrac{1}{2}(AB\cdot AD+BC\cdot CD)\sin A=\dfrac{1}{2}(AB\cdot BC+AD\cdot DC)\sin B$,

$$\frac{AB\cdot AD+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+AD\cdot DC}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{\frac{AC}{2R}}{\frac{BD}{2R}}=\frac{AC}{BD}.$$

题164 已知:过⊙O 内任一点 G 作互相垂直的弦 BD、AC.

求证:$BG^2+DG^2+AG^2+CG^2$ 为定值.

证明 如图 7 - 144,连结 AB、BC、AD,过 A 点作直径 AE,连结 DE,

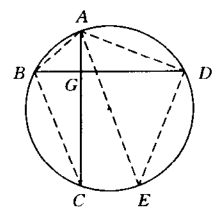


图 7 - 144

$\because \angle BAC+\angle ABD=90°$,

$\angle EAD+\angle E=90°$,

$\angle ABD=\angle E$,

$\therefore \angle BAC=\angle EAD, BC=DE$.

则 $BG^2+DG^2+AG^2+CG^2=BC^2+AD^2$

$=DE^2+AD^2=AE^2=4R^2$(定值).

题165 已知：$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 分别为 a、b、c，其外接圆半径为 R，三角形的面积为 S.

求证：$S=\dfrac{abc}{4R}$.

证明 如图 7 - 145，作 $AD\perp BC$ 于 D，AA' 为直径，

$\therefore \angle ABA'=\angle ADC=\angle 90°$.

$\because \angle AA'B=\angle ACB$，$\therefore \triangle ABA'\backsim\triangle ADC$，

$\therefore AB\cdot AC=AD\cdot AA'=2R\cdot AD$.

$\because S=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC$，

$\therefore AB\cdot AC=2R\cdot\dfrac{2S}{BC}$，

$\therefore S=\dfrac{BC\cdot CA\cdot AB}{4R}=\dfrac{abc}{4R}$.

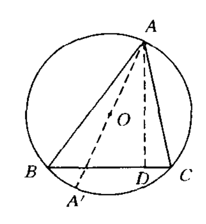


图 7 - 145

题166 已知：如图 7 - 146，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$CD\parallel AB$，$CD=6$，$AD=10$，$\angle A=60°$，以 CD 为弦的弓形弧与 AD 相切于 D，P 是 AB 上的一个动点，可以与 B 重合，但不与 A 重合，DP 交弓形弧于 Q.

(1) 求证：$\triangle CDQ\backsim\triangle DPA$；

(2) 设 $DP=x$，$CQ=y$，写出 y 关于自变量 x 的函数关系式，并求出自变量 x 的取值范围.

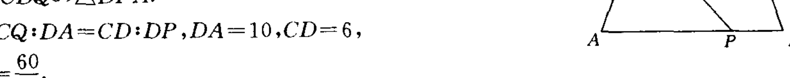
(3) 当 DP 之长是方程 $x^2-8x-20=0$的一根时，求四边形 $PBCQ$ 的面积.

解 (1) $\because CD\parallel AB$，$\therefore \angle CDQ=\angle DPA$，

$\because AD$ 切弓形弧于 D，$\therefore \angle DCQ=\angle PDA$，

$\therefore \triangle CDQ\backsim\triangle DPA$.

(2) $CQ:DA=CD:DP$，$DA=10$，$CD=6$，



$\therefore y=\dfrac{60}{x}$.

图 7 - 146

$\because$ 动点 P 可与 B 重合，也可与 D 在 AB 上的垂足 H 重合，且 D 在与线段 AB 上的点所连的线中，DB 最长，DH 最短.

$\therefore DH\leqslant DP\leqslant DB$，即 $DH\leqslant x\leqslant DB$.

在 Rt$\triangle AHD$ 中，$DH=10\cdot\sin60°=5\sqrt{3}$

在$\triangle BCD$ 中，$DB=\sqrt{CD^2+BC^2-2\cdot CD\cdot BC\cdot\cos120°}$

$=\sqrt{6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos120°}=14$.

$\therefore x$ 的取值范围是$5\sqrt{3}\leqslant x\leqslant14$.

(3) $x^2-8x-20=0$，$x_1=10$，$x_2=-2$(不合题意，舍去).

$\therefore DP=10$，则 $CQ=6$，$\triangle DPA$ 为等边三角形.

$\therefore S_{\triangle DPA}=25\sqrt{3}$.

$\triangle CDQ$ 为等边三角形，$S_{\triangle CDQ}=9\sqrt{3}$.

$\therefore$ 梯形 $ABCD$ 的面积为$55\sqrt{3}$，四边形 $PBCQ$ 的面积为$21\sqrt{3}$.

题167 已知：如图 7 - 147，若$\triangle ABC$ 的$\angle C$ 的平分线和 AB 边的垂直平分线相交于 D.

求证：$\angle ACB+\angle ADB=180°$.

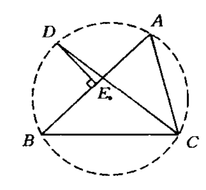


图 7 - 147

证明 作$\triangle ABC$ 的外接圆.

$\angle C$ 的平分线过$\overset{\frown}{AB}$的中点 D.

$\because AB$ 的垂直平分线也过$\overset{\frown}{AB}$的中点.

$\therefore\angle C$ 的平分线与 AB 边的垂直平分线的交点 D 是$\overset{\frown}{AB}$的中点.

$\therefore A$、D、B、C 在同一圆周上.

$\therefore\angle ACB+\angle ADB=180°$.

题168 已知：如图 7 - 148，$\odot O$ 为$\triangle ABC$ 的外接圆，$\angle BAC$ 的平分线交$\odot O$ 于 D，$\angle BAC$ 的外角平分线交外接圆于 E.

求证：DE 垂直平分 BC，DE 为$\odot O$ 的直径.

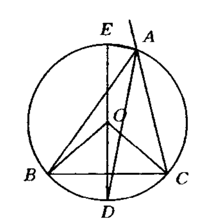


图 7 - 148

证明 $\because D$ 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，

$\therefore\angle BOD=\angle COD$.

$\therefore OD$ 是等腰三角形 BOC 顶角 O 的平分线，

$\therefore OD$ 垂直平分 BC，

延长 DO 与圆周的交点为 E'，连结 AE'.

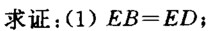
$\because DE'$是直径，$\angle DAE'=90°$.

$\because AD$ 是$\angle A$ 的内角平分线，AE 是外角平分线，

$\therefore\angle DAE=90°$，$\therefore E$ 与 E'重合.

$\therefore DE$ 垂直平分 BC，DE 为$\odot O$ 的直径.

题169 如图 7 - 149，已知：在不等边三角形 ABC 中，设从点 C 作垂线 CG 垂直于$\angle BAC$ 的平分线于 G，与 AB 及该三角形的外接圆的交点分别为 D、E.



求证：(1) $EB=ED$；

(2) $AE>\frac{1}{2}(AB+AC)$.

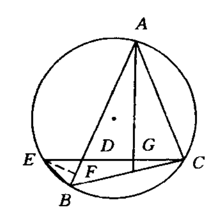


图 7 - 149

证明 (1) 在$\triangle ACD$ 中，$\angle A$ 的平分线垂直于 CD.

$\therefore AC=AD$，$\therefore\angle ACD=\angle ADC$.

又$\angle EDB=\angle ADC$，$\angle EBA=\angle ECA$，

$\therefore \angle EDB = \angle EBD$，$\therefore EB = ED$.

(2) 作 $EF \perp AB$ 于 F，

$\because EB = ED$，$\therefore F$ 是 BD 的中点.

$\therefore AE > AF = \frac{1}{2}[(AB - BF) + (AD + DF)]$

$= \frac{1}{2}(AB + AD) = \frac{1}{2}(AB + AC)$.

题170 已知：如图 7 - 150，$\triangle ABC$ 内接于$\odot O$，弦 AB 的垂直平分线 OD 与 AB、AC 分别相交于 M、N，与 BC 的延长线相交于 P，与$\overset{\frown}{AB}$相交于 D.

求证：(1) $ON \cdot NP = AN \cdot NC$.

(2) $OA^2 = ON \cdot OP$.

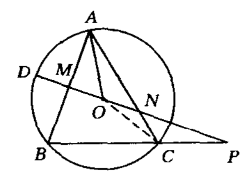


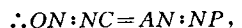
图 7 - 150

证明 (1) $\because OD \perp AB$，$AM = MB$，

$\therefore \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB}$，$\overset{\frown}{AD} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{ADB}$，

$\therefore \angle ACB = \angle AOD$，$\therefore \angle AON = \angle NCP$.

又$\because \angle ANO = \angle PNC$，$\therefore \triangle ANO \backsim \triangle PNC$，



$\therefore ON : NC = AN : NP$，

即 $ON \cdot NP = AN \cdot NC$.

(2) 连结 OC.

$\because \triangle ANO \backsim \triangle PNC$，$\therefore \angle OAN = \angle CPN$，

$\because OA = OC$，$\therefore \angle OAN = \angle OCN$，

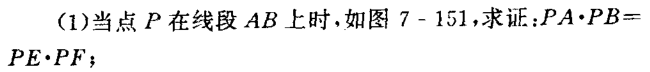
$\therefore \angle CPN = \angle OCN$，且$\angle CON = \angle COP$，

$\therefore \triangle CON \backsim \triangle POC$.

$\because OC : OP = ON : OC$，即 $OC^2 = ON \cdot OP$，

$\because OC = OA$，$\therefore OA^2 = ON \cdot OP$.

题171 已知：$\triangle ABC$ 是$\odot O$ 的内接三角形，BT 为$\odot O$ 的切线，B 为切点，P 为直线 AB 上一点，过点 P 作 BC 的平行线交直线 BT 于点 E，交直线 AC 于点 F.



(1)当点 P 在线段 AB 上时，如图 7 - 151，求证：$PA \cdot PB = PE \cdot PF$；

(2)当点 P 为线段 BA 延长线上一点时，上面的结论还成立吗？如果成立，请证明；如果不成立，请说明理由.

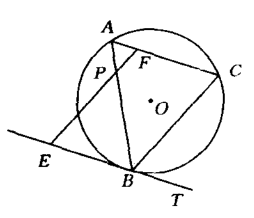
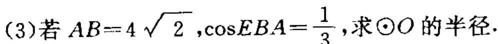


图 7 - 151



(3)若 $AB = 4\sqrt{2}$，$\cos EBA = \frac{1}{3}$，求$\odot O$ 的半径.

证明 (1)$\because BT$ 切$\odot O$ 于点 B，$\therefore \angle EBA = \angle C$.

$\because EF /\!/ BC$，$\therefore \angle AFP = \angle EBP$.

$\because \angle APF=\angle EPB$，$\therefore \triangle PFA \backsim \triangle PBE$，$\therefore \dfrac{PA}{PE}=\dfrac{PF}{PB}$，

$\therefore PA \cdot PB=PE \cdot PF$.

(2)当 P 为 BA 延长线上一点时，上面的结论仍成立，如图7 - 152.

$\because BT$ 切⊙O 于点 B，$\therefore \angle EBA=\angle C$.

$\because EP /\!/ BC$，

$\therefore \angle PFA=\angle C$，$\angle PFA=\angle PBE$.

又$\because \angle FPA=\angle BPE$，

$\therefore \triangle PFA \backsim \triangle PBE$，

$\therefore \dfrac{PF}{PB}=\dfrac{PA}{PE}$，$\therefore PA \cdot PB=PE \cdot PF$.

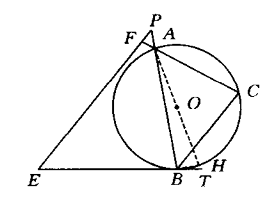


图 7 - 152

(3)作直径 AH，连结 BH，$\therefore \angle ABH=90°$.

$\because BT$ 切⊙O 于点 B，$\therefore \angle EBA=\angle AHB$.

$\because \cos EBA=\dfrac{1}{3}$，$\therefore \cos AHB=\dfrac{1}{3}$.

$\because \sin^2 AHB+\cos^2 AHB=1$，又$\angle AHB$ 为锐角，

$\therefore \sin AHB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

在 $Rt\triangle ABH$ 中，$\because \sin AHB=\dfrac{AB}{AH}$，$AB=4\sqrt{2}$，

$\therefore AH=\dfrac{AB}{\sin AHB}=6$，$\therefore$ ⊙O 半径为3.

题172 已知：如图 7 - 153，⊙O 的半径 OB 垂直于直径 AC，M 为 AO 上一点，BM 的延长线交⊙O 于 N，过 N 点的切线交 CA 的延长线于 P.

(1)求证：$PM^2=PA \cdot PC$.

(2)若⊙O 的半径为$2\sqrt{3}$，$OA=\sqrt{3}OM$，求$\triangle PMN$ 的周长.

解 (1)连结 ON.

$\because PN$ 是⊙O 的切线，$\therefore \angle ONM+\angle MNP=90°$.

$\because BO \perp AC$，$\therefore \angle OBM+\angle BMO=90°$.

$\because \angle BNO=\angle OBN$，$\angle BMO=\angle NMP$，

$\therefore \angle PMN=\angle PNM$，$\therefore PM=PN$.

$\therefore PN^2=PA \cdot PC$，$\therefore PM^2=PA \cdot PC$.

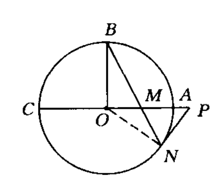


图 7 - 153

(2)$\because OA=\sqrt{3}OM$，

$\therefore OB=\sqrt{3}OM$，$\dfrac{OB}{OM}=\sqrt{3}$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BMO$ 中，$\operatorname{tg} BMO=\sqrt{3}$，$\angle BMO=60°$.

$\therefore \angle PMN=60°$，$\therefore \triangle PMN$ 是等边三角形.

$\because OB=2\sqrt{3}$，$\therefore OM=2, BM=4$，

则 $CM=2\sqrt{3}+2, AM=2\sqrt{3}-2$.

$\therefore BM\cdot MN=CM\cdot MA$，

$MN=\frac{CM\cdot MA}{BM}=\frac{(2\sqrt{3}+2)(2\sqrt{3}-2)}{4}=2$，

$\therefore \triangle PMN$ 的周长为6.

题173 如图7－154，AB 是过⊙O 内一点 P 的弦，且 $PO\perp OB$，半径 $OB=r$，$PO=d$，求 AB.

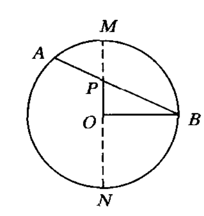


图 7－154

解 延长 PO 与⊙O 交于 N，延长 OP 与⊙O 交于 M.

由相交弦定理，得

$PA\cdot PB=PM\cdot PN=(r-d)(r+d)=r^2-d^2$.

$PB^2=PO^2+OB^2=d^2+r^2$，

$\therefore PB=\sqrt{d^2+r^2}$，

$PA=\frac{PM\cdot PN}{PB}=\frac{r^2-d^2}{\sqrt{d^2+r^2}}$，

$AB=PA+PB=\frac{r^2-d^2}{\sqrt{d^2+r^2}}+\sqrt{d^2+r^2}=\frac{2r^2}{\sqrt{d^2+r^2}}$.

题174 已知：如图 7－155，在△ABC 中，$\angle B=60°$，$AB:AC=5:7$，其内切⊙O 与 BC、CA、AB 边分别相切于点 D、E、F，且⊙O 的面积为12π，求△ABC 的三边长.

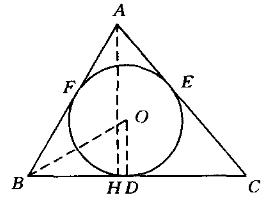


图 7－155

解 设⊙O 的半径为 R，则 $\pi R^2=12\pi$，

$\therefore R=2\sqrt{3}$，

连结 OB、OD，则 $OD\perp BC$，$\angle OBD=30°$，

$\therefore BD=OD\cdot \text{ctg}30°=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=6$，

$\therefore BF=6$.

设 $AB=5x$，$AC=7x$，则 $AF=AE=5x-6$，

$\therefore EC=CD=7x-(5x-6)=2x+6$.

作 $AH\perp BC$ 于 H，则

$AH=5x\cdot\sin60°=\frac{5}{2}\sqrt{3}x$，

$BH=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}x$.

$CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{(7x)^2-(\frac{5}{2}\sqrt{3}x)^2}=\frac{11}{2}x$，

$\therefore BC=BH+CH=\frac{5}{2}x+\frac{11}{2}x=8x$.

$\because BD+DC=BC$，$\therefore 6+2x+6=8x$，$x=2$.

$\therefore AB=10$，$AC=14$，$BC=16$.

题175　已知：如图 7-156，PA 为⊙O 的切线，A 为切点，PBC 是过点 O 的割线，$PA=10$，$PB=5$，$\angle BAC$ 的平分线与 BC 和⊙O 分别相交于 D 和 E.

求：(1)⊙O 的半径；

(2)$\sin BAP$ 的值；

(3)$AD\cdot AE$ 的值.

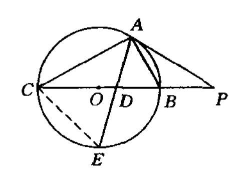


图 7-156

解　(1)由切割线定理，得 $PA^2=PB\cdot PC$，

$\therefore 10^2=5(5+BC)$，

$\therefore BC=15$，⊙O 的半径为7.5.

(2)在$\triangle PBA$ 和$\triangle PAC$ 中，

$\because \angle BAP=\angle ACP$，$\angle P=\angle P$，

$\therefore \triangle PBA\backsim\triangle PAC$，$\therefore \frac{AB}{CA}=\frac{AP}{CP}$.

$\because \frac{AP}{CP}=\frac{10}{5+15}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{AB}{CA}=\frac{1}{2}$.

$\because BC$ 是⊙O 的直径，$\therefore \angle BAC=90°$.

设 $AB=x$，则 $CA=2x$，由勾股定理可得：$BC=\sqrt{5}x$.

$\therefore \sin ACB=\frac{AB}{BC}=\frac{x}{\sqrt{5}x}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\because \angle BAP=\angle ACB$，$\therefore \sin BAP=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3)连结 CE. $\angle CAE=\angle BAD$，$\angle E=\angle ABD$，

$\therefore \triangle ACE\backsim\triangle ADB$，$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AC}{AD}$，即 $AD\cdot AE=AB\cdot AC$.

由(2)可知$\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. $\because BC=15$，$\therefore AB=\frac{\sqrt{5}}{5}\times 15=3\sqrt{5}$，

$\therefore AC=2AB=6\sqrt{5}$，$\therefore AD\cdot AE=3\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5}=90$.

题176　已知：如图 7-157，菱形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于点 O，⊙O'是$\triangle ABD$ 的外接圆，E 是⊙O'上的一点，连结 AE 并延长与 BD 的延长线相交于点 F.

求证：$AC^2+BD^2=4AE\cdot AF$.

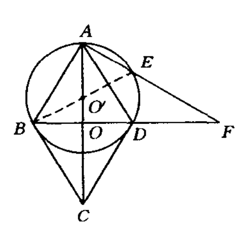


图 7-157

证明　连结 BE，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=AD$，$\therefore \angle ABD=\angle ADB$.

$\because \angle AEB=\angle ADB$，$\therefore \angle AEB=\angle ABD$.

又$\because \angle EAB=\angle BAF$，$\therefore \triangle AEB\backsim\triangle ABF$，

$\therefore \frac{AE}{AB}=\frac{AB}{AF}$，$\therefore AB^2=AE\cdot AF$.

$\because AC\perp BD$，$\therefore\angle AOB=90°$.

在 $Rt\triangle AOB$ 中，由勾股定理，得 $AB^2=AO^2+BO^2$.

又 $\because AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore AB^2=\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BD\right)^2=\frac{1}{4}(AC^2+BD^2)$，

$\therefore\frac{1}{4}(AC^2+BD^2)=AE\cdot AF$，

即 $AC^2+BD^2=4AE\cdot AF$.

题177 已知：如图 7 - 158，AD 是 $\odot O$ 的切线，AC 是 $\odot O$ 的弦，过 C 作 AD 的垂线，垂足为 B，CB 与 $\odot O$ 交于点 E，AE 平分 $\angle CAB$，且 $AE=2$，求 $\triangle ABC$ 各边的长.

解 $\because AD$ 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore\angle EAD=\angle ACB$.

$\because AE$ 平分 $\angle CAB$，$\therefore\angle CAE=\angle EAD$.

$\therefore\angle CAE=\angle EAD=\angle ACB$.

又 $\because CB\perp AD$，$\angle CBA=90°$，

$\therefore\angle CAE=\angle EAD=\angle ACB=30°$.

在 $Rt\triangle EAB$ 中，$AE=2$，$\angle EAB=30°$，

$\therefore AB=AE\cdot\cos 30°=\sqrt{3}$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中 $AB=\sqrt{3}$，$\angle ACB=30°$，

$\therefore AC=2AB=2\sqrt{3}$，$BC=AC\cdot\cos 30°=3$.

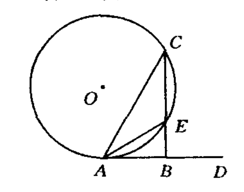


图 7 - 158

题178 已知：如图 7 - 159，AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线，$\odot O$ 内切于 $\triangle ABC$，且 $\odot O$ 的半径为1，$tgCAB=\frac{3}{4}$.

求 DO 的长.

解 $\because tgCAB=\frac{CB}{AB}=\frac{3}{4}$，

设 $CB=3x$，$AB=4x$.

在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=5x$.

$\therefore r=\frac{AB+BC-AC}{2}=\frac{3x+4x-5x}{2}=1$，

$\therefore x=1$，则 $AB=4$，$BC=3$.

作 $OE\perp CD$ 于 E，则 $OE=2$，$DE=3$，

$\therefore OD=\sqrt{OE^2+DE^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

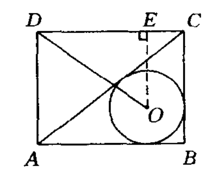
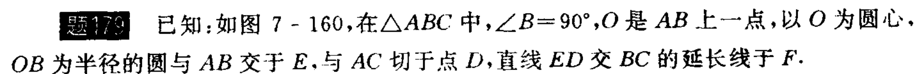


图 7 - 159


题179 已知：如图 7 - 160，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，O 是 AB 上一点，以 O 为圆心，OB 为半径的圆与 AB 交于 E、与 AC 切于点 D，直线 ED 交 BC 的延长线于 F.

(1)求证：$BC=FC$.

(2)若 $AD:AE=2:1$，求 $ctgF$ 的值.

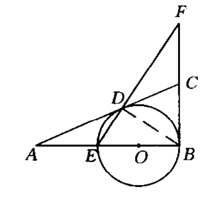


图 7 - 160

解 (1)连结 BD，$\angle EDB=90°$.

$\therefore \angle DBE+\angle DEB=90°$，$\angle F+\angle DEB=90°$，

$\therefore \angle F=\angle DBE$，$AC$ 与⊙O 切于 D.

$\therefore \angle FDC=\angle ADE=\angle DBE$.

$\therefore \angle F=\angle CDF$，$CF=CD$.

由切线长定理知：$CD=CB$，$\therefore BC=FC$.

(2)$\angle ADE=\angle ABD$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABD$.

$\therefore \dfrac{BD}{DE}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{2}{1}$，$\mathrm{ctg}F=\mathrm{ctg}DBE=\dfrac{BD}{DE}=2$.

题180 已知：如图 7 - 161，⊙F 过 $A(0,6)$，$B(8,0)$ 及 $O(0,0)$ 三点，过点 A 作⊙O 的切线，与坐标轴交于 C.

(1)求⊙F 半径的长及 C 点的坐标；

(2)一平行于 AC 的直线由 A 向 B 移动，交⊙F 于 MN，过 M、N 作 $QM\perp MN$ 交⊙F 于 Q，$PN\perp MN$ 交⊙F 于 P，则得到 $MNPQ$，若 $MN=2x$，矩形 $MNPQ$ 的面积为 y，求 x 与 y 的函数关系，并写出 x 的取值范围.

(3)求 y 的最大值.

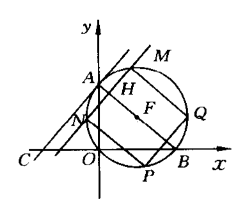


图 7 - 161

解 (1)$\because OA=6$，$OB=8$，则 $AB=10$.

$\because \angle AOB=90°$，AB 为圆的直径，

$\therefore$ ⊙F 的半径为5.

$\because AC\perp AB$，$AO\perp BC$，$\therefore \triangle ACO\backsim\triangle BAO$，

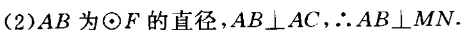
$\therefore \dfrac{CO}{AO}=\dfrac{AO}{BO}$，$CO=\dfrac{AO^2}{BO}=\dfrac{9}{2}$，

$\therefore C$ 点坐标为$\left(-\dfrac{9}{2},0\right)$.

(2)AB 为⊙F 的直径，$AB\perp AC$，$\therefore AB\perp MN$.

若 AB 与 MN 交于 H，则 $MH=HN=x$.

$FH=\sqrt{5^2-x^2}$，$\therefore MQ=2\sqrt{5^2-x^2}$，


$\therefore y=4x\sqrt{5^2-x^2}$，$(0<x<5)$.

(3)当 $MNPQ$ 为正方形时，y 的值最大，最大值为50.

题181 已知：如图 7 - 162，$A(2,0)$、$B(-2,0)$、$C(0,-1)$，过 A、B、C 三点作⊙F 交 y 轴正半轴于 D.

(1)求点 D 的坐标及⊙F 的半径；

(2)在 x 轴正半轴上有一点 P，过 P 作圆的切线 PT，若 $P(x,0)$，且$4\leqslant x\leqslant 8$，求 PT 的取值范围；

(3)求证：过 P、F、T 三点的圆的圆心在 PO 的垂直平分线上.

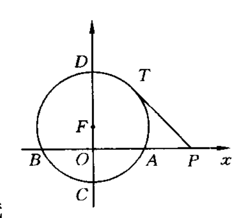


图 7 - 162

解 (1)A、B 两点关于 y 轴对称，$\therefore CD$ 为$\odot F$ 的直径.

又 $AO\cdot BO=CO\cdot DO$，

$\therefore 2\times 2=1\times DO, OD=4, \therefore D(0,4)$.

$\therefore CD=5$，$\odot F$ 的半径为$\frac{5}{2}$.

(2)$\because PT^2=PA\cdot PB=(x-2)(x+2)=x^2-4$，

$\because 4\leqslant x\leqslant 8$，且 $PT=\sqrt{x^2-4}$，

$\therefore 2\sqrt{3}\leqslant PT\leqslant 2\sqrt{15}$.

(3)$\because \triangle PFT$ 是直角三角形，$\therefore$过 P、F、T 三点的圆的圆心是 PF 的中点 M.

在 Rt$\triangle POF$ 中，M 是斜边 PF 的中点，$\therefore OM=PM$，$\therefore M$ 在 PO 的垂直平分线上.

题182 已知：如图 7 - 163，Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，以点 C 为圆心，作圆 C 切 AB 于点 D，交 AC 于点 E，延长 AC 交$\odot C$ 于点 F，连结 DF. 若 $AD=9$，$DB=16$.

求：(1)$\odot C$ 的半径；

(2)tgDFE 的值.

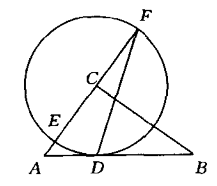


图 7 - 163

解 (1)连结 CD，则 $CD\perp AB$，又$\angle ACB=90°$，

$\therefore CD^2=AD\cdot DB=9\times 16$，$\therefore CD=12$.

(2)$\because \odot C$ 的半径为12，则 $EF=24$，

$\therefore AD^2=AE\cdot AF$，$\therefore 9^2=AE\cdot(AE+24)$，

解得 $AE=3$，$AE=-27$(舍去).

过 C 作 $CH\parallel AB$，交 DF 于 H，则$\angle DCH=90°$，又 $CD=CF$，

$\therefore \angle CDH=\angle DFE$，

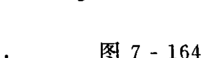
$\because \frac{CF}{AF}=\frac{CH}{AD}$，$\therefore \frac{12}{27}=\frac{CH}{9}$，$\therefore CH=4$.

$\therefore \text{tg}DFE=\text{tg}CDH=\frac{CH}{CD}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

题183 已知：如图 7 - 164，PA 切$\odot O$ 于 A，$\odot O$ 的半径为 8，$PA=6$，PO 及其延长线分别交$\odot O$ 于 B、C 两点.

(1)求 CP 的长；

(2)如果割线 PBC 绕点 P 旋转且与$\odot O$ 有两个不同交点 B'、C' ($PC'>PB'$)，令 $PC'=x$，$PB'=y$.


图 7 - 164

①试求 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量 x 的取值范围；

②在割线 PBC 绕点 P 旋转过程中，当 $\text{tg}OPC'=\frac{3}{4}$时，试求 x 的值.

解 (1)连结 OA.

$\because PA$ 切$\odot O$ 于 A，$\therefore OA\perp PA$.

又 $OA=8$，$PA=6$，$\therefore OP=\sqrt{PA^2+OA^2}=10$.

$\therefore PC=PO+OC=10+8=18$.

(2)①当割线 PBC 绕点 P 转动且与⊙O 交于 B'、C'时，

$\because PC'=x, PB'=y$.

根据切割线定理，$PA^2=PB'\cdot PC'$.

又 $PA=6$，$\therefore 6^2=xy$，即 $y=\dfrac{36}{x}$.

由(1)知，$PC=18$，$PA=6$，

$\because PA<PC'\leqslant PC$，$\therefore$ 自变量 x 的取值范围是$6<x\leqslant 18$.

②作 $OD\perp B'C'$于 D，在 Rt$\triangle ODP$ 中，$OP=10$，

$\operatorname{tg}OPD=\dfrac{3}{4}=\dfrac{OD}{DP}$，设 $OD=3k$，$DP=4k(k>0)$，

$\because OD^2+DP^2=PO^2$，$\therefore (3k)^2+(4k)^2=10^2$，

解得 $k=2$，$\therefore DP=8$.

$\because PC'=x$，$\therefore C'D=PC'-DP=x-8$.

由垂径定理，$DB'=C'D=x-8$，

$\therefore PB'=DP-DB'=8-(x-8)=16-x$，即 $y=16-x$.

$\therefore \begin{cases} y=16-x, \\ xy=36. \end{cases}$

$\therefore x^2-16x+36=0$，$x_1=8+2\sqrt{7}$，$x_2=8-2\sqrt{7}$.

由$6<x\leqslant 18$可知 $x_2=8-2\sqrt{7}$(不合题意，舍去).

而$6<8+2\sqrt{7}<18$，$\therefore$当 $\operatorname{tg}OPC'=\dfrac{3}{4}$时，$x=8+2\sqrt{7}$.

题181 已知：如图 7 - 165，在直角坐标系 xOy 中，点 A、B 的坐标分别为(8,0)和(0,6)，⊙O'为$\triangle AOB$ 的内切圆，切点分别是 E、F、G，它的外切四边形 $BOCD$ 的边 CD 交 AO 于 C，交 AB 于 D；如果边 OC、BD 的长恰是方程 $x^2-9x+k=0$的两个实根.

(1)求四边形 $BOCD$ 的周长，并指出边 CD 的长；

(2)求方程 $x^2-9x+k=0$中符合上述条件的 k 值；

(3)点 B、O'、C 能否在同一直线上；若能则求出该直线的解析式，若不能请说明理由.

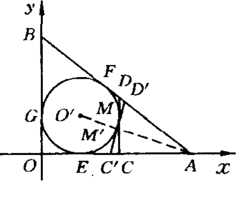
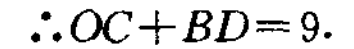


图 7 - 165

解 (1)$\because$边 OC、BD 的长是方程 $x^2-9x+k=0$的两个实根，



$\therefore OC+BD=9$.

由切线长定理，知圆外切四边形对边之和相等，

$\therefore BO+CD=9$，$\therefore$四边形 $BOCD$ 的周长为18.

而 $BO=6$，$\therefore$此时 $CD=3$.

(2)显然，当 C、D 分别是 OA、BA 的中点时，CD 与⊙O'相切于点 M，且 $CD=3$，此时

$OC=4, BD=5$,

$\therefore k=OC\cdot BD=20$.

根据圆的对称性及角的对称性，AO'为$\angle BAO$与$\odot O'$的对称轴，则有M'与M对称，过M'的切线交OA于C'，交AB于D'，此时$C'D'=3$，则$BD'=BO=6, C'D'=OC'=3$.

$\therefore k=OC'\cdot BD'=18$.

综上所述，满足条件的k值为20或18.

(3)由已知条件易得，$\odot O'$的半径为2，$\therefore$点O'的坐标为$(2,2)$.

设经过B、O'两点的直线解析式为$y=kx+b$.

把B、O'坐标代入，则$k=-2, b=6$，$\therefore y=-2x+6$.

而当$OC=4$时，点C坐标为$(4,0)$，而$(4,0)$不在过B、O'的直线上，此时B、O'、C三点不在同一直线上.

当$OC=3$时，点C坐标为$(3,0)$，满足$y=-2x+6$，此时B、O'、C三点在同一直线上，它的解析式是$y=-2x+6$.

题185 已知：如图7-166，割线DCB交$\odot O$于点C、B，DA切$\odot O$于点A，$BE/\!/CA$，交DA于点E，OD交$\odot O$于点F，$AH\perp OD$，垂足为H，且$OH:HF=2:3$，$FD=9$，$AE=2\sqrt{21}$，求$\cos ODB$的值.

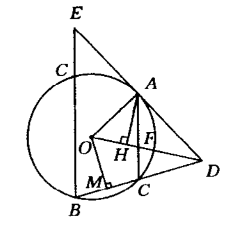


图 7-166

解 连结OA，设$OH=2x$，则$HF=3x$，

$\therefore OA=OF=5x$.

$\because DA$是$\odot O$的切线，$\therefore OA\perp DA$，$\angle OAD=90°$.

又$\because AH\perp OD$，$\therefore \text{Rt}\triangle AHO\backsim\text{Rt}\triangle DAO$.

$\therefore \frac{OH}{OA}=\frac{OA}{OD}$，即$\frac{2x}{5x}=\frac{5x}{5x+9}$，解得$x=1.2$.

$\therefore OA=5\times1.2=6, OD=6+9=15$.

在$\text{Rt}\triangle DAO$中，由勾股定理，得

$DA=\sqrt{OD^2-OA^2}=\sqrt{15^2-6^2}=3\sqrt{21}$.

由切割线定理，得$DA^2=DC\cdot DB$，

即$DC\cdot DB=(3\sqrt{21})^2=189$. ①

$\because AC/\!/EB$，$\therefore \frac{DC}{DB}=\frac{DA}{DE}$，

即$\frac{DC}{DB}=\frac{3\sqrt{21}}{3\sqrt{21}+2\sqrt{21}}$，$\therefore \frac{DC}{DB}=\frac{3}{5}$. ②

由①、②得$DB=3\sqrt{35}$，$DC=\frac{9}{5}\sqrt{35}$.

$\therefore BC=DB-DC=3\sqrt{35}-\frac{9}{5}\sqrt{35}=\frac{6}{5}\sqrt{35}$.

作$OM\perp BC$，垂足为M，则

$MC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\sqrt{35}=\frac{3}{5}\sqrt{35}$,

$\therefore MD=MC+DC=\frac{3}{5}\sqrt{35}+\frac{9}{5}\sqrt{35}=\frac{12}{5}\sqrt{35}$.

在 Rt△OMD 中,$\cos ODB=\frac{MD}{OD}=\frac{\frac{12}{5}\sqrt{35}}{15}=\frac{4}{25}\sqrt{35}$.

题186 已知:如图 7-167,以 Rt△ABC 的直角边 AC 为直径作⊙O,交斜边 AB 于 D,E 是另一条直角边 BC 的中点.

(1)求证:DE 是⊙O 的切线;

(2)如果 $AD=4$,$BD=\frac{9}{4}$,求 DE 的长;

(3)证明:$\frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle BCA}}=\cos^2 B$.

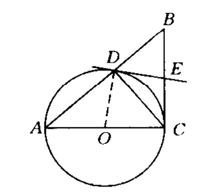


图 7-167

证明 (1)连结 OD.

$\because OA=OD$,$\therefore \angle ODA=\angle A$.

$\because AC$ 是⊙O 的直径,$\therefore \angle ADC=\angle CDB=90°$.

$\because BE=EC$,$\therefore DE=\frac{1}{2}BC$,即 $DE=BE$.

$\therefore \angle EDB=\angle B$,$\therefore \angle ODA+\angle EDB=\angle A+\angle B=90°$.

$\therefore \angle ODE=90°$,$\therefore DE$ 是⊙O 的切线.

(2)$BC^2=BD\cdot BA$,$\therefore BC^2=\frac{9}{4}\times(\frac{9}{4}+4)$,$\therefore BC=\frac{15}{4}$.

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}=\frac{15}{8}$.

(3)$\because CD$ 是 Rt△ABC 的斜边上的高,

$\therefore \triangle BDC\backsim\triangle BCA$,$\therefore \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle BCA}}=(\frac{BD}{BC})^2$.

在 Rt△BDC 中,$\cos B=\frac{BD}{BC}$,

$\therefore \cos^2 B=(\frac{BD}{BC})^2$,$\therefore \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle BCA}}=\cos^2 B$.

题187 已知:如图 7-168,P 是半径为2的⊙O 内一定点,$OP=\sqrt{2}$,AB 是经过点 P 的弦,过点 A、B 分别作⊙O 的切线 AC 和 BC 交于点 C,设点 P 到 AC、BC 的距离分别是 a、b,$\angle AOB=2\theta$(θ 是锐角).

求证:(1)a、b 是关于 x 的方程 $x^2-(4\sin^2\theta)x+2\sin^2\theta=0$的两个根;

(2)当 $\theta=45°$时,点 P 恰好在线段 OC 上.

证明 (1)作 $PE\perp AC$ 于 E,$PF\perp BC$ 于 F,则 $PE=a$,$PF=b$.

$\because CA$、CB 分别切⊙O 于 A、B,$\angle AOB=2\theta$,$OA=OB$,

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=90°-\theta$,$\therefore \angle CAB=\angle CBA=\theta$.

$\therefore PE=AP\cdot\sin\theta, PF=PB\cdot\sin\theta$,

$\therefore a+b=PE+PF=(AP+PB)\sin\theta=AB\sin\theta$,

$ab=PE\cdot PF=AP\cdot\sin\theta\cdot PB\cdot\sin\theta=AP\cdot PB\cdot\sin^2\theta$.

在$\triangle AOB$中，作$OM\perp AB$于M，则

$AB=2AM$，$\angle AOM=\theta$，又$\because OA=2$，

$\therefore AB=2OA\sin\theta=4\sin\theta$，$\therefore a+b=4\sin^2\theta$. ①

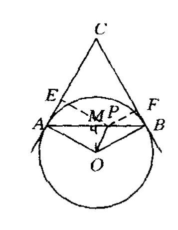


图 7 - 168

过OP作直径交$\odot O$于S、T，则

$PA\cdot PB=PS\cdot PT=(OS-OP)(OT+OP)$

$=(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})=2$.

$\therefore ab=2\sin^2\theta$.

$\therefore a$、b为关于x的方程$x^2-4\sin^2\theta x+2\sin^2\theta=0$的两个根.

(2)把$\theta=45°$代入方程$x^2-4\sin^2\theta x+2\sin^2\theta=0$，得

$x^2-2x+1=0$，此方程有两个实根，$x_1=x_2=1$.

即$a=b=1$.

即P点到CA、CB的距离相等，$\therefore$点P在$\angle ACB$的平分线上.

$\because CA$、CB分别切$\odot O$于A、B，$\therefore CO$是$\angle ACB$的平分线，

此时P为CO与弦AB的交点，$\therefore$点P在线段OC上.

题188 已知：如图 7 - 169，$\odot A$的圆心在x轴上，$\odot A$与x轴交于D、E两点，与y轴交于B、C两点，过点B作$\odot A$的切线BF交x轴于点F. 若$\odot A$的半径为5，$OB=4$.

(1)求$\mathrm{tg}FBD$的值；

(2)求切线BF的解析式；

(3)在劣弧$\overset{\frown}{BC}$上有任意一点M自B向C移动(M与B、C、D不重合)，连结FM，并延长交$\overset{\frown}{BEC}$于点N，设$OM=x$，$FN=y$，求y与x之间的函数关系式，并求出自变量x的取值范围.

解 (1)连结AB、BE.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中，$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

$\because BF$是$\odot A$的切线，$\therefore\angle FBD=\angle E$，

$\therefore \mathrm{tg}FBD=\mathrm{tg}E=\dfrac{OB}{OE}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

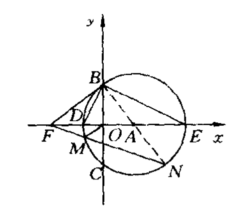


图 7 - 169

(2)$\because BF$是$\odot A$的切线，

$\therefore AB\perp BF$，又$OB\perp AF$，$\therefore\triangle FBO\backsim\triangle BAO$，

$\therefore OB^2=OA\cdot OF$，$OF=\dfrac{OB^2}{OA}=\dfrac{16}{3}$.

$\therefore F(-\dfrac{16}{3},0)$，且$B(0,4)$.

设直线BF的解析式为$y=kx+b$，

则$\begin{cases} b=4, \\ -\frac{16}{3}k+b=0, \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} b=4, \\ k=\frac{3}{4}. \end{cases}$

∴直线 BF 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x+4$.

(3)连结 AN. ∵$\triangle FBO \backsim \triangle FAB$, ∴$FB^2=FO\cdot FA$,

又 $FB^2=FM\cdot FN$, ∴$FO\cdot FA=FM\cdot FN$,

∴$\frac{FO}{FM}=\frac{FN}{FA}$, 且$\angle OFM=\angle NFA$, ∴$\triangle FOM\backsim\triangle FNA$,

∴$\frac{OM}{AN}=\frac{OF}{FN}$, ∴$\frac{x}{5}=\frac{\frac{16}{3}}{y}$, ∴$y=\frac{80}{3x}$, $(2<x<4)$.

题189 已知:如图 7 - 170,四边形 $ABCD$ 内接于半圆 O,AB 为直径,过点 D 的切线交 BC 的延长线于点 E,若 $BE\perp DE$,$AD+DC=40$,$\odot O$ 的半径为$\frac{50}{3}$,求 BC 的长及 $\text{tg}CDB$ 的值.

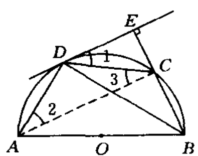


图 7 - 170

解 连结 AC.

∵AB 为直径,$BE\perp DE$,

∴$\angle ADB=\angle ACB=\angle E=90°$.

∴$DE/\!/AC$, $\angle 1=\angle 3$.

∵ED 切$\odot O$ 于点 D,

∴$\angle 1=\angle 2$, ∴$\angle 2=\angle 3$, ∴$AD=DC$.

∵$AD+DC=40$, ∴$AD=DC=20$.

∵$\odot O$ 的半径为$\frac{50}{3}$,AB 为直径, ∴$AB=\frac{100}{3}$.

∵$ABCD$ 内接于半圆 O, ∴$\angle DCE=\angle DAB$.

又$\angle E=\angle ADB=90°$, ∴$\triangle CDE\backsim\triangle ABD$,

∴$\frac{CE}{AD}=\frac{CD}{AB}=\frac{20}{\frac{100}{3}}=\frac{3}{5}$.

∴$CE=\frac{3}{5}AD=\frac{3}{5}\times 20=12$.

∴$DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{20^2-12^2}=16$.

∵DE 是切线,ECB 是割线, ∴$ED^2=EC\cdot EB$.

∴$EB=\frac{ED^2}{EC}=\frac{16^2}{12}=\frac{64}{3}$. ∴$BC=BE-CE=\frac{28}{3}$.

∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(\frac{100}{3})^2-(\frac{28}{3})^2}=\sqrt{\frac{128\times 72}{9}}=32$.

∴$\text{tg}CAB=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{28}{3}}{32}=\frac{7}{24}$.

$\because \angle CDB=\angle CAB$，$\therefore \mathrm{tg}CDB=\mathrm{tg}CAB=\frac{7}{24}$.

$\therefore BC$ 的长为$\frac{28}{3}$，$\mathrm{tg}CDB$ 的值为$\frac{7}{24}$.

题190 已知：如图 7－171，在$\triangle ABC$ 中，若 AC 和 BC 边的长是关于 x 的方程 $x^2-(AB+4)x+4AB+8=0$的两个根，且$25BC\sin A=9AB$，DB 为半圆的直径，O 为圆心，AC 切半圆于 E，BC 交半圆于 F.

(1)求$\triangle ABC$ 三边的长；

(2)求 AD 的长.

图 7－171

解 (1)由根与系数关系，可得

$$\begin{cases} AC+BC=AB+4, & ① \\ AC\cdot BC=4AB+8. & ② \end{cases}$$

$\therefore AC^2+BC^2=(AC+BC)^2-2AC\cdot BC=(AB+4)^2-2(4AB+8)=AB^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C=90°$.

$\therefore \sin A=\frac{BC}{AB}$，又 $\sin A=\frac{9AB}{25BC}$，

$\therefore \frac{BC}{AB}=\frac{9AB}{25BC}$，即$9AB^2=25BC^2$，$\therefore BC=\frac{3}{5}AB$(负值舍去).

代入①、②，得

$$\begin{cases} AC+\frac{3}{5}AB=AB+4, \\ AC\cdot\frac{3}{5}AB=4AB+8. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} AB=10, \\ AC=8. \end{cases}$$

$\therefore BC=\frac{3}{5}AB=\frac{3}{5}\times 10=6$.

$\therefore \triangle ABC$ 三边长分别为 $AB=10$，$BC=6$，$AC=8$.

(2)连结 OE，$\because AC$ 切半圆于 E，$\therefore OE\perp AC$.

又$\because \angle C=90°$，$\therefore BC\perp AC$，$\therefore OE/\!/BC$，

$\therefore \frac{OE}{BC}=\frac{OA}{AB}$，而 $OE=OB$，$\therefore \frac{OE}{BC}=\frac{AB-OE}{AB}$，

$\therefore \frac{OE}{6}=\frac{10-OE}{10}$，$\therefore OE=\frac{15}{4}$.

$\therefore AD=AB-2EO=10-2\times\frac{15}{4}=\frac{5}{2}$.

题191 已知：如图 7－172，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=15°$，$\angle ACB=90°$，$BC=1$，O 为 AC 上的一点，以 O 为圆心，OC 为半径的半圆交 AB 于 E、F 两点，且 E 为 AB 的中点，D 为半圆与 AC 的另一交点.

(1)求 CF 的长；

(2)求 BF 的长；

(3)求证 AD 的方程 $x^2+2x-(3+2\sqrt{3})=0$的一个根.

解 (1)连结 CE.

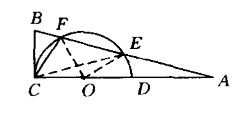


图 7 - 172

$\because E$ 是 $Rt\triangle ABC$ 的斜边 AB 的中点，$\therefore CE=AE$.

$\therefore \angle ECA=\angle A=15°$，由此得$\angle FEC=30°$.

由题意可知，BC 垂直于$\odot O$ 的半径 OC，

$\therefore BC$ 与$\odot O$ 相切于点 C，$\therefore \angle BCF=\angle FEC=30°$.

$\because \angle B=90°-\angle A=75°$，

$\therefore \angle BFC=180°-(\angle B+\angle BCF)=180°-(75°+30°)=75°$，

$\therefore \angle B=\angle BFC$，$\therefore CF=BC=1$.

(2)连结 OE、OF.

$\because OC=OF$，$\angle COF=2\angle FEC=60°$，

$\therefore \triangle COF$ 是等边三角形，$\therefore OC=OF=CF=1$.

$\because \angle ECF=90°-(\angle BCF+\angle ECA)=90°-(30°+15°)=45°$，

$\therefore \angle EOF=2\angle ECF=2\times 45°=90°$，

$\therefore \triangle EOF$ 是等腰直角三角形，$\therefore EF=\sqrt{2}OF=\sqrt{2}$.

由切割线定理，得 $BC^2=BF\cdot BE=BF(BF+EF)$，

$\therefore BF(BF+\sqrt{2})=1$，即 $BF^2+\sqrt{2}BF-1=0$.

解得 $BF=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$，$BF=\dfrac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$(不合题意，舍去).

(3)$\because BE=BF+EF=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore AE=BE=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

$\because AF=AE+EF=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore AE\cdot AF=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{2}=3+2\sqrt{3}$.

根据割线定理，得 $AD\cdot AC=AE\cdot AF$，

即 $AD(AD+2)=3+2\sqrt{3}$，

$\therefore AD^2+2AD-(3+2\sqrt{3})=0$，

$\therefore AD$ 是方程 $x^2+2x-(3+2\sqrt{3})=0$的一个根.

题192 已知：如图 7 - 173，$\odot O$ 分别切 AB、AC 于 E、F，且交 BC 于 M、N 两点，$\angle A=90°$，$\angle B=\angle C$，$EB=1$，$\triangle ABC$ 的面积为 S_1，$\odot O$ 的面积为 S_2，$S_1:S_2=25:32\pi$.

(1)求证：$BM=NC$；

(2)求 BM.

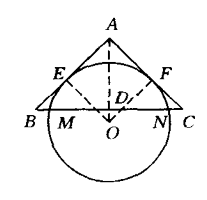


图 7 - 173

证明 (1)连结 AO 交 BC 于 D.

$\because AB$、AC 都是$\odot O$ 的切线，$\therefore \angle OAB=\angle OAC$.

$\because \angle B=\angle C$，$\therefore AB=AC$.

$\therefore AO$ 是 BC 的垂直平分线，$\therefore BD=DC$.

$\because OD\perp MN$，$\therefore MD=DN$，$\therefore BM=NC$.

(2)连结 OE、OF，则四边形 $AEOF$ 是正方形.

设 $AE=x$，则 $AB=x+1$，$S_1=\frac{1}{2}(x+1)^2$，$S_2=\pi x^2$.

根据题意，得$\frac{1}{2}(x+1)^2:\pi x^2=25:32\pi$.

整理，得$9x^2-32x-16=0$.

解得 $x=4$，或 $x=-\frac{4}{9}$(不合题意，舍去).

$\therefore AE=4$，$AB=5$，$BC=5\sqrt{2}$.

设 $BM=y$，由切割线定理，得

$BE^2=BM\cdot BN$，$1^2=y(5\sqrt{2}-y)$，

即 $y^2-5\sqrt{2}y+1=0$.

解得 $y=\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{46}$，或 $y=\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{46}$(不合题意，舍去).

$\therefore BM=\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{46}$.

三、圆和圆的位置关系

题193 试述两个圆的位置关系.

答 平面内两圆的位置关系有五种.(1)外离；(2)外切；(3)相交；(4)内切；(5)内含.

如果 d 表示两圆圆心之间的距离，R 和 $r(R>r)$表示两圆的半径，则上述五种位置关系可由 d、R、r 之间的关系来确定，即：

(1)两圆外离时两个圆没有公共点，并且每一个圆上的点都在另一圆的外部.

$d>R+r\Leftrightarrow$两圆外离.

两圆外离时，共有四条公切线，其中两条外公切线、两条内公切线.

(2)两圆外切时，两个圆有唯一的一个公共点，并且除了这个公共点以外，每个圆上的

点都在另一个圆的外部，这个唯一的公共点叫做切点.

$d=R+r\Leftrightarrow$两圆外切.

两圆外切时，共有三条公切线，其中两条外公切线，一条内公切线，内公切线垂直于连心线.

(3)两圆相交时两个圆有两个公共点，这两个点叫做交点.

$R-r<d<R+r\Leftrightarrow$两圆相交.

两圆相交时，共有两条公切线，这两条公切线都是外公切线，相交两圆的连心线垂直平分公共弦.

(4)两圆内切时，两个圆有唯一的公共点，并且除了这个公共点外，其中一个圆上的点都在另一个圆的内部，这个公共点叫做切点.

$d=R-r\Leftrightarrow$两圆内切.

两圆内切时，有一条外公切线，相内切的两个圆的连心线经过切点.

(5)两圆内含时两个圆没有公共点，并且其中一个圆上的点都在另一个圆的内部.

$d<R-r\Leftrightarrow$两圆内含.

两圆内含时，没有公切线.

题194 写出内外公切线长公式.

答 外公切线长$=\sqrt{d^2-(R-r)^2}$；

内公切线长$=\sqrt{d^2-(R+r)^2}$.

题195 若两圆半径分别为R、$r(R>r)$，其圆心距为d，且$R^2+d^2-r^2=2Rd$，则两圆的位置关系是(　　).

A. 内切　　B. 内切或外切　　C. 外切　　D. 相交

解 $\because R^2+d^2-r^2=2Rd$，$\therefore R^2-2Rd+d^2=r^2$，

$\therefore (R-d)^2=r^2$，$R-d=\pm r$，$\therefore d=R\pm r$.

$\therefore$选择 B.

题196 如图 7-174，$\odot O_1$的半径O_1A是$\odot O_2$的直径，$\odot O_1$的半径O_1C交$\odot O_2$于B，设$\overset{\frown}{AB}$长为l_1，AC长为l_2，那么(　　).

A. $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$　　B. $l_1>l_2$

C. $l_1=l_2$　　D. $l_1<l_2$

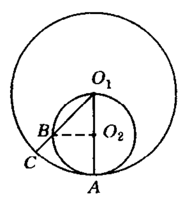


图 7-174

解 连结BO_2，设$\odot O_2$的半径为r，则$\odot O_1$的半径为$2r$，设$\angle AO_1C=\alpha$，则$\angle AO_2B=2\alpha$.

$$l_1=\frac{2\alpha\pi r}{180}=\frac{\alpha\pi r}{90},\ l_2=\frac{\alpha\cdot\pi\cdot 2r}{180}=\frac{\alpha\pi r}{90},$$

$\therefore l_1=l_2$.

$\therefore$选择 C.（弧长相等与弧相等意义不同，不能选择 A.）

题197 如图 7 - 175，$\triangle ABC$ 的三边长分别为6、8、10，并且以 A、B、C 三点分别为圆心，作两两相外切的圆，那么这三个圆的半径分别为(　　).

A. 3、4、5　　B. 2、4、6

C. 6、8、10　　D. 4、6、8

解 设$\odot A$ 的半径为 r_1，$\odot B$ 的半径为 r_2，$\odot C$ 的半径为 r_3，则

$$\begin{cases} r_1+r_2=8, \\ r_2+r_3=10, \\ r_1+r_3=6. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} r_1=2, \\ r_2=6, \\ r_3=4. \end{cases}$$

∴选择 B.

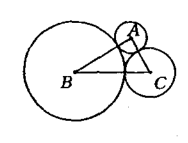


图 7 - 175

题198 三个同心圆的半径分别为 r_1、r_2、r_3，且 $r_1<r_2<r_3$，如果大圆的面积被两个小圆三等分，那么 $r_1:r_2:r_3$ 等于(　　).

A. $1:2:3$　　B. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$

C. $1:4:9$　　D. $1:1.5:2$

解 $\because \pi r_1^2:\pi r_2^2:\pi r_3^2=1:2:3$,

$\therefore r_1^2:r_2^2:r_3^2=1:2:3, r_1:r_2:r_3=1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

∴选择 B.

题199 如图7 - 176，一个半径为 r 的$\odot I$ 内切于一个等腰直角三角形 ABC，一个半径为 R 的$\odot O$ 外接于这个三角形，那么 $R:r$ 等于(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

图 7 - 176

解 $\because R=OC=IC+IO=\sqrt{2}r+r$

$=(\sqrt{2}+1)r$,

$\therefore \dfrac{R}{r}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)r}{r}=\sqrt{2}+1$.

∴选择 C.

题200 如图 7 -177，AB 是长为8 cm 的一条线段，C 是 AB 上一点，$AC=6$ cm，以 AC 和 CB 为直径在 AB 同侧作半圆，两圆的公切线交 AB 的延长线于 D，则 BD 长为(　　)

A. 1 cm　B. 2 cm　C. 3 cm　D. $\dfrac{3}{2}$ cm

解 连结 O_1P、O_2Q，设 $BD=x$.

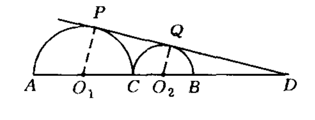


图 7 - 177

$\because PQ$是两圆外公切线，

$\therefore O_1P\perp PQ, O_2Q\perp PQ$，

$\therefore O_1P /\!/ O_2Q, \therefore \dfrac{O_2Q}{O_1P}=\dfrac{O_2D}{O_1D}$，

$\therefore \dfrac{1}{3}=\dfrac{x+1}{x+5}, \therefore x=1$.

$\therefore$选择 A.

题201 在一直线上的同侧作三个圆，如图 7 - 178，其中$\odot O_3$的半径为4，$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径相等，并且每一个圆都和直线以及其他两圆相切，则两个等圆的半径为(　　).

A. 24　　B. 16　　C. 26　　D. 18

解　作$O_1M\perp MN$于M，$O_3P\perp MN$于P，$O_3Q\perp O_1M$于Q.

设两个等圆的半径为R.

在$\text{Rt}\triangle O_1O_3Q$中，$O_1Q^2+O_3Q^2=O_1O_3^2$，

$\therefore (R-4)^2+R^2=(R+4)^2$，

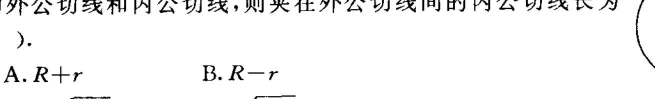
$\therefore R(R-16)=0$.

$\because R\neq 0, \therefore R=16$.

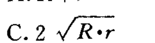
$\therefore$选择 B.

图 7 - 178

题202 如图 7 - 179，半径为R、r的两圆外切($R>r$). 作两圆的外公切线和内公切线，则夹在外公切线间的内公切线长为(　　).

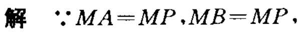


A. $R+r$　　　B. $R-r$



C. $2\sqrt{R\cdot r}$　　　D. $\sqrt{R\cdot r}$

图 7 - 179



解　$\because MA=MP, MB=MP$，

$\therefore$夹在外公切线间的内公切线长等于外公切线AB的长.

$AB=CO_2=\sqrt{O_1O_2^2-CO_1^2}$

$\quad=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$.

$\therefore$选择 C.

题203 半径为R和$r(R>r)$的两圆相交，外公切线与连心线夹角为30°，两圆外公切线长为(　　).

A. $2R-2r$　　　B. $\sqrt{3}(R-r)$

C. $2\sqrt{3}(R-r)$　　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(R-r)$

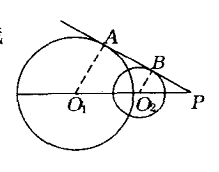


图 7 - 180

解　如图 7 - 180，$BP=BO_2\cdot\text{ctg}30°=r\cdot\text{ctg}30°$；

$AP=AO_1\cdot\text{ctg}30°=R\cdot\text{ctg}30°$.

$\therefore AB=\text{ctg}30°(R-r)=\sqrt{3}(R-r)$.

∴选择 B.

题204 如图 7 - 181，两圆内切于点 A，PA 为两圆的外公切线，PB、PC 分别切两圆于 B、C，如果$\angle APC=40°$，$\angle PAB=75°$，那么$\angle PCB$ 等于（　　）.

A. 80°　　B. 85°　　C. 86°　　D. 90°

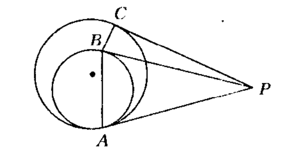


图 7 - 181

解 $\because PA=PB$，$\angle PAB=75°$，

$\therefore \angle PBA=75°$，$\angle APB=30°$，

$\because \angle APC=40°$，$\therefore \angle BPC=10°$.

$\because PA=PC$，$PA=PB$，$\therefore PB=PC$.

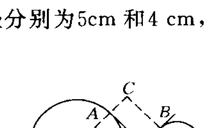
$\therefore \angle PCB=\angle PBC=85°$.

∴选择 B.

题205 如图 7 - 182，两圆的内公切线互相垂直，若两圆的半径分别为5cm 和4 cm，则两圆的圆心距为（　　）.

A. 9 cm　　B. $9\sqrt{2}$ cm

C. $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ cm　　D. $\sqrt{41}$ cm



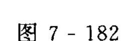


图 7 - 182

解 $\because AP\perp BP$，$O_1A\perp AP$，$O_2B\perp BP$，

$\therefore \angle C=90°$，

$\because AC=4\text{cm}$，$\therefore O_1C=9\text{cm}$，

同理 $CO_2=9\text{cm}$.

$\therefore \triangle CO_1O_2$为等腰直角三角形，

$\therefore O_1O_2=9\sqrt{2}$ cm.

∴选择 B.

题206 已知：如图 7 - 183，$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于 A、B，过 A 的直线交两圆于 C、D，G 为 CD 的中点，BG 交$\odot O_1$、$\odot O_2$于 E、F.

求证：$EG=FG$.

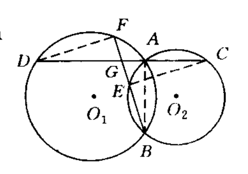


图 7 - 183

证明 连结 AB、CE、DF.

$\because \angle ACE=\angle ABE$，$\angle ABE=\angle D$.

$\therefore \angle ACE=\angle D$，

又$\angle CGE=\angle DGF$，$CG=DG$，

$\therefore \triangle CGE\cong\triangle DGF$，$\therefore EG=FG$.

题207 已知：如图 7 - 184，$\odot O_1$和$\odot O_2$相交于 A、B 两点，过点 A 的直线交$\odot O_1$于 C，交$\odot O_2$于 D. 直线 CF 与$\odot O_2$相切于 F，交$\odot O_1$于 E，BE 交 CD 于 G.

求证：$BF^2=BE\cdot BD$.

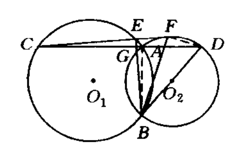


图 7 - 184

证明 连结 AB、FD.

$\because \angle BFD=\angle BAD, \angle ECA=\angle EBA$,

$\angle EGC=\angle AGB$,

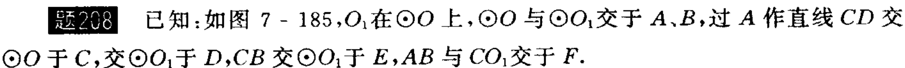
$\therefore \angle FEB=\angle ECA+\angle EGC$,

$\angle DAB=\angle ABE+\angle AGB$.

$\therefore \angle DFB=\angle FEB$.

$\because CF$ 为$\odot O_2$的切线，$\therefore \angle CFB=\angle FDB$.

$\therefore \triangle FBD \backsim \triangle EBF$，$\therefore BF^2=BE\cdot BD$.



题208 已知：如图 7 - 185，O_1在$\odot O$ 上，$\odot O$ 与$\odot O_1$交于 A、B，过 A 作直线 CD 交$\odot O$ 于 C，交$\odot O_1$于 D，CB 交$\odot O_1$于 E，AB 与 CO_1交于 F.

求证：$CB\cdot CA=CF^2+AF\cdot FB$.

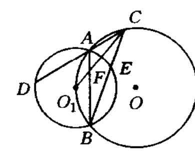


图 7 - 185

证明 连结 AO_1.

$\because O_1$在$\odot O$ 上，$\overset{\frown}{AO_1}=\overset{\frown}{BO_1}$，

$\therefore \angle ACO_1,=\angle O_1CB$,

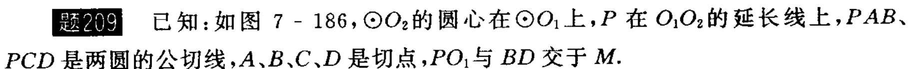
又$\because \angle AO_1C=\angle ABC$，$\therefore \triangle AO_1C \backsim \triangle FBC$.

$\therefore \dfrac{CA}{CF}=\dfrac{CO_1}{CB}$.

又$\because CF\cdot FO_1=AF\cdot FB$.

$\therefore CB\cdot CA=CF\cdot CO_1=CF(CF+FO_1)$

$=CF^2+CF\cdot FO_1=CF^2+AF\cdot FB$.



题209 已知：如图 7 - 186，$\odot O_2$的圆心在$\odot O_1$上，P 在 O_1O_2的延长线上，PAB、PCD 是两圆的公切线，A、B、C、D 是切点，PO_1与 BD 交于 M.

求证：BD 是$\odot O_2$的切线.

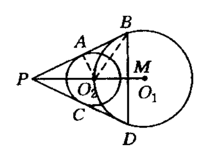


图 7 - 186

证明 连结 AO_2、BO_2.

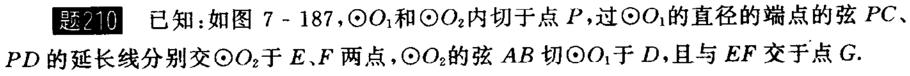
$\because PM\perp BD$,

$\therefore \angle ABO_2=\angle BDO_2=\angle MBO_2$.

$\angle O_2AB=\angle O_2MB=90^\circ, O_2B=O_2B$,

$\therefore \triangle O_2AB \cong \triangle O_2MB$.

$\therefore O_2A=O_2M$，BD 是$\odot O_2$的切线.



题210 已知：如图 7 - 187，$\odot O_1$和$\odot O_2$内切于点 P，过$\odot O_1$的直径的端点的弦 PC、PD 的延长线分别交$\odot O_2$于 E、F 两点，$\odot O_2$的弦 AB 切$\odot O_1$于 D，且与 EF 交于点 G.

求证：(1) $AB\perp EF$；

(2) $AD\cdot DB=CD\cdot FG$.

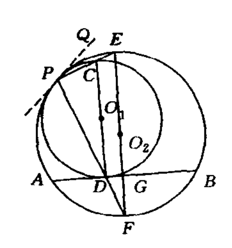


图 7 - 187

证明 (1)过 P 作公切线 PQ.

$\because \angle PDC=\angle QPE, \angle PFE=\angle QPE$,

$\therefore \angle PDC=\angle PFE$, $\therefore CD /\!/ EF$.

又$\because CD$ 是过切点 D 的直径，AB 是切线，

$\therefore CD\perp AB$, $\therefore EF\perp AB$.

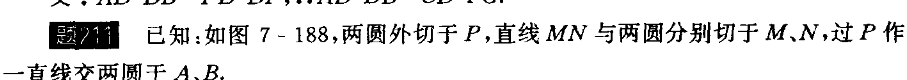
(2)$\because \angle CPD=90°=\angle AGF$,

$\angle PDC=\angle PFE$,

$\therefore \triangle CPD\backsim\triangle DGF$, $\therefore \frac{CD}{DF}=\frac{PD}{GF}$,

即 $CD\cdot GF=PD\cdot DF$,

又$\because AD\cdot DB=PD\cdot DF$, $\therefore AD\cdot DB=CD\cdot FG$.



题211 已知：如图 7 - 188，两圆外切于 P，直线 MN 与两圆分别切于 M、N，过 P 作一直线交两圆于 A、B.

求证：$AM\perp BN$.

证明 过 P 作两圆的公切线 PC 交 MN 于 C，连结 PM、PN.

则 $PC=MC=CN$, $\therefore \angle MPN=90°$,

$\therefore \angle PMN+\angle PNM=90°$.

$\because \angle PMN=\angle PAM, \angle PNM=\angle PBN$,

$\therefore \angle PAM+\angle PBN=90°$.

$\therefore AM\perp BN$.

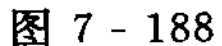


图 7 - 188

题212 已知：如图 7 - 189，两圆内切于 C，若大圆的弦 AB 切小圆于点 D.

求证：CD 平分 $\angle ACB$.

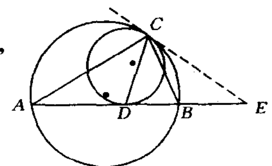


图 7 - 189

证明 过 C 点作两圆的公切线 CE 交 AB 的延长线于 E，则 CE、DE 是小圆的两条切线.

$\therefore \angle DCE=\angle CDE$,

$\because \angle DCB=\angle DCE-\angle BCE$,

$\angle ACD=\angle CDE-\angle CAD$,

又$\angle ECB=\angle CAD$,

$\therefore \angle DCB=\angle ACD$，即 CD 平分 $\angle ACB$.

题213 已知：如图 7 - 190，半径为 R、r 的两圆相互外切于点 T，AB 为两圆的外公切线.

求证：$AT:TB:AB=\sqrt{R}:\sqrt{r}:\sqrt{R+r}$.

证明 过 T 作两圆的公切线 TH，交 AB 于 H.

则 $AH=TH$, $BH=TH$,

$\therefore \angle ATB=90^\circ$.

过 T 作 $TM\perp AB$ 于 M.

$\therefore AT^2:TB^2=AM\cdot AB:BM\cdot AB$

$\qquad\qquad =AM:BM$.

$\because OA\perp AB, O'B\perp AB, TM\perp AB$,

$\therefore OA/\!/TM/\!/O'B$.

$\therefore AM:MB=OT:TO'=R:r$,

即 $AT^2:TB^2=R:r, AT:TB=\sqrt{R}:\sqrt{r}$.

设 $AT=\sqrt{R}k, TB=\sqrt{r}k$,

$\therefore AB^2=AT^2+TB^2=Rk^2+rk^2=(R+r)k^2$,

$\therefore AB=k\sqrt{R+r}$.

$\therefore AT:TB:AB=\sqrt{R}:\sqrt{r}:\sqrt{R+r}$.

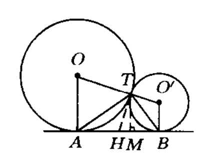


图 7 - 190

题214 已知:如图 7 - 191,⊙O 和⊙O'相交于点 A、B,过点 A 的直线与两圆的交点分别为 C、D,连结 BD 的直线与⊙O 的交点为 E,连结 CE 并延长交⊙O'于 F.

求证:$\angle DFE=\angle DBF$.

证明 $\because A$、D、F、B 四点共圆,

$\therefore \angle DFB=\angle CAB=\angle CEB$,

$\because \angle CEB$ 是$\triangle EBF$ 的外角,

$\therefore \angle DBF+\angle EFB=\angle CEB$.

$\therefore \angle DFB=\angle DBF+\angle EFB$,

$\therefore \angle DBF=\angle DFB-\angle EFB=\angle DFE$.

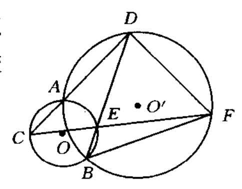
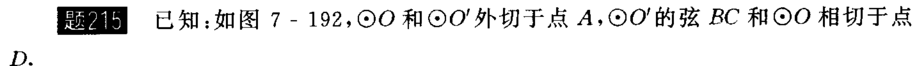


图 7 - 191



题215 已知:如图 7 - 192,⊙O 和⊙O'外切于点 A,⊙O'的弦 BC 和⊙O 相切于点 D.

求证:AD 平分$\triangle BAC$ 的外角.

证明 延长 CA、DA 分别与⊙O、⊙O'交于点 E、F,连结 DE、CF.

过 A 作两圆公切线 MN.

则$\angle E=\angle MAD, \angle FCA=\angle NAF$,

且$\angle MAD=\angle NAF$,

$\therefore \angle E=\angle FCA, DE/\!/CF$.

$\therefore \angle ADE=\angle F=\angle ABD$,且$\angle E=\angle ADB$,

$\therefore \angle DAE=\angle BAD$,即 AD 平分$\triangle BAC$ 的外角.

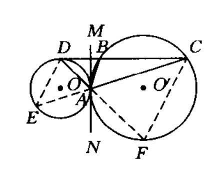


图 7 - 192

题216 已知:如图 7 - 193,AB 是同心圆中大⊙O 的弦,切小圆于点 C,大⊙O 的直径 AG 交小圆于点 M、N,$CD \perp AG$,D 为垂足,CD 交大⊙O于 E、F.

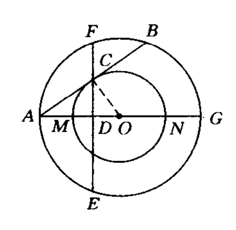


图 7 - 193

求证:$AD \cdot OA = EC \cdot FC$.

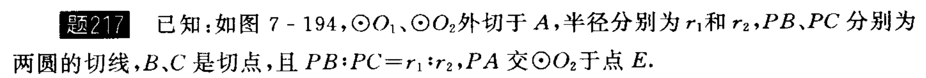
证明 连结 OC.

则 $OC \perp AB$,$AC = CB$.

在 Rt$\triangle ACO$ 中,$CD \perp AO$.

$\therefore AC^2 = AD \cdot AO$,

$\therefore AD \cdot AO = AC \cdot CB = EC \cdot FC$.



题217 已知:如图 7 - 194,⊙O_1、⊙O_2外切于 A,半径分别为 r_1和 r_2,PB、PC 分别为两圆的切线,B、C 是切点,且 $PB:PC = r_1:r_2$,PA 交⊙O_2于点 E.

求证:$\triangle PAB \backsim \triangle PEC$.

证明 连结 AO_1、AO_2、BO_1、CO_2、EO_2、PO_1、PO_2、O_1O_2,

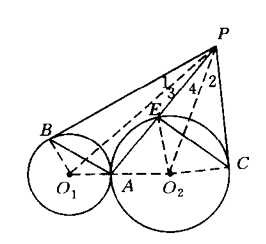


图 7 - 194

$\because$ ⊙O_1与⊙O_2外切,

$\therefore O_1$、A、O_2在一直线上.

$\because PB:PC = r_1:r_2 = O_1B:O_2C$,

$\angle O_1BP = \angle O_2CP = 90°$,

$\therefore \triangle PBO_1 \backsim \triangle PCO_2$,

$\therefore PO_1:PO_2 = O_1B:O_2C = r_1:r_2$,

$\therefore PO_1:PO_2 = O_1A:O_2E$,且$\angle 1 = \angle 2$,

又$\because \angle PAO_1 = 180° - \angle PAO_2$,$\angle PEO_2 = 180° - \angle AEO_2$,

$\angle PAO_2 = \angle AEO_2$,

$\therefore \angle PAO_1 = \angle PEO_2$,$\therefore \triangle PO_2E \backsim \triangle PO_1A$,

$\therefore PA:PE = O_1A:O_2E = r_1:r_2$,且$\angle 3 = \angle 4$,

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 2$.

即$\angle APB = \angle CPE$,$PB:PC = PA:PE = r_1:r_2$,

$\therefore \triangle PAB \backsim \triangle PEC$.

题218 已知:如图 7 - 195,⊙O_1,⊙O_2是外离的两个等圆,P 是 O_1O_2的中点,AB 是过点 P 的直线,交⊙O_1于 A、C,交⊙O_2于 B、D.

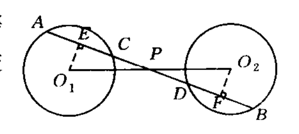


图 7 - 195



求证:$\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$.

证明 作 $O_1E \perp AC$,$O_2F \perp BD$,垂足分别为 E、F 点.

$\because \angle O_1EP = \angle O_2FP = 90°$,

$\angle EPO_1 = \angle FPO_2$,$O_1P = O_2P$,

$\therefore \triangle O_1PE \cong \triangle O_2PF$，$\therefore O_1E=O_2F$.

$\therefore AC=BD$，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$.

题219 已知：如图 7-196，⊙O 与⊙O'相交于 A、B 两点，过点 A 作⊙O'的切线交⊙O 于点 C，过点 B 作两圆的割线分别交⊙O、⊙O'于点 E、F，EF 与 AC 相交于点 P.

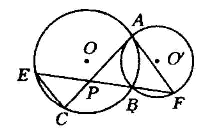


图 7-196

(1)求证：$PA\cdot PE=PC\cdot PF$；

(2)求证：$\dfrac{PE^2}{PC^2}=\dfrac{PF}{PB}$；

(3)当⊙O 与⊙O'为等圆，且 $PC:CE:EP=3:4:5$时，求$\triangle ECP$ 与$\triangle FAP$ 的面积的比值.

证明 (1)连结 AB，$\because CA$ 切⊙O'于 A，$\therefore \angle CAB=\angle F$.

又$\angle CAB=\angle E$，$\therefore \angle E=\angle F$.

又$\angle EPC=\angle FPA$，$\therefore \triangle PEC \backsim \triangle PFA$.

$\therefore \dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PC}{PA}$，$\therefore PA\cdot PE=PC\cdot PF$ ①

(2)在⊙O 中，$\because$弦 AC、BE 相交于 P.

$\therefore PB\cdot PE=PA\cdot PC$ ②

由①、②得 $PA\cdot PB\cdot PE^2=PA\cdot PC^2\cdot PF$.

$\therefore \dfrac{PE^2}{PC^2}=\dfrac{PF}{PB}$.

(3)连结 AE.

由(1)$\triangle PEC \backsim \triangle PFA$，$PC:CE:EP=3:4:5$，

$\therefore PA:FA:PF=3:4:5$.

设 $PC=3x$，$CE=4x$，$EP=5x$，$PA=3y$，$FA=4y$，$PF=5y$.

则 $EP^2=PC^2+CE^2$，$PF^2=PA^2+FA^2$，

$\therefore \angle C=90°$，$\angle CAF=90°$.

$\therefore AE$ 为⊙O 的直径，AF 是⊙O'的直径.

又⊙O 与⊙O'为等圆，$\therefore AE=AF=4y$.

$\because AC^2+CE^2=AE^2$，$\therefore (3x+3y)^2+(4x)^2=(4y)^2$，

即$25x^2+18xy-7y^2=0$，$(25x-7y)(x+y)=0$.

$\because 25x=7y$，$x=-y$(舍去)，$\therefore \dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{25}$，

$\therefore S_{\triangle ECP}:S_{\triangle FAP}=x^2:y^2=49:625$.

题220 已知：如图 7-197，⊙O_1与⊙O_2交于 A、B 两点，AC 是⊙O_1的弦，CE 切⊙O_2于 E，交⊙O_1于 D，$\angle CAE=55°$.

求：$\angle DBE$ 的度数.

解 连结 AB.

$\because CE$ 切$\odot O_2$于 E，$\therefore \angle BEC=\angle BAE$.

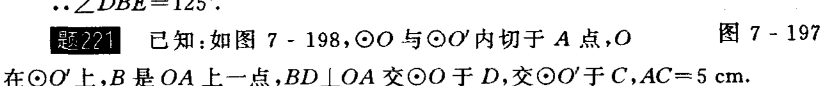
$\because \angle BDE=\angle CAB$，

$\therefore \angle BEC+\angle BDE=\angle BAE+\angle CAB$

$=\angle CAE=55°$.

$\therefore \angle DBE=125°$.

图 7-197



题221 已知：如图 7-198，$\odot O$ 与$\odot O'$内切于 A 点，O 在$\odot O'$上，B 是 OA 上一点，$BD\perp OA$ 交$\odot O$ 于 D，交$\odot O'$于 C，$AC=5$ cm.

求：AD 的长.

解 延长 AO 交$\odot O$ 于 E，连结 DE、CO.

$\because \angle EDA=90°$，$DB\perp AE$，

$\therefore AD^2=AB\cdot AE$.

$\because \angle OCA=90°$，$CB\perp AO$，

$\therefore CA^2=AB\cdot AO$.

而 $AE=2AO$，$\therefore AD^2=2CA^2$，

$AC=5$ cm，$\therefore AD=5\sqrt{2}$ cm.

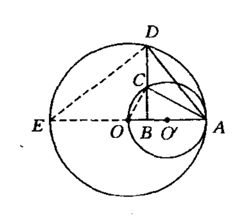


图 7-198

题222 已知：如图 7-199，$\odot O$ 与$\odot P$ 相交于 A、B 两点，PA 切$\odot O$ 于 A，PCD 为割线交$\odot O$ 于 C、D，BC 交$\odot P$ 于 E，连结 DE 交$\odot O$ 于 F.

求证：$BF/\!/PE$.

证明 $\because PA$ 切$\odot O$ 于 A，PCD 交$\odot O$ 于 C、D，

$\therefore PA^2=PC\cdot PD$.

$\because PA=PE$，$\therefore PE^2=PC\cdot PD$，

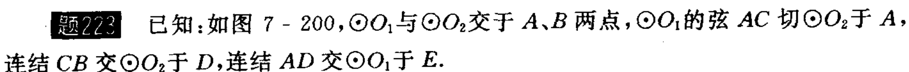
$\because \angle CPE=\angle EPD$，$\therefore \triangle CPE\backsim\triangle EPD$，

$\therefore \angle CEP=\angle D$，

$\because \angle D=\angle FBC$，$\therefore \angle FBC=\angle CEP$，

$\therefore BF/\!/PE$.

图 7-199



题223 已知：如图 7-200，$\odot O_1$与$\odot O_2$交于 A、B 两点，$\odot O_1$的弦 AC 切$\odot O_2$于 A，连结 CB 交$\odot O_2$于 D，连结 AD 交$\odot O_1$于 E.

求证：$CA=CE$.

证明 连结 AB.

$\because \angle AEC=\angle ECD+\angle EDC$，

$\angle ECD=\angle EAB$，

AC 切$\odot O_2$于 A，$\therefore \angle EDC=\angle CAB$，

$\therefore \angle CAE=\angle CAB+\angle EAB$，

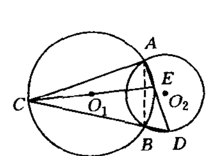


图 7-200

$\therefore \angle AEC=\angle CAE$，$\therefore CA=CE$.

题224 已知：如图 7 - 201，$\odot O_1$和$\odot O_2$内切于点 A，$\odot O_2$的弦 BC 切$\odot O_1$于 D，AD 的延长线交$\odot O_2$于 M，连结 AB、AC 分别交$\odot O_1$于 E、F，连结 EF.

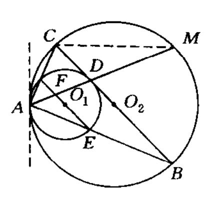
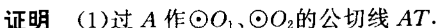


图 7 - 201

(1)求证：$EF/\!/BC$；

(2)求证：$AB\cdot AC=AD\cdot AM$；

(3)若$\odot O_1$的半径 $r_1=3$，$\odot O_2$的半径 $r_2=8$，BC 是$\odot O_2$的直径，求 AB 和 AC 的长($AB>AC$).


证明 (1)过 A 作$\odot O_1$、$\odot O_2$的公切线 AT.

$\because \angle TAB=\angle AFE=\angle ACB$，$\therefore EF/\!/BC$.

(2)连结 CM.

$\because \angle ABD=\angle AMC$，$\angle TAM=\angle ADB$，$\angle TAM=\angle ACM$，

$\therefore \angle ADB=\angle ACM$，

$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle ACM$，$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AB}{AM}$.

即 $AB\cdot AC=AD\cdot AM$.

(3)连结 O_1D，$\therefore O_1D\perp BC$.

连结 O_2O_1，并延长，必过 A 点.

在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1O_2D$ 中，可求得 $O_2D=4$，$\therefore BD=12$，$CD=4$.

$\because O_1E/\!/O_2B$，$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{3}{8}$，$\therefore BE=\dfrac{5}{8}AB$.

$\because BD^2=AB\cdot BE$，

$\therefore 12^2=AB\cdot\dfrac{5}{8}AB$，得 $AB=\dfrac{24\sqrt{10}}{5}$，求得 $AC=\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$.

题225 已知：如图 7 - 202，$\odot O$ 与$\odot O'$相交于 A、B 两点，割线 CE、DF 都过 B 点，并且 $AB^2=BC\cdot BD$，$\angle ABC=\angle ABD$.

求证：(1)AD 是$\odot O$ 的切线，AC 是$\odot O'$ 的切线；

(2)$CE=DF$.

证明 (1) 作$\odot O$ 的直径 AG，连结 BG.

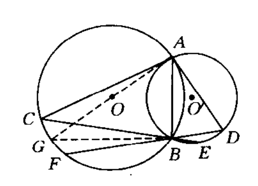


图 7 - 202

$\therefore \angle G=\angle C$，$\angle ABG=90°$，

$\therefore \angle BAG+\angle G=90°$.

在$\triangle ABC$ 和$\triangle DBA$ 中，

$\because AB^2=BC\cdot BD$，$\therefore \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BC}{AB}$.

又$\because \angle ABC=\angle ABD$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DBA$，

$\therefore \angle C=\angle DAB$，$\angle DAB=\angle G$，

$\therefore \angle DAG=\angle BAG+\angle DAB$

$\qquad =\angle BAG+\angle G=90°.$

即 AD 垂直于直径 AG，而点 A 在⊙O 上，

$\therefore AD$ 是⊙O 的切线.

同理可证 AC 是⊙O' 的切线.

(2) ∵ AD 是⊙O 的切线，

$\therefore AD^2=BD\cdot DF$，$\therefore DF=\dfrac{AD^2}{BD}$.

同理 $AC^2=CB\cdot CE$，$CE=\dfrac{AC^2}{BC}$，

由 $\triangle ABC\backsim\triangle DBA$，得 $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{BD}$.

$\therefore \dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{AB}$，$\dfrac{AD^2}{BD^2}=\dfrac{AC^2}{AB^2}=\dfrac{AC^2}{BC\cdot BD}$.

$\therefore \dfrac{AD^2}{BD}=\dfrac{AC^2}{BC}$，$\therefore DF=CE$.

题226 已知：如图 7-203，⊙O_1 与⊙O_2 交于 A、B，过 A 作直线 CAD 和 EAF，分别交⊙O_1 于 C、E，交⊙O_2 于 D、F，$\angle CAB=\angle FAB$.

求证：$CD=EF$.

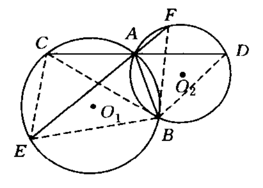


图 7-203

证明 连结 BC、BD、BE、BF、CE.

∵ $\angle CEB=\angle DAB$，$\angle ECB=\angle EAB$，

$\angle CAB=\angle FAB$，$\therefore \angle EAB=\angle DAB$，

$\therefore \angle CEB=\angle ECB$，$BE=BC$，

∵ $\angle BEA=\angle BCA$，$\angle F=\angle D$，

$\therefore \triangle BCD\cong\triangle BEF$，$\therefore CD=EF$.

题227 已知：如图 7-204，PN 是⊙O 的切线，N 为切点，过 P 与 PN 的中点 M 作⊙O_1 与⊙O 相交于 A、B 两点，设 BA 的延长线交 PN 于 Q.

求证：$MQ:QN:PM:PQ=1:2:3:4$.

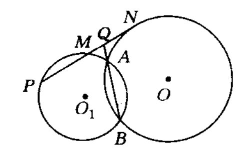


图 7-204

证明 ∵ $QN^2=QA\cdot QB=QM\cdot QP$，

设 $MQ=a$，$QN=x$，

∵ M 为 PN 的中点，

$\therefore PM=a+x$，$PQ=2a+x$，

$\therefore x^2=a(2a+x)$，$x>0$，解得 $x=2a$，

$\therefore QN=2a$，$PM=3a$，$PQ=4a$，

$\therefore MQ:QN:PM:PQ=1:2:3:4$.

题228 已知：如图 7-205，等腰三角形 ABC 中，$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3}{2}$，⊙$O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切

圆,$\odot O_1$与$\odot O$外切,且分别与两腰AB、AC相切.

(1)求$\cos B$的值;

(2)设$\odot O$与$\odot O_1$的半径分别是R和r_1,求$\frac{R}{r_1}$的值;

(3)如果再作$\odot O_2$,使它与$\odot O_1$外切,且分别与两腰AB、AC相切,并设它的半径是r_2,那么$\frac{r_1}{r_2}$的值是多少?为什么?

解 (1)作等腰$\triangle ABC$底边上的高AD,

$\because AB=AC,\therefore BD=DC,\frac{AB}{BC}=\frac{3}{2}$,

$\therefore \frac{BD}{AB}=\frac{1}{3},\cos B=\frac{1}{3}$.

(2)连结BO,$\because BO$平分$\angle B$,

$\therefore \frac{DO}{OA}=\frac{DB}{BA}=\frac{1}{3},\therefore \frac{DO}{DA}=\frac{1}{4}$.

过$\odot O$和$\odot O_1$相切的切点P,作公切线MN,

分别交AB、AC于M、N,

$\because PO=OD,\therefore \frac{PD}{AD}=\frac{1}{2},\frac{AP}{AD}=\frac{1}{2}$.

$\because MN\perp O_1O,BC\perp AD,\therefore MN\parallel BC$,

$\therefore \triangle AMN\backsim\triangle ABC$,

$\therefore \frac{r_1}{R}=\frac{MN}{BC}=\frac{AP}{AD}=\frac{1}{2},\therefore \frac{R}{r_1}=2$,

(3)$\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}=\frac{1}{3},\therefore \frac{r_1}{r_2}=2$.

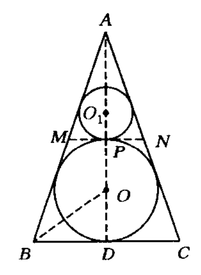


图 7 - 205

题229 已知:如图 7 - 206,过半$\odot O$上的一点C作直径AB的垂线,垂足为D,$\odot O'$切AB于E,切CD于F,内切半圆交于G.

求证:$AC=AE$.

证明 设$OA=R,O'E=r$,则$OO'=R-r$.

$\because AB\perp CD,AB$为直径,$\therefore AC^2=AD\cdot AB$.

又$OE^2=(R-r)^2-r^2=R^2-2Rr$.

$$AE^2=(R+OE)^2=(R+\sqrt{R^2-2Rr})^2.$$

$$=2R^2-2Rr+2R\sqrt{R^2-2Rr}$$

$$=2R(R-r+\sqrt{R^2-2Rr})$$

$$=AB(R+OE-r)$$

$$=AB(AE-DE)$$

$$=AB\cdot AD=AC^2.$$

$\therefore AE=AC$.

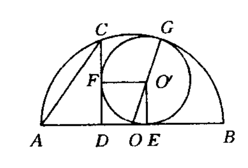


图 7 - 206

题230 已知：如图 7－207，$\odot O_1$与矩形 $ABCO$ 的三条边相切，切点是 M、P、R；$\odot O_2$与矩形两条边相切，切点是 S、N，$\odot O_1$与$\odot O_2$外切于 T；OT 交$\odot O_1$于 Q，图中已给定坐标系，其中 $B(\frac{9}{4},2)$.

(1) 求$\odot O_2$的半径；

(2) 求过 P、T、R 三点且对称轴平行于 y 轴的抛物线的解析式；

(3) 求$\triangle QRT$ 的面积.

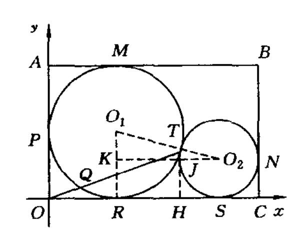


图 7－207

解 (1) 连结 O_1R，O_1O_2，作 $O_2K\perp O_1R$ 于 K，设$\odot O_2$的半径为 x，在$\triangle O_1O_2K$ 中，

$O_1K^2+O_2K^2=O_1O_2^{\ 2}$，

$\therefore (1-x)^2+(\frac{9}{4}-1-x)^2=(1+x)^2$.

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 或 $x=\frac{25}{4}$(不合题意，舍去)

$\therefore \odot O_2$的半径长为$\frac{1}{4}$.

(2) 作 $TH\perp OC$ 于 H，交 O_2K 于 J，则

$\frac{O_2J}{O_2K}=\frac{TJ}{O_1K}=\frac{O_2T}{O_1O_2}=\frac{1}{5}$，

$\because O_1K=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，$O_2K=\frac{9}{4}-1-\frac{1}{4}=1$，

$\therefore TJ=\frac{3}{20}$，$O_2J=\frac{1}{5}$.

$\therefore TH=\frac{1}{4}+\frac{3}{20}=\frac{2}{5}$，$OH=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{9}{5}$，

$\therefore T$ 点坐标为$(\frac{9}{5},\frac{2}{5})$.

则 $P(0,1)$、$R(1,0)$、T 三点在抛物线上，可求得 $y=\frac{5}{6}x^2-\frac{11}{6}x+1$.

(3)$OT=\sqrt{(\frac{9}{5})^2+(\frac{2}{5})^2}=\frac{\sqrt{85}}{5}$.

$\because OQ\cdot OT=OR^2$，$\therefore OQ=\frac{OR^2}{OT}=\frac{\sqrt{85}}{17}$.

$\therefore \frac{OQ}{OT}=\frac{5}{17}$.

由 $T(\frac{9}{5},\frac{2}{5})$得 $Q(\frac{9}{17},\frac{2}{17})$.

$S_{\triangle QRT}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{17}\times 1=\frac{12}{85}$.

题231 已知：如图 7－208，半圆 O 的半径为 R，半圆 O_1和半圆 O_2的半径分别为 r_1、

r_2，且$\frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}$.

求：图中阴影部分的面积.（用 R 表示）

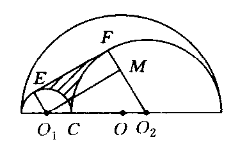


图 7 - 208

解 $\because \frac{r_1}{r_2}=\frac{1}{3}\therefore r_2=3r_1$，

作 $O_1M\perp O_2F$，垂足为 M，在 $\mathrm{Rt}\triangle O_1MO_2$中，

$\cos MO_2O_1=\frac{O_2M}{O_1O_2}=\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}=\frac{3r_1-r_1}{3r_1+r_1}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \angle MO_2O_1=60^\circ$，$\angle EO_1O_2=120^\circ$.

$$O_1M=O_1O_2\sin 60^\circ=(r_1+r_2)\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=2\sqrt{3}r_1.$$

则直角梯形 O_1O_2FE 的面积

$S_1=\frac{r_1+r_2}{2}\cdot 2\sqrt{3}r_1=4\sqrt{3}r_1^2$.

扇形 O_1CE 的面积 $S_2=\frac{1}{3}\pi r_1^2$，

扇形 O_2CF 的面积 $S_2=\frac{1}{6}\pi r_2^2=\frac{3}{2}\pi r_1^2$，

$\therefore$阴影面积 $S=S_1-S_2-S_3$

$$=4\sqrt{3}r_1^2-\frac{1}{3}\pi r_1^2-\frac{3}{2}\pi r_1^2=4\sqrt{3}r_1^2-\frac{11}{6}\pi r_1^2.$$

又$\because r_1+r_2=R$，$\therefore r_1=\frac{R}{4}$，

$\therefore S=4\sqrt{3}\cdot(\frac{R}{4})^2-\frac{11}{6}\pi(\frac{R}{4})^2=(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{11}{96}\pi)R^2$.

题232 已知：如图 7 - 209，在⊙O 中，C 为任意弦 AB 上任意一点，由 A、C、O 三点确定一圆与⊙O 交于 D.

求证：$CD=BC$.

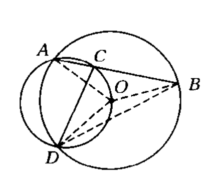


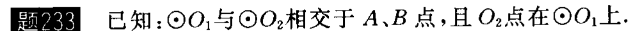
图 7 - 209

证明 连结 AO、BO、DO、BD.

$\because \angle OAC=\angle OBC$，$\angle OAC=\angle ODC$，

$\therefore \angle CDO=\angle CBO$，且$\angle ODB=\angle OBD$，

$\therefore \angle CDB=\angle CBD$，$\therefore CD=BC$.



题233 已知：⊙O_1与⊙O_2相交于 A、B 点，且 O_2点在⊙O_1上.

(1) 如图 7 - 210(1)，AD 是⊙O_2的直径，连结 DB 并延长交⊙O_1于 C，求证：$CO_2\perp AD$.

(2) 如图 7 - 210(2)，如果 AD 是⊙O_2的一条弦，连结 DB 并延长交⊙O_1于 C，那么 CO_2所在直线是否与 AD 垂直？并证明你的结论.

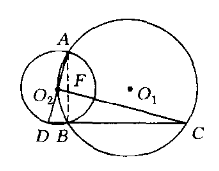


图 7 - 210(1)

证明 (1) 连结 AB，

∵AD 是$\odot O_2$的直径，∴$\angle ABD$ 是直角.

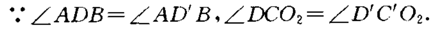
∴$\angle ABC$ 是直角.

又$\angle ABC$ 与$\angle AO_2C$ 是同弧上的圆周角.

$\angle AO_2C$ 是直角，∴$CO_2\perp AD$.

(2) CO_2所在直线与 AD 垂直.

连结 AO_2并延长交$\odot O_2$于 D'，连结 $D'B$ 延长交$\odot O_1$于 C'，连结 $C'O_2$，


∵$\angle ADB=\angle AD'B$，$\angle DCO_2=\angle D'C'O_2$.

又由(1)可知$\angle C'O_2D'=90°$，

∴$\angle AD'B+\angle D'C'O_2=90°$，

∴$\angle ADB+\angle DCO_2=90°$，即$\angle ADC+\angle DCO_2=90°$.

延长 CO_2交 AD 于 E，则$\angle CED=90°$.

∴CO_2所在直线与 AD 垂直.

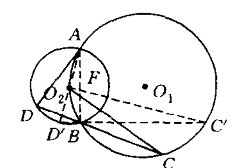


图 7 - 210(2)

题234 已知：如图 7 - 211，$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于点 C、D，A 是$\odot O_1$上一点，直线 AD 交$\odot O_2$于点 B.

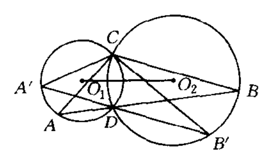
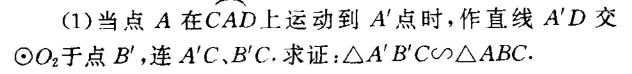
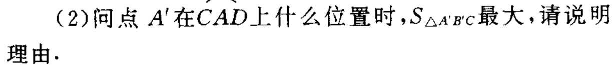
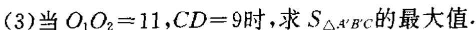


图 7 - 211


(1)当点 A 在$\overset{\frown}{CAD}$上运动到 A'点时，作直线 $A'D$ 交$\odot O_2$于点 B'，连 $A'C$、$B'C$. 求证：$\triangle A'B'C\backsim\triangle ABC$.


(2)问点 A'在$\overset{\frown}{CAD}$上什么位置时，$S_{\triangle A'B'C}$最大，请说明理由.


(3)当 $O_1O_2=11$，$CD=9$时，求 $S_{\triangle A'B'C}$的最大值.

证明 (1)在$\triangle A'B'C$ 和$\triangle ABC$ 中，

∵$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$，∴$\triangle A'B'C\backsim\triangle ABC$.

(2)∵$\triangle A'B'C\backsim\triangle ABC$，∴$\dfrac{S_{\triangle A'B'C}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{CA'^2}{CA^2}$.

即 $S_{\triangle A'B'C}=\dfrac{CA'^2}{CA^2}\cdot S_{\triangle ABC}$.

因 CA、$S_{\triangle ABC}$是定值，所以，当 CA'取最大值，即为$\odot O_1$的直径时，$S_{\triangle A'B'C}$的值最大.

(2)先证 $A'B'\perp CD$ 时，$A'B'$最大.

设过 D 点的另一条直线 PQ，交$\odot O_1$于点 P，交$\odot O_2$于点 Q.

连结 PC、QC，作 $O_1R\perp PQ$ 于点 R，$O_2S\perp PQ$ 于点 S，$O_2T\perp O_1R$ 于点 T.

∵四边形 O_2TRS 是矩形，

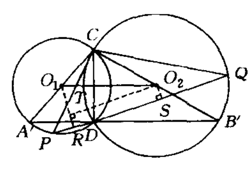


图 7 - 212

$\therefore O_2T=RS=\frac{1}{2}PQ$.

同理可证 $A'B'\perp CD$ 时，$O_1O_2=\frac{1}{2}A'B'$.

在 $Rt\triangle O_1O_2T$ 中，$O_1O_2>O_2T$，$\therefore A'B'>PQ$.

又点 C 到直线 PQ 的距离 $h<CD$.

$\therefore S_{\triangle A'B'C}=\frac{1}{2}A'B'\cdot CD>\frac{1}{2}PQ\cdot h=S_{\triangle PQC}$.

$\therefore$ 当 $A'B'\perp CD$ 时，即 CA' 是$\odot O_1$的直径时，$S_{\triangle A'B'C}$最大.

(3) $\because A'C$ 为$\odot O_1$的直径，

$\therefore \angle A'DC=90^\circ$，$\therefore \angle B'DC=90^\circ$，

$\therefore B'C$ 为$\odot O_1$的直径，

$\therefore O_1O_2\perp CD$，且 $O_1O_2 \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}A'B'$，

$\therefore S_{A'B'C}=\frac{1}{2}A'B'\cdot CD=O_1O_2\times CD=11\times 9=99$.

题235 已知：如图 7 - 213，大圆的面积被小圆平分，AB、CD 是大圆的弦，又是小圆的切线，且 $AB/\!/CD$，大圆的半径为 R.

求：阴影部分的面积.

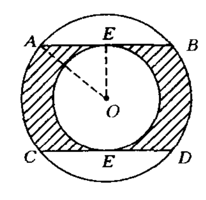


图 7 - 213

解 连结 OE、OA. 设小圆的半径为 r，

$\because$ 大圆的面积被小圆平分，$\therefore \pi R^2=2\pi r^2$，

$\therefore R^2=2r^2$，$r=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

$\because AB$ 与$\odot O$ 相切，$\therefore OE\perp AB$.

$\because \cos AOE=\frac{OE}{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore \angle AOE=45^\circ$，$\angle AOB=90^\circ$.

$\therefore S_{弓形}=S_{扇形AOB}-S_{\triangle AOB}$

$=\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2=\frac{\pi-2}{4}R^2$.

$\because S_{阴影}=S_{大圆}-S_{小圆}-2S_{弓形}=\pi R^2-\pi(\frac{\sqrt{2}}{2}R)^2-2\times\frac{\pi-2}{4}R^2$
$=R^2$.

$\therefore$ 阴影部分面积为 R^2.

题236 已知：如图 7 - 214，$\odot O_1$与$\odot O_2$外切于 P，过 P 作直线交$\odot O_1$于 A，交$\odot O_2$于 B，过 B 作$\odot O_2$的切线 BQ，连结 AQ 交$\odot O_1$于 C.

求证：$AC\cdot AQ=AP\cdot AB$

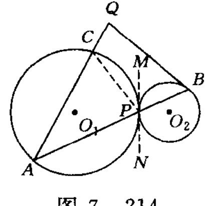


图 7 - 214

证明 连结 PC、过 P 作两圆的内公切线 MN,

则$\angle ACP=\angle APN$,

$\because QB$、MN 与$\odot O_2$相切,

$\therefore \angle QBP=\angle BPM$.

$\because \angle BPM=\angle APN$,$\therefore \angle ACP=\angle QBP$,

$\therefore \triangle ACP\backsim\triangle ABQ$,$\therefore AC\cdot AQ=AP\cdot AB$.

题227 已知:如图 7-215,两圆内切于点 P,大圆的弦 AD 交小圆于点 B 及 C.

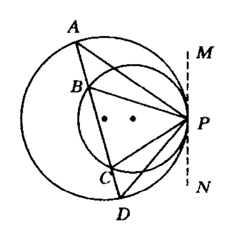


图 7-215

求证:$\angle APB=\angle CPD$,

证明 过 P 作两圆的外公切线 MN,

则$\angle BPM=\angle BCP$,$\angle APM=\angle D$,

$\because \angle APB=\angle BPM-\angle APM$,

$\angle CPD=\angle BCP-\angle D$,

$\therefore \angle APB=\angle CPD$.

题228 已知:如图 7-216,延长$\triangle ABC$ 的高 AD 交外接圆于 H,以 AD 为直径的圆交 AB、AC 于 E、F 两点,EF 交 AD 于 G.

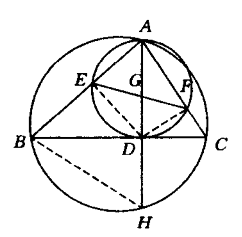


图 7-216

求证:$AD^2=AG\cdot AH$.

证明:连结 DE、DF、BH.

$\because AD$ 是小圆的直径,$\therefore DE\perp AB$,$DF\perp AC$.

又$\because AD\perp BC$,

$\therefore AD^2=AE\cdot AB$,$\angle ADF=\angle C$,

$\because \angle AEG=\angle ADF$,$\angle C=\angle H$,

$\therefore \angle AEG=\angle H$,$\therefore \triangle AEG\backsim\triangle AHB$.

$\therefore AE\cdot AB=AG\cdot AH$,$\therefore AD^2=AG\cdot AH$.

题229 已知:如图 7-217,$\odot O_1$与$\odot O_2$外切于点 E,外公切线 AB 分别切两圆于 A、B.

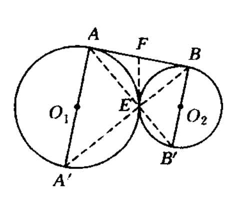


图 7-217

求证:AB 是两圆直径的比例中项.

证明 过 A、B 分别作直径 AA',BB',过 E 作$\odot O_1$和$\odot O_2$的公切线,与 AB 交于 F,连结 AE、BE、$A'E$,$B'E$.

$\because AB$、EF 为切线,$\therefore AF=FE=BF$,

$\therefore \angle AEB=90°$.

$\because AA'$为$\odot O_1$的直径,$\therefore \angle AEA'=90°$,

$\therefore \angle A'EB=180°$,$A'$、$E$、$B$ 三点在一直线上.

同理 A、E、B' 三点在一直线上.

$\because \angle BAE=\angle A'$，$\angle A'AB=\angle B'BA=90°$，

$\therefore \triangle AA'B \backsim \triangle BB'A$，$\therefore AB^2=AA'\cdot BB'$，

即 AB 是两圆直径的比例中项.

题240 已知：如图 7 - 218，$\odot O_1$的半径 R 大于$\odot O_2$的半径 r，两圆内切于 P，$\odot O_1$的弦 AB 切$\odot O_2$于 C，PA、PB 分别交$\odot O_2$于 E、F 两点.

求证：(1) $AB /\!/ EF$；

(2) PC 平分$\angle APB$；

(3) $\dfrac{AC^2}{AP^2}$为定值.

图 7 - 218

证明 (1)过 P 点作两圆的公切线 MN，

$\because \angle BAP=\angle BPM$，$\angle FEP=\angle FPM$，

$\therefore \angle BAP=\angle FEP$，$\therefore AB /\!/ EF$.

(2) $\because AB /\!/ EF$，AB 与$\odot O_2$切于 C，

$\therefore \overset{\frown}{CE}=\overset{\frown}{CF}$，$\angle FPC=\angle EPC$，

$\therefore PC$ 平分$\angle APB$.

(3)连结 O_1P，O_2在 O_1P 上，连结 AO_1、EO_2.

$\therefore \triangle O_1AP$、$\triangle O_2EP$ 为等腰三角形，$\angle O_2PE$ 为公共角，

$\therefore \angle O_2EP=\angle O_1AP$，$AO_1 /\!/ EO_2$. $\therefore \dfrac{AE}{AP}=\dfrac{O_1O_2}{O_1P}$.

$\therefore \dfrac{AC^2}{AP^2}=\dfrac{AP\cdot AE}{AP^2}=\dfrac{AE}{AP}=\dfrac{O_1O_2}{O_1P}=\dfrac{R-r}{R}$(定值).

题241 已知：如图 7 - 219，$\odot O$ 的半径为 R，以$\odot O$ 的圆周上一点 A 为圆心，以 r 为半径作圆，$\odot O$ 的弦切$\odot A$ 于 M.

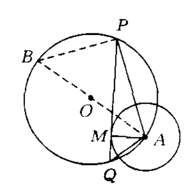


图 7 - 219

求证：$AP\cdot AQ=2Rr$.

证明 作$\odot O$ 的直径 AB，连结 BP.

$\because \angle AMQ=90°$，$\angle APB=90°$，$\angle B=\angle Q$，

$\therefore \triangle ABP \backsim \triangle AQM$.

$\therefore \dfrac{AP}{AB}=\dfrac{AM}{AQ}$，$\therefore AP\cdot AQ=AB\cdot AM=2Rr$.

题242 已知：如图 7 - 220，在$\triangle ABC$ 中，以 AB 边的中点 O 为圆心，$\dfrac{1}{2}AB$ 为半径作圆交 AC 于 D，交 BC 于 E，过 C、D、E 三点作圆 O_1.

求证：OD、OE 是$\odot O_1$的切线.

证明 延长 EO 交$\odot O$ 于 F，作$\odot O_1$的直径 EG，连结 DG、DB.

$\angle C=\angle ADB-\angle DBE=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DE})$的度数.

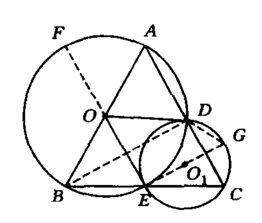


图 7 - 220

而$\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{BF}-\overset{\frown}{DE}$

$=\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{DE}$

$=\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{AD}$.

$\therefore \angle C=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{AD})$度数,

又$\because \angle OED=\frac{1}{2}\overset{\frown}{DF}$度数.

$\therefore \angle C=\angle OED$,

而$\angle C=\angle G$,$\angle G+\angle DEO_1=90°$.

$\therefore \angle OED+\angle DEO_1=90°$,即$\angle OEO_1=90°$.

$\therefore OE$为$\odot O_1$的切线,同理OD为$\odot O_1$的切线.

题2[illegible] 已知:如图 7 - 221,两圆交于A、B两点,过A作BA的垂线交两圆于C、D,延长DB、CB交两圆于E、F.

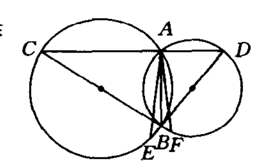


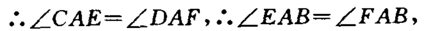
图 7 - 221

求证:$\angle EAF=2\angle EAB=2\angle FAB$.

证明 $\because AB\perp CD$,

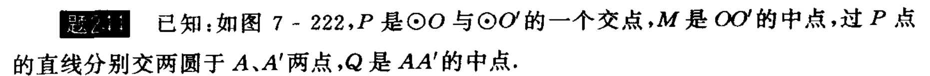
$\therefore \angle CAB=\angle DAB=90°$,

又$\angle CAE=\angle CBE$,$\angle DAF=\angle DBF$,$\angle CBE=\angle DBF$,



$\therefore \angle CAE=\angle DAF$,$\therefore \angle EAB=\angle FAB$,

$\therefore \angle EAF=2\angle EAB=2\angle FAB$.



题2[illegible] 已知:如图 7 - 222,P是$\odot O$与$\odot O'$的一个交点,M是OO'的中点,过P点的直线分别交两圆于A、A'两点,Q是AA'的中点.

求证:$MQ=MP$.

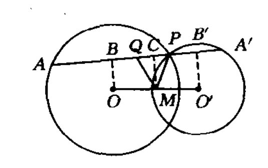


图 7 - 222

证明 作$OB\perp AA'$于B,$O'B'\perp AA'$于B',$MC\perp AA'$于C.

则$OB/\!/CM/\!/B'O'$.

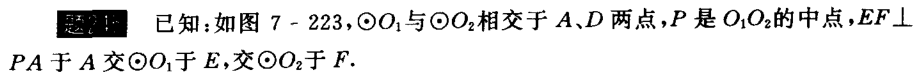
$\because M$是OO'的中点,$\therefore BC=B'C$,

设$AP=a$,$A'P=b$,

则$B'P=\frac{b}{2}$,$AQ=\frac{a+b}{2}$,$AB=\frac{a}{2}$,$BQ=\frac{b}{2}$.

$\therefore BQ=B'P$,$\therefore CQ=CP$.

又$\because CM\perp PQ$,$\therefore MQ=MP$.



题2[illegible] 已知:如图 7 - 223,$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于A、D两点,P是O_1O_2的中点,$EF\perp PA$于A交$\odot O_1$于E,交$\odot O_2$于F.

求证:$AE=AF$.

证明 作$O_1B\perp EF$于B，$O_2C\perp EF$于C.

$\because AP\perp EF$，$\therefore O_1B /\!/ AP /\!/ CO_2$.

$\because P$是O_1O_2的中点，

$\therefore AB=AC$，$\therefore AE=AF$.

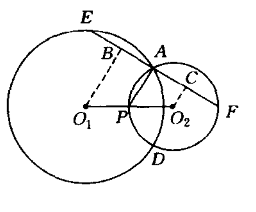


图 7 - 223

题246 已知：如图 7 - 224，从⊙O外一点A向⊙O引两条切线AC、AB，连结BC的弦与OA的交点为D，过C引任意弦CE，从A向CE或其延长线引垂线，垂足为H.

求证：$\triangle ADH\backsim\triangle CBE$.

证明 $\because AC$是⊙O的切线，

$\therefore \angle ACB=\angle BEC$，

$\because AB$是⊙O的切线，$\therefore \angle ADC=90°$.

$\because \angle AHC=90°$，$\therefore A$、H、C、D四点共圆.

$\therefore \angle AHD=\angle ACD$，$\therefore \angle AHD=\angle BEC$.

在AC的延长线上取一点F，则

$\angle ECF=\angle ACH=\angle CBE$.

且$\angle ACH=\angle ADH$，$\therefore \angle ADH=\angle CBE$.

$\therefore \triangle ADH\backsim\triangle CBE$.

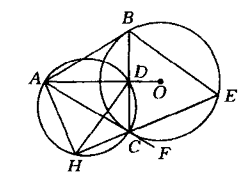
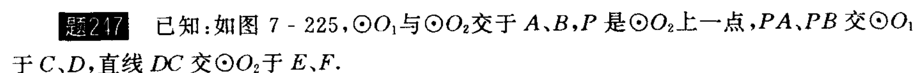


图 7 - 224



题247 已知：如图 7 - 225，⊙O_1与⊙O_2交于A、B，P是⊙O_2上一点，PA、PB交⊙O_1于C、D，直线DC交⊙O_2于E、F.

(1) 求证：$PE^2=PB\cdot PD$；

(2) 若PE、PF的长度是方程$x^2-mx+16=0$的两个根，且$PB=2$ cm，求PD的长.

证明 (1) 连结AB、EB.

$\because \angle BEP=\angle BAP$，$\angle BAP=\angle BDC$.

$\therefore \angle BEP=\angle BDC$，且$\angle BPE=\angle EPD$，

$\therefore \triangle BPE\backsim\triangle EPD$，$\therefore PE^2=PB\cdot PD$.

(2) 连结BF、PF.

$\because \angle BFP=\angle BAP$，$\angle BAP=\angle BDC$，

$\therefore \angle BFP=\angle BDC$，且$\angle FPB=\angle DPF$，

$\therefore \triangle BPF\backsim\triangle FPD$，$PF^2=PB\cdot PD$.

$\therefore PE=PF$.

$\because PE$、PF的长度是方程$x^2-mx+16=0$的两个根，

$\therefore PE\cdot PF=16$，且$PB=2$，

$\therefore PE^2=PE\cdot PF=PB\cdot PD$，$16=2PD$.

$\therefore PD=8$ cm.

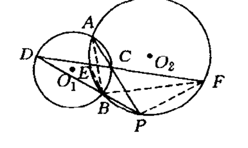


图 7 - 225

题248 已知：如图 7－226，从两同心圆外一点 P，作外圆的切线 PA 及内圆的切线 PB 和 PC.

求证：$\angle OAB=\angle OAC$.

证明 连结 OC、OB、OP.

$\because PA$、PB 和 PC 是同心圆的切线，

$\therefore OC\perp PC$，$OA\perp PA$，$OB\perp PB$.

$\therefore \angle OCP=\angle OAP=90°$，

$\angle OAP+\angle OBP=180°$.

$\therefore O$、C、A、P 四点共圆，O、A、P、B 四点共圆.

$\therefore \angle OAC=\angle OPC$，$\angle OAB=\angle OPB$.

$\because \angle OPC=\angle OPB$，$\therefore \angle OAB=\angle OAC$.

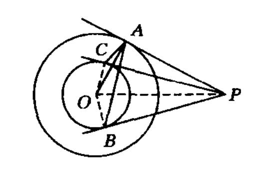
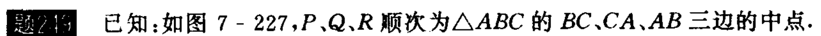


图 7－226



题249 已知：如图 7－227，P、Q、R 顺次为$\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 三边的中点.

求证：$\triangle ABC$ 的外接圆在 A 点的切线与$\triangle PQR$ 的外接圆在 P 点的切线平行.

证明 延长 AB 交 PN 于 T.

$\because P$、Q、R 分别为 BC、CA、AB 的中点，

$\therefore PQ/\!/AB$，$RQ/\!/BC$，$RP/\!/AC$，

$\therefore \angle PRQ=\angle PCQ$.

$\because \angle PRQ=\angle QPH$，

$\angle PCQ=\angle BCA=\angle MAT$.

$\therefore \angle MAT=\angle QPH$.

$\because \angle QPH=\angle ATP$，$\therefore \angle MAT=\angle ATP$，

$\therefore AM/\!/PN$.

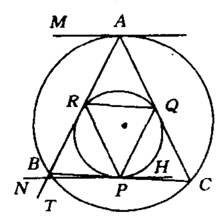


图 7－227

题250 已知：如图 7－228，两圆相交于 A、B 两点，过 A 任引一割线 CAD.

求证：$\angle CBD$ 为定值.

证明 连结 AB，过 A 分别作两圆的切线 EF 和 GH.

则$\angle ABC=\angle CAE=\angle DAF$，　①

$\angle ABD=\angle DAG$.　②

①＋②，得$\angle CBD=\angle GAF$.

无论割线 CAD 的位置怎样绕定点 A 变动，切线 EF、GH 永远固定，故$\angle GAF$ 为定角，

$\therefore \angle CBD$ 是一定值.

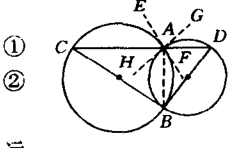


图 7－228

题251 已知：如图 7－229，$\odot O$ 与$\odot O'$相交于 P、Q，过 P 点任意引两割线 AB、CD，与$\odot O$ 交于 A、C 两点，与$\odot O'$交于 B、D 两点.

求证：AC、BD 两直线的夹角为定值.

证明 连结 AQ、BQ、PQ.

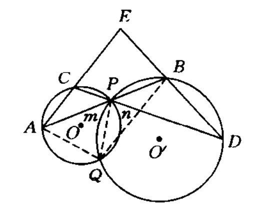


图 7 - 229

$\because P$、Q 为两定点，$\therefore \overset{\frown}{PmQ}$与$\overset{\frown}{PnQ}$都是定弧，

$\therefore$这两弧上的圆周角都是定角.

$\therefore \angle PAQ$ 与 $\angle PBQ$ 都是定角，

$\therefore \angle PAQ+\angle PBQ$ 为定值，

$\therefore \angle AQB$ 为定值.

又$\because \angle ECD=\angle PQA$，$\angle EDC=\angle PQB$，

$\therefore \angle ECD+\angle EDC=\angle PQA+\angle PQB=\angle AQB$ 为定值.

$\therefore \angle CED$ 为定值.

题252 已知：如图 7 - 230，以$\odot O$ 上任一点 M 为圆心作一圆，交$\odot O$ 于 A、D，AB 为$\odot O$ 的直径，AC 为$\odot M$ 的直径，AB 交于$\odot M$ 于 N.

求证(1) $AB=BD+CD$；

(2) $AB\cdot AN=2AM^2$.

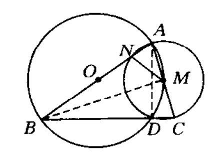


图 7 - 230

证明 (1) 连结 AD、BM.

$\because AB$ 为直径，$\therefore \angle BDA=90°$，

$\because AC$ 为直径，$\therefore \angle ADC=90°$，

$\therefore B$、D、C 三点共线，$\therefore BC=BD+DC$.

$\therefore BM\perp AM$，$AM=MC$，$\therefore AB=BC$，

$\therefore AB=BD+CD$.

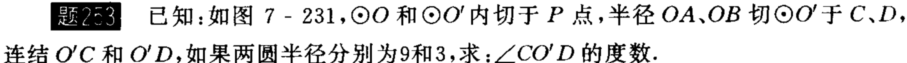
(2) $\because AB=BC$，$\angle BAC=\angle C$，

$\because MA=MN$，$\therefore \angle BAC=\angle ANM$，

$\therefore \angle ANM=\angle C$，$B$、$N$、$M$、$C$ 四点共圆.

$\therefore AB\cdot AN=AM\cdot AC$，

$\because AC=2AM$，$\therefore AB\cdot AN=2AM^2$.



题253 已知：如图 7 - 231，$\odot O$ 和$\odot O'$内切于 P 点，半径 OA、OB 切$\odot O'$于 C、D，连结 $O'C$ 和 $O'D$，如果两圆半径分别为9和3，求：$\angle CO'D$ 的度数.

解 $\because \odot O$ 和 $\odot O'$内切于 P，

$\therefore$连结 OO'并延长必过切点 P.

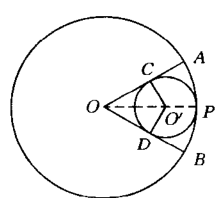


图 7 - 231

$\because OA$ 切$\odot O'$于 C，$\therefore O'C\perp OC$，

$\because$在 $\text{Rt}\triangle O'CO$ 中，$O'C=3$，$OO'=9-3=6$，

$\because O'C=\dfrac{1}{2}OO'$，$\therefore \angle COO'=30°$.

$\because \angle COO'=\angle DOO'$，$\therefore \angle COD=60°$.

在四边形 $ODO'C$ 中，

$\because \angle OCO'+\angle ODO'=180°$，

$\therefore \angle CO'D=120°$.

题254　已知：如图 7-232，⊙O 与⊙O'外切于点 C，PA 切⊙O 于点 A，交⊙O'于点 P、D，直线 PC 交⊙O 于点 B.

求证：(1) $AB\cdot PC=AC\cdot PA$；

(2) $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$.

图 7-232

证明　(1) $\because PA$ 是⊙O 的切线，A 为切点，

$\therefore \angle PAC=\angle PBA$，

又 $\because \angle APC=\angle BPA$，$\therefore \triangle PAC\backsim\triangle PBA$，

$\therefore PC:PA=AC:AB$，

即 $AB\cdot PC=AC\cdot PA$.

(2)过 C 点作⊙O 与⊙O'的公切线 MN，交 AP 于 M.

由(1)已证，$\angle DAC=\angle B$，

$\because MN$ 为公切线，$\therefore \angle NCB=\angle CAB$，$\angle NCP=\angle CDP$，

$\therefore \angle ADC=\angle NCB=\angle CAB$，

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DAC$.

题255　已知：如图 7-233，AB 是⊙O 的直径，BC 是⊙O 的切线，OC 与⊙O 相交于点 D，连结 AD 并延长，与 BC 相交于点 E.

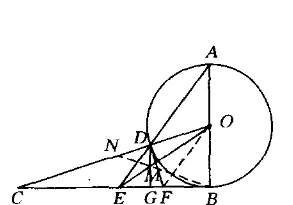
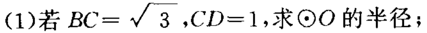


图 7-233



(1)若 $BC=\sqrt{3}$，$CD=1$，求⊙O 的半径；

(2)取 BE 的中点 F，连结 DF. 求证：DF 是⊙O 的切线；

(3)过点 D 作 $DG\perp BC$，垂足为 G，OE 与 DG 相交于点 M.

①求证：$DM=GM$；

②连结 BM 并延长，与 OC 相交于点 N，试判断以 N 为圆心，经过点 E 的⊙N 与⊙O 的位置关系，并说明理由.

解　(1) $\because AB$ 是⊙O 的直径，BC 是⊙O 的切线，

$\therefore AB\perp BC$.

设⊙O 的半径为 r，则在 $\mathrm{Rt}\triangle OBC$ 中，$OC^2=OB^2+CB^2$.

$\therefore (r+1)^2=r^2+(\sqrt{3})^2$，$\therefore r=1$，所以⊙$O$ 的半径为1.

(2)连结 OF，$\because AO=OB$，$BF=EF$，

$\therefore OF\parallel AE$，$\therefore \angle A=\angle FOB$.

又 $\because \angle BOD=2\angle A$，$\therefore \angle DOF=\angle BOF$.

又 $\because OB=OD$，$OF=OF$，$\therefore \triangle OBF\cong\triangle ODF$，

$\therefore \angle ODF=\angle OBF=90°$，即 $OD\perp DF$，$\therefore FD$ 是⊙O 的切线.

(3)①∵$DG\perp BC$，$AB\perp BC$，∴$DG/\!/AB$.

∴$\dfrac{DM}{AO}=\dfrac{EM}{EO}=\dfrac{MG}{OB}$.

又∵$AO=BO$，∴$DM=GM$.

②⊙N 与⊙O 外切.

证明如下：连结 NE，∵$DG/\!/AB$，

∴$\dfrac{EM}{EO}=\dfrac{MG}{OB}$，$\dfrac{NM}{NB}=\dfrac{DM}{OB}$.

∵$DM=GM$，∴$\dfrac{EM}{EO}=\dfrac{NM}{NB}$，

∴$NE/\!/AB$，∴$\dfrac{NE}{OA}=\dfrac{ND}{OD}$.

∵$OA=OD$，∴$EN=ND$.

∴圆心距 ON 等于⊙N 的半径与⊙O 的半径的和，

∴⊙N 与⊙O 外切.

题256　已知：如图 7－234.⊙O_1与⊙O_2外切于 P，MN 为两圆外公切线(M 在⊙O_1上，N 在⊙O_2上)，过 P 作直线分别与⊙O_1与⊙O_2交于 A、B，直线 AM 与 BN 相交于 C，过 A 作⊙O_2的切线 AD(D 为切点).

求证：(1)△ABC 为直角三角形；

(2)$AD=AC$.

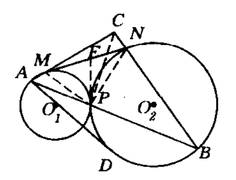


图 7－234

证明　过 P 作两圆的公切线交 MN 于 E，连结 PM、PN、PC.

(1)∵MN、EP 为⊙O_1与⊙O_2的公切线，

∴$ME=PE=NE$，∴$\angle MPN=90°$.

∴$\angle EMP+\angle ENP=90°$，

∵$\angle EMP=\angle MAP$，$\angle ENP=\angle B$，

∴$\angle MAP+\angle B=90°$，∴$\angle ACB=90°$.

∴△ABC 为直角三角形.

(2)∵$MC\perp CN$，$MP\perp PN$，∴M、P、N、C 四点共圆，

∴$\angle NCP=\angle NMP=\angle MAP$，

而$\angle MAP+\angle B=90°$，∴$\angle NCP+\angle B=90°$，即 $CP\perp AB$.

∴$AC^2=AP\cdot AB$，而 $AD^2=AP\cdot AB$，

∴$AC^2=AD^2$，$AC=AD$.

题257　直角三角形斜边的高分原三角形为两个直角三角形，求证：所得两个三角形和原三角形的内切圆半径的和等于斜 边上的高.

已知：如图 7－235，Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$CD\perp AB$，⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3分别是△ABC、△ACD、△BCD 的内切圆，内切圆半径分别为 r_1、r_2、r_3.

求证：$r_1+r_2+r_3=CD$.

证明 设 $AC=b, BC=a, AB=c$.

$\therefore r_1=\frac{1}{2}(b+a-c)$,

$r_2=\frac{1}{2}(AD+CD-b)$,

$r_3=\frac{1}{2}(CD+BD-a)$,

$\therefore r_1+r_2+r_3=CD$.

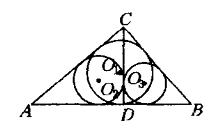


图 7 - 235

题258 已知:如图 7 - 236,以 AB 为弦作 APB 弧.

求:$\overset{\frown}{AB}$上一点 P,使 $AP+PB$ 最大.

解 取$\overset{\frown}{AB}$的中点 P,则 $AP+BP$ 最大,

$\because P$ 是$\overset{\frown}{AB}$的中点,$\therefore PA=PB$,

$\therefore$ 以 P 为圆心,PA 为半径的圆过 B 点,

延长 AP 与$\odot P$ 交于 C,则 $PB=PC$.

$\therefore AP+PB=AP+PC=AC$.

图 7 - 236

另在$\overset{\frown}{APB}$上取一点 Q,延长 AQ 与$\overset{\frown}{ACB}$交于点 D.

则$\angle C=\angle D$.

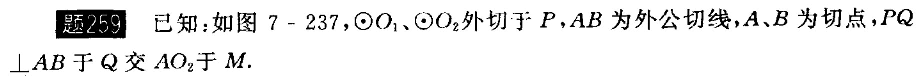
又$\because \angle APB=\angle AQB, \angle APB=2\angle C$,

$\therefore \angle AQB=2\angle C=2\angle D$,

$\therefore QD=QB, \therefore AQ+QB=AQ+QD=AD$,

又 AC 是$\odot P$ 的直径,AD 是$\odot P$ 的弦,

$\therefore AC>AD, \therefore AP+PB>AQ+QB$,$P$ 为所求的点.


题259 已知:如图 7 - 237,$\odot O_1$、$\odot O_2$外切于 P,AB 为外公切线,A、B 为切点,$PQ\perp AB$ 于 Q 交 AO_2于 M.

求证:$PM=MQ$.

证明 连结 AO_1、BO_2、O_1O_2,则 P 在 O_1O_2上,

$\because AO_1\perp AB, PQ\perp AB, BO_2\perp AB$,

$\therefore AO_1 /\!/ PQ /\!/ BO_2$.

$\therefore \frac{QM}{AQ}=\frac{BO_2}{AB}, \frac{QM}{BO_2}=\frac{AQ}{AB}=\frac{PO_1}{O_1O_2}$.

又$\frac{MP}{PO_2}=\frac{AO_1}{O_1O_2}$.

$\because AO_1=PO_1, \therefore \frac{MP}{PO_2}=\frac{QM}{BO_2}$.

又$\because PO_2=BO_2, \therefore PM=MQ$.

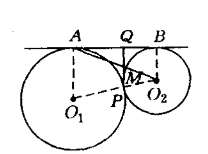


图 7 - 237

题260 已知:如图 7 - 238,$\odot O_1$、$\odot O_2$的半径分别为 R、$r(R>r)$,$\odot O_1$与$\odot O_2$外切

于 A 点，BC 为外公切线，B、C 分别为切点，$AD\perp BC$ 于 D，$AD=d$.

求证：$\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{2}{d}$.

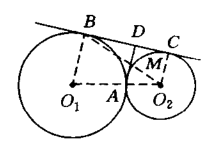


图 7 - 238

证明 连结 O_1B、O_2C、O_1O_2、BO_2交 AD 于 M，则 A 在 O_1O_2上，

$\because O_1B/\!/AD/\!/CO_2$，由上题可得 $AM=DM$，

$\therefore AM=DM=\frac{d}{2}$.

$\because \frac{AM}{AO_2}=\frac{BO_1}{O_1O_2}$，$\therefore \frac{\frac{d}{2}}{r}=\frac{R}{R+r}$，

$\therefore Rd+rd=2Rr$，$\therefore \frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{2}{d}$.

题261 已知：如图 7 - 239，$\odot O_1$，与$\odot O_2$外切于 P，外公切线 AB 交 O_1O_2的延长线于 E，$PC\perp O_1O_2$，交 AB 于 C.

(1) 求证：$\frac{CE}{EO_2}=\frac{O_1P}{AC}$；

(2) 若两圆半径之比为4∶1，$CE=2$ cm，求：O_2E 的长.

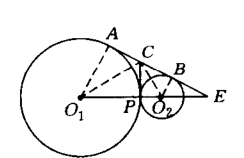


图 7 - 239

证明 (1) 连结 AO_1、BO_2.

$\because O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$，$CP\perp O_1E$，

$\therefore \triangle O_2BE\backsim\triangle CPE\backsim\triangle O_1AE$.

$\therefore \frac{AO_1}{CP}=\frac{CP}{BO_2}=\frac{CE}{EO_2}$.

$\because AC$、CP 为$\odot O_1$的切线，

$\therefore AC=CP$，且 $AO_1=PO_1$.

$\therefore \frac{AO_1}{CP}=\frac{O_1P}{AC}$，$\therefore \frac{CE}{EO_2}=\frac{O_1P}{AC}$.

(2) 连结 CO_1、CO_2.

$\because CO_1$平分$\angle ACP$，CO_2平分$\angle PCB$，

$\therefore \angle O_1CO_2=90°$，又 $CP\perp O_1O_2$，

$\therefore CP^2=O_1P\cdot PO_2$

设 $PO_2=a$，则 $O_1P=4a$，

$\therefore CP^2=4a\cdot a$，$CP=2a$，$AC=2a$.

$\therefore$ 当 $CE=2$ cm 时，$\frac{2}{EO_2}=\frac{4a}{2a}$，$\therefore EO_2=1$ cm.

题262 已知：如图 7 - 240，$\odot O_1$、$\odot O_2$外切于 P，AB 为两圆的外公切线，A、B 为切点，AP 交$\odot O_2$于 C，BP 交$\odot O_1$于 D.

求证：$AB^2=AP\cdot PC+BP\cdot PD$.

证明 $\because AB$ 是$\odot O_1$的切线，

$\therefore AB^2=BP\cdot BD=BP(BP+PD)$

$=BP^2-BP\cdot PD.$

过 P 作两圆的的公切线交 AB 于 M，

则 $AM=BM=PM$，$\therefore \angle APB=90°$.

连结 BC，

$\because \angle ABP=\angle BCP$，$\angle PAB+\angle PBA=90°$，

$\therefore \angle PAB+\angle PCB=90°$.

$\therefore \angle CBA=90°$，$\therefore BP^2=AP\cdot PC$.

$\therefore AB^2=AP\cdot PC+BP\cdot PD$.

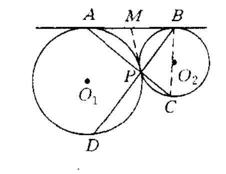


图 7 - 240

题263 已知：如图 7 - 241，$\odot O_1$、$\odot O_2$外切于 P 点，AB 为两圆的外公切线，A、B 为切点，AP 交$\odot O_2$于 C，BP 交$\odot O_1$于 D，连心线 O_1O_2交$\odot O_1$于 E，交$\odot O_2$于 F.

求证：$AC^2+BD^2=EF^2$.

证明 EA、FB 延长相交于 H.

$\because PA\perp EH$，$PB\perp FH$，

并由上题可证得 $AP\perp PB$，

$\therefore APBH$ 为矩形，$\angle H=90°$.

$\therefore EH^2+FH^2=EF^2$.

又$\because \angle APD=90°$，$\angle EAP=90°$.

$\therefore \overset{\frown}{AED}=\overset{\frown}{PDE}$ $\therefore \overset{\frown}{PD}=\overset{\frown}{AE}$，$PD=AE$，

又$\because PB=AH$，$\therefore BD=EH$，

同理 $AC=FH$，$\therefore AC^2+BD^2=EF^2$.

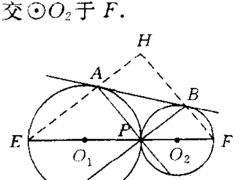
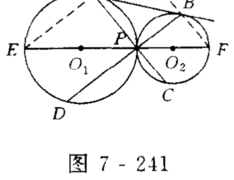



图 7 - 241

题264 已知：如图 7 - 242，设$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于 A、B 两点，且两圆的半径分别是方程 $x^2-7x+12=0$的两根.

(1) 当 $O_1O_2=5$时，求公共弦 AB 的长；

(2) 当公共弦 AB 的长为$\frac{24}{5}$时，连心线 O_1O_2的长是否唯一？试求出 O_1O_2的长.

解 $\because x^2-7x+12=0$，$x_1=3$，$x_2=4$，

$\therefore$两圆半径分别为3、4，

(1) 在$\triangle O_1BO_2$中，$\because O_1O_2{}^2=25$，

$BO_1^2+BO_2^2=3^2+4^2=25$.

$\therefore \triangle O_1BO_2$为 Rt$\triangle$，且$\angle O_1BO_2=90°$.

$\because O_1O_2\perp AB$，设 AB 与 O_1O_2交于 O，

$\therefore O_1O_2\cdot BO=BO_1\cdot BO_2=2S_{\triangle O_1BO_2}$

$\therefore BO=\dfrac{BO_1\cdot BO_2}{O_1O_2}=\dfrac{3\times 4}{5}=\dfrac{12}{5}$.

又 O_1O_2平分公共弦 AB，$\therefore AB=\frac{24}{5}$.

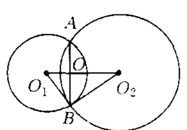


图 7 - 242(1)

(2) 连心线 O_1O_2的长有两个解.

在图7 - 242(1)中,由(1)知 $O_1O_2=5$,

如图 7 - 242(2),$OO_1=\sqrt{3^2-(\frac{12}{5})^2}=\frac{9}{5}$,

$OO_2=\sqrt{4^2-(\frac{12}{5})^2}=\frac{16}{5}$,

$\therefore O_1O_2=\frac{16}{5}-\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$.

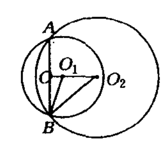


图 7 - 242(2)

题265 已知:如图 7 - 243,BC 是⊙O 的直径,⊙O 交△ABC 的边 AC 于 E,过点 A、B、E 的圆交 BC 于 F,ED 是⊙O 的切线,交另一圆于 D,设$\angle ABC=\alpha$,已知关于 x 的方程$2x^2-4x\cos\alpha+5\cos\alpha-2=0$有两个相等的实根,$AE=2$,$EF=5$.

求 (1) 角 α 的度数;

(2)$\frac{CE}{BC}$的值;

(3)线段 DE 的长.

解 (1) 关于 x 的方程$2x^2-4x\cos\alpha+5\cos\alpha-2=0$ 有两个相等的实根.

$\therefore(-4\cos\alpha)^2-4\times2\times(5\cos\alpha-2)=0$,

整理,得$2\cos^2\alpha-5\cos\alpha+2=0$,

解得 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$或 $\cos\alpha=2$(舍去),

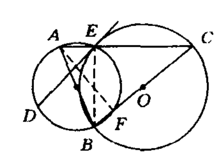
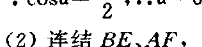


图 7 - 243

$\because\cos\alpha=\frac{1}{2}$,$\therefore\alpha=60°$.



(2) 连结 BE、AF,

$\because BC$ 是⊙O 的直径,$\therefore BE\perp EC$,$\angle AEB=90°$.

$\therefore AB$ 是小圆的直径,$\therefore\angle AFB=90°$.

$\because\angle ABC=\alpha=60°$,$\therefore\angle AEF=120°$.

在△AEF 中,由余弦定理

$AF^2=AE^2+EF^2-2AE\cdot AF\cos120°$

$=4+25-2\times2\times5\times(-\frac{1}{2})=39$.

$\therefore AF=\sqrt{39}$.

在 Rt△AFB 中,$\sin60°=\frac{AF}{AB}$,$AB=\frac{\sqrt{39}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{13}$.

又$\because\angle CEF=\angle ABF$,$\angle C=\angle C$,$\therefore$△$CEF$∽△$CBA$.

$\therefore \frac{CE}{BC}=\frac{EF}{AB}=\frac{5}{2\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

(3)∵$\angle DEA$ 等于它的对顶角，DE 是⊙O 的切线，

$\therefore \angle DEA=\angle EBC$，$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{EF}$，$\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AF}$，$DE=AF=\sqrt{39}$.

题266 已知：如图 7 - 244，分别以 $A(1,0)$，$B(0,-\sqrt{3})$ 为圆心，1和 $\sqrt{3}$ 为半径画圆与坐标轴交于点 E 和点 F.

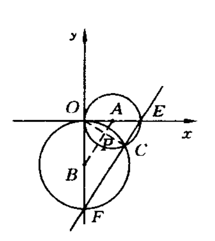


图 7 - 244

(1)写出点 E 和点 F 的坐标. 一个一次函数的图像经过 E、F 两点，求这个一次函数的解析式；

(2)求两圆交点 C 的坐标，并检验一下点 C 是否在直线 EF 上.

(3)过点 C 分别作⊙A 和⊙B 的切线，证明此两条切线互相垂直.

解 (1)点 E 的坐标为(2,0)，点 F 的坐标为$(0,-2\sqrt{3})$，

令过 E、F 两点的直线解析式为 $y=kx+b$.

$\therefore \begin{cases}2k+b=0,\\ b=-2\sqrt{3}.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\sqrt{3},\\ b=-2\sqrt{3}.\end{cases}$

∴过 E、F 两点的直线解析式为 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$.

(2)连结 AB、OC，交点为 P，则 $AB\perp OC$，AB 平分 OC，

$\therefore OP=PC$.

在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AO=1$，$OB=\sqrt{3}$，$\therefore \angle OAP=60°$.

$\therefore OP=AO\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore OC=\sqrt{3}$.

又$\angle AOC=30°$，点 C 在第四象限，

∴点 C 的横坐标为 $\sqrt{3}\cdot\cos30°=\frac{3}{2}$，

点 C 的纵坐标为$-\sqrt{3}\sin30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴点 C 的坐标为$(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

把 $C(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$代入 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$，

左边$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，右边$=\sqrt{3}\times\frac{3}{2}-2\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴点 C 的坐标适合 $y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$，点 C 在直线 EF 上.

(3)连结 AC、BC，此时 $AO=AC$，$BO=BC$，

$\therefore \triangle AOB\cong\triangle ABC$，∵$\angle AOB=90°$，$\therefore AC\perp BC$.

∵AC、BC分别为⊙A和⊙B的半径，

∴BC为过点C的⊙A的切线，AC为过点C的⊙B的切线，而$AC\perp BC$，∴过点C所作⊙A、⊙B的两条切线互相垂直.

题267 已知：如图 7-245，两圆同心，大圆的弦AD交小圆于B、C，AE切小圆于E，连结CE，直线BE交大圆于P、Q. 若$BE=AE$，$AB=a$，$AE=b$.

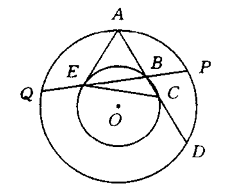


图 7-245

(1)求证：CD、CE的长是方程$ax^2-(a^2+b^2)x+ab^2=0$的两个根；

(2)求BP的长.

解 (1)∵两圆同心，∴$AB=CD=a$.

又∵AE为小圆的切线，∴$\angle AEB=\angle ACE$，

∴$\triangle AEB\backsim\triangle ACE$，∴$\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{EB}{CE}$.

而$AE=BE=b$，∴$CE=\dfrac{b^2}{a}$，

则$CD+CE=a+\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{a^2+b^2}{a}$，$CD\cdot CE=b^2$.

∴CD、CE是方程$ax^2-(a^2+b^2)x+ab^2=0$的两个根.

(2)根据相交弦定理，有$BP\cdot BQ=AB\cdot BD$，

∵$BD=AC$，$BP=EQ$，$BQ=BE+BP=b+BP$，

∴$BP(b+BP)=AB\cdot AC=AE^2=b^2$.

∴$BP^2+bBP-b^2=0$，

∴$BP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}b$或$BP=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}b$(不合题意，舍去).

∴$BP=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}b$.

题268 已知：如图 7-246，O是线段AB上一点，以OB为半径的⊙O交线段AB于点C，以线段AO为直径的半圆交⊙O于点D，过点B作AB的垂线与AD的延长线交于点E，连结CD. 若$AC=2$，且AC、AD的长是关于x的方程$x^2-kx+4\sqrt{5}=0$的两个根.

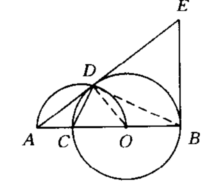


图 7-246

(1)证明：AE切⊙O于点D；

(2)求线段EB的长；

(3)求$\text{tg}ADC$的值.

解 (1)连结OD.

∵AO是半圆的直径，∴$\angle ADO=90°$.

又 OD 是⊙O 的半径，∴AE 切⊙O 于点 D.

(2)∵AC、AD 的长是关于 x 的方程 $x^2-kx+4\sqrt{5}=0$的两个根，

∴$AC\cdot AD=4\sqrt{5}$.

又 $AC=2$，∴$AD=2\sqrt{5}$.

∵AD 是⊙O 的切线，ACB 是⊙O 的割线，

∴$AD^2=AC\cdot AB$，∴$AB=\dfrac{AD^2}{AC}=\dfrac{(2\sqrt{5})^2}{2}=10$.

∴$OD=OC=OB=\dfrac{1}{2}(AB-AC)=\dfrac{1}{2}(10-2)=4$.

∵$\angle ADO=\angle ABE=90°$，$\angle A=\angle A$，∴$\triangle ADO\backsim\triangle ABE$.

∴$\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{OD}{EB}$，即$\dfrac{2\sqrt{5}}{10}=\dfrac{4}{EB}$，∴$EB=4\sqrt{5}$.

(3)连结 BD，则$\angle ADC=\angle DBC$.

∵BC 是⊙O 的直径，∴$\angle CDB=90°$，∴$\text{tg}ADC=\text{tg}DBC=\dfrac{CD}{DB}$.

∵$\angle A=\angle A$，∴$\triangle ACD\backsim\triangle ADB$.

∴$\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2\sqrt{5}}{10}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，∴$\text{tg}ADC=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

题269 两圆半径分别为4、2，如果它们有两条公切线互相垂直，求这两圆的连心线的长并作出图形.

解 作半径为4的⊙O 及它的两条相互垂直的切线 l_1、l_2，$l_1\perp l_2$，则 l_1、l_2把平面分成四部分.

设半径为2的圆的圆心为 O_1，则与 l_1和 l_2相切的⊙O_1只能在上述的四个部分之中，⊙O_1和⊙O 连心线的长度只能是图7 - 247(1)、(2)、(3)的三种情况.

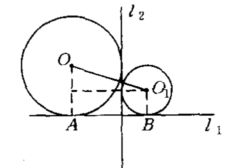


图 7 - 247(1)

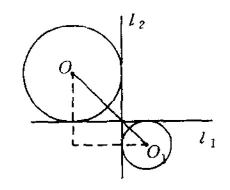


图 7 - 247(2)

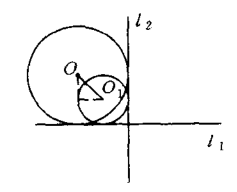


图 7 - 247(3)

在图7 - 247(1)中，作 $OA\perp l_1$于 A，$O_1B\perp l_1$于 B，$O_1C\perp OA$ 于 C，则

$OO_1=\sqrt{(2+4)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{10}$.

在图7 - 247(2)中，

$OO_1=\sqrt{(2+4)^2+(4+2)^2}=6\sqrt{2}$.

在图7 - 247(3)中，

$OO_1=\sqrt{(4-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

四、正多边形和圆

题270 正多边形和圆的关系.

(1)各边相等、各角也相等的多边形是正多边形.

(2)任何一个正多边形都有一个外接圆和一个内切圆,这两个圆是同心圆,

(3)正 n 边形的半径和边心距把 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形.

题271 几个有关的定义.

答 正多边形的中心:正多边形的外接圆(或内切圆)的圆心.

正多边形的半径:外接圆的半径.

正多边形的边心距:内切圆的半径.

正多边形的中心角:正多边形的每一边所对的外接圆的圆心角.

题272 边数相同的正多边形都是相似多边形.

相似多边形的半径(或边心距)的比等于相似比,相似多边形面积的比等于相似比的平方.

题273 对称性.

正多边形都是轴对称图形,n 边形有 n 条对称轴.

当边数是偶数时,正多边形又是中心对称图形.

题274 有关正多边形的计算公式及常用数据.

(1)正多边形的内角等于$\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

(2)正多边形的中心角 $\alpha_n=\frac{360°}{n}$,中心角的一半等于$\frac{180°}{n}$.

(3)正多边形的外角和等于360°(定值).

(4)正多边形的边长 $a_n=2R\cdot\sin\frac{180°}{n}$.

(5)正多边形的周长 $p_n=n\cdot a_n$.

(6)正多边形的边心距 $r_n=R\cdot\cos\frac{180°}{n}$.

(7)正多边形的面积 $S_n=\frac{1}{2}a_n\cdot r_n\cdot n=\frac{1}{2}p_n\cdot r_n$.

(8)正多边形的半径 $R_n=\sqrt{(\frac{1}{2}a_n)^2+r_n^2}=\frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$.

题275 与圆有关的计算公式.

(1)圆周长 $C=2\pi R$.

(2)n°圆心角所对的弧长 $l=\frac{n\pi R}{180}$.

(3)圆面积 $S=\pi R^2$.

(4)圆心角为 n°的扇形面积 $S=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{1}{2}lR$.

(5)弓形面积.

当弓形所含弧为劣弧时,$S_{弓}=S_{扇}-S_{\triangle}$;

当弓形所含弧为优弧时,$S_{弓}=S_{扇}+S_{\triangle}$;

当弓形所含弧为半圆时,$S_{弓}=\frac{1}{2}S_{圆}$.

题276 圆内接正方形 $ABCD$ 的边长为2,弦 AK 平分边 BC,则 AK 的长为(　　).

A. $\frac{6}{5}\sqrt{5}$　　B. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$　　C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{5}$

解 设 BC 的中点为 E,则 $AB=2,BE=1$,

$\therefore AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{5}$.

$\because AE\cdot EK=BE\cdot EC$,$\therefore \sqrt{5}\cdot EK=1\times1, EK=\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

$\therefore AK=AE+EK=\frac{6}{5}\sqrt{5}$.

∴选择 A.

题277 正六边形的周长等于6,则它的面积等于(　　).

A. $9\sqrt{3}$　　B. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$　　C. $\frac{1}{4}\sqrt{3}$　　D. $3\sqrt{3}$

解 正六边形的边长为1,$r_6=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴面积为$6\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

∴选择 B.

题278 圆的两条半径把圆分成两个扇形,它们的面积的比是7:2,且较大扇形的面积等于 π,那么圆的半径 r 等于(　　).

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$　　B. $\frac{3}{7}\sqrt{7}$　　C. $\frac{3}{2}\sqrt{2}\pi$　　D. $\frac{3}{7}\sqrt{7}\pi$

解 扇形中心角的比为7:2,∴较大扇形的中心角 $n=280^\circ$,

∴扇形面积$\frac{280\cdot\pi\cdot r^2}{360}=\pi, r^2=\frac{9}{7}, r=\frac{3}{7}\sqrt{7}$.

∴选择 B.

题279 圆外切正方形和内接正方形的相似比是(　　).

A. 1∶2　　B. 2∶1

C. $\sqrt{2}$∶1　　D. 1∶$\sqrt{2}$

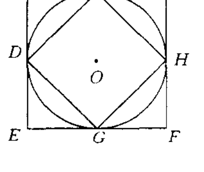


图 7 - 248

解　如图 7 - 248，$AC=\frac{1}{2}AB$，$\triangle ACD$ 为等腰直角三角形.

设 $CD=1$，则 $AC=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AB=\sqrt{2}$，

$\therefore AB:CD=\sqrt{2}:1$.

∴选择 C.

题280　正六边形两条对边相距12 cm，它的外接圆半径为(　　).

A. $4\sqrt{3}$ cm　B. $3\sqrt{3}$ cm　C. $2\sqrt{3}$ cm　D. $\sqrt{3}$ cm

解　∵正六边形两条对边相距12 cm，∴$r_6=6$ cm.

$$R_6=\frac{r_6}{\cos 30^\circ}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}\text{(cm)}.$$

∴选择 A.

题281　在半径为 R 的圆中，它的内接正三角形、内接正方形，内接正六边形的边长之比为(　　).

A. $1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$

C. 1∶2∶3　　D. 3∶2∶1

解　内接正三角形边长为$2R\cos 30^\circ=\sqrt{3}R$

内接正方形的边长为 $\sqrt{R^2+R^2}=\sqrt{2}R$；

内接正六边形的边长为 R.

∴选择 B.

题282　正三角形、正方形、圆的周长都等于1，它们的面积分别是 S_1、S_2、S_3，则下列式子成立的是(　　).

A. $S_1=S_2=S_3$　　B. $S_3<S_1<S_2$

C. $S_1<S_2<S_3$　　D. $S_2<S_1<S_3$

解　周长为1的正三角形边长为$\frac{1}{3}$，

则 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\frac{1}{3})^2=\frac{1}{36}\sqrt{3}\approx 0.048$.

周长为1的正方形的边长为$\frac{1}{4}$，则 $S_2=\frac{1}{16}\approx 0.063$.

周长为1的圆的半径为$\frac{1}{2\pi}$，则 $S_3=\pi(\frac{1}{2\pi})^2=\frac{1}{4\pi}\approx 0.080$.

∴选择 C.

题263　如图 7 - 249，扇形 $OACB$，$\angle AOB=90°$，P 与 OA、OB 都相切，并且与 $\overset{\frown}{AB}$ 切于 C 点，则扇形 $OACB$ 的面积与⊙P 面积的比为(　　).

A. $2:1$　　B. $\sqrt{2}:1$

C. $\sqrt{3}:1$　　D. $(3+2\sqrt{2}):4$

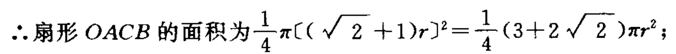
图 7 - 249

解　作 $PE\perp BO$ 于 E，$PF\perp OA$ 于 F，

设⊙P 的半径为 r. 则 $PE=PC=PF=r$，

∴$OP=\sqrt{2}r$，连结 OP 并延长必过 C 点，

∴$OC=(\sqrt{2}+1)r$，



∴扇形 $OACB$ 的面积为 $\frac{1}{4}\pi[(\sqrt{2}+1)r]^2=\frac{1}{4}(3+2\sqrt{2})\pi r^2$；

⊙P 的面积为 πr^2.

∴扇形 $OACB$ 的面积与⊙P 的面积的比为 $(3+2\sqrt{2}):4$.

∴选择 D.

题264　如图 7 - 250(1)、7 - 250(2)，正方形 $ABCD$、$A_1B_1C_1D_1$ 的边长都是 a，在正方形 $ABCD$ 中，以 B 为圆心，a 为半径作 $\overset{\frown}{AC}$，在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，分别以 A_1、B_1、C_1、D_1 为圆心，$\frac{a}{2}$ 为半径在形内作4条弧.

设两图中阴影部分周界长为 S_1，S_2，则 S_1 与 S_2 的关系是(　　).

A. $S_1>S_2$　　B. $S_1=S_2$

C. $S_1<S_2$　　D. S_1、S_2 的大小由 a 确定

解　在图7 - 250(1)中阴影部分的周界长为

$2a+\frac{1}{4}\times 2\pi a=2a+\frac{1}{2}a\pi\approx 3.57a$，

在图7 - 250(2)中阴影部分的周界长为

$4\times\frac{1}{4}\times 2\pi\times\frac{a}{2}=a\pi\approx 3.14a$，

∴选择 A.

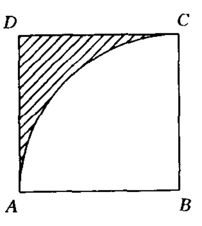


图 7 - 250(1)

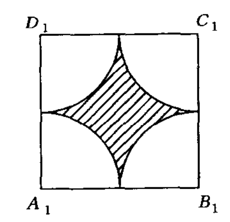


图 7 - 250(2)

题285 如图 7 - 251，正方形 $ABCD$ 的边长 a，以 A 为圆心，a 为半径作弧$\overset{\frown}{BD}$，在扇形 ABD 内作⊙O 与 AD、AB、$\overset{\frown}{BD}$都相切，则⊙O 的周长为(　　).

A. $\sqrt{2}\pi a$　　B. $(\sqrt{2}+1)\pi a$

C. $(\sqrt{2}-1)\pi a$　　D. $2(\sqrt{2}-1)\pi a$

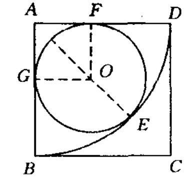


图 7 - 251

解　连结 AO 并延长交⊙A 于 E，则 E 为切点，作 $OF\perp AD$，$OG\perp AB$，

设⊙O 的半径为 r，则 $OF=OG=OE=r$，$AO=\sqrt{2}r$.

$\therefore AE=(\sqrt{2}+1)r$，即 $AB=(\sqrt{2}+1)r$，

$\therefore (\sqrt{2}+1)r=a$，$r=(\sqrt{2}-1)a$.

$\therefore$ ⊙O 的周长为$2(\sqrt{2}-1)\pi a$.

$\therefore$选择 D.

题286 内接于半圆 O 的正方形 $ABCD$ 的周长与半圆形周界长之比为(　　).

A. $\frac{8}{5}\sqrt{5}:\pi$　　B. $\frac{4}{5}\sqrt{5}:\pi$

C. $4\sqrt{5}:(5+\pi)$　　D. $8\sqrt{5}:(10+5\pi)$

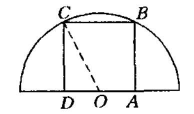


图 7 - 252

解　如图 7 - 252，设正方形的边长为$2a$，则圆半径 $OC=\sqrt{5}a$，正方形的周长为$8a$.

半圆形的周界长为

$2\sqrt{5}a+\frac{1}{2}\times 2\pi\cdot\sqrt{5}a=2\sqrt{5}a+\sqrt{5}\pi a$，

$\therefore 8a:(2\sqrt{5}a+\sqrt{5}\pi a)=8:\sqrt{5}(2+\pi)=8\sqrt{5}:(10+5\pi)$.

$\therefore$选择 D.

题287 若一圆与一正方形的面积相等，则(　　)

A. 它们的周长相等

B. 圆周长是正方形周长的 π 倍

C. 正方形周长长

D. 圆周长是正方形周长的$2\sqrt{\pi}$倍.

解　设圆与正方形的面积为 S.

则正方形的边长为 $\sqrt{S}$，周长为$4\sqrt{S}$，若圆半径为 r，$\pi r^2=S$，$r=\sqrt{\frac{S}{\pi}}$，周长为$2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}=2\sqrt{S\pi}$ $\therefore 4\sqrt{S}>2\sqrt{\pi S}$.

∴选择 C.

题288 如图 7 - 253,$AB=\sqrt{2}$ cm,弦高 CD 为$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ cm,则$\overset{\frown}{AC}$长为(　　).

A. $\dfrac{\pi}{4}$ cm　　B. $\dfrac{\pi}{8}$ cm　　C. $\dfrac{\pi}{2}$ cm　　D. $\dfrac{\pi}{16}$ cm

解 设$\overset{\frown}{AC}$所在圆的半径为 r,则

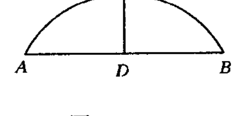


图 7 - 253

$r^2=(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+(r-\dfrac{2-\sqrt{2}}{2})^2, r=1$,

$r=1, AB=\sqrt{2}$ cm,则$\overset{\frown}{ACB}=90°$,

$\overset{\frown}{AC}$为45°.

∴$\overset{\frown}{AC}$的长为$\dfrac{1}{8}\times 2\pi\times 1=\dfrac{\pi}{4}$ cm.

∴选择 A.

题289 如图 7 - 254,若 $AB=1$ cm,$S_{\triangle OAB}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm²,则$\overset{\frown}{AB}$长为　　(　　).

A. $\dfrac{\pi}{3}$ cm　　B. $\dfrac{2\pi}{3}$ cm

C. $\dfrac{\pi}{6}$ cm　　D. $\dfrac{\pi}{2}$ cm

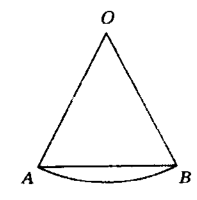
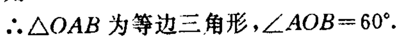


图 7 - 254

解 设△OAB 中 AB 边上的高为 h,则

$\dfrac{1}{2}\times 1\times h=\dfrac{\sqrt{3}}{4}, h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

则 $OA=1$,



∴△OAB 为等边三角形,$\angle AOB=60°$.

∴$\overset{\frown}{AB}$长为$\dfrac{2\pi\times 1}{6}=\dfrac{\pi}{3}$ cm.

∴选择 A.

题290 已知:如图 7 - 255,在△ABC 中,$AB=AC$,$\angle B=2\angle A$,D、E、F 为各边中点,⊙O 过 D、E、F 与 AB、AC 分别交于 M、N 两点.

求证:五边形 $DNEFM$ 是正五边形.

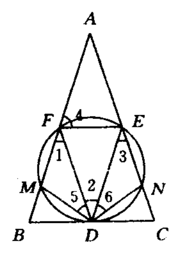


图 7 - 255

证明 连结 DE、DF,

∵$AB=AC$,$\angle B=2\angle A$,

∴$\angle A=36°$,$\angle B=\angle C=72°$.

∵D、E、F 是△ABC 各边中点.

∴$FE/\!/BC$,$DE/\!/AB$,$DF/\!/AC$,

∴$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle A=36°$,

$\angle B=\angle 4=\angle 2+\angle 5=72°$.

$\therefore \angle 5=72°-\angle 2=72°-36°=36°$.

同理$\angle 6=36°$.

$\therefore \overset{\frown}{DN}=\overset{\frown}{NE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FM}=\overset{\frown}{MD}=72°$.

$\therefore$五边形 $DNEFM$ 是正五边形.

题291 已知:如图 7 - 256,$\odot O_1$与$\odot O_2$外切,$\odot O_1$半径为6 cm,$\odot O_2$半径为2 cm,AB 与 CD 为两圆的外公切线,$\overset{\frown}{AmC}=l_1$,$\overset{\frown}{BnD}=l_2$.

求:$l_1+l_2+AB+CD$ 的长(精确到0.1).

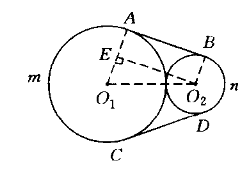


图 7 - 256

解 连结 O_1O_2、O_1A、O_2B,

作 $O_2E\perp AO_1$于 E.

$\because AB$ 为$\odot O_1$、$\odot O_2$的外公切线,

$\therefore O_1A\perp AB, O_2B\perp AB, O_2E\perp AO_1$,

$\therefore AEO_2B$ 是矩形,$\therefore AB=O_2E, AE=O_2B$,

在 $\text{Rt}\triangle O_1O_2E$ 中,$EO_1=R-r=4$,

$\therefore AB=O_2E=\sqrt{O_1O_2^2-O_1E^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

$\because \sin EO_1O_2=\dfrac{EO_2}{O_1O_2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{8}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \angle EO_1O_2=60°$.

$\therefore l_1$的度数为$360°-2\times 60°=240°$,l_2的度数为$120°$,

$\therefore l_1=\dfrac{240\pi\times 6}{180}=8\pi$, $l_2=\dfrac{120\pi\times 2}{180}=\dfrac{4}{3}\pi$.

$\therefore l_1+l_2+AB+CD=8\pi+\dfrac{4}{3}\pi+2\times 4\sqrt{3}\approx 43.2$ cm.

题292 已知:如图 7 - 257,扇形 $OAPB$ 的半径为2,$\angle AOB=90°$,以 OB 中点 M 为圆心,OM 为半径画圆,$MP/\!/OA$ 交圆于 N 点,交$\overset{\frown}{AB}$于 P 点.

求:阴影部分的面积.

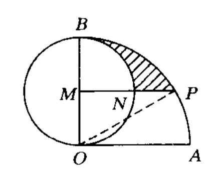


图 7 - 257

解 连结 OP.

$\because MP/\!/OA, \angle AOB=90°$,

$\therefore \angle PMO=90°$.

$\because OM=\dfrac{1}{2}OB=\dfrac{1}{2}OP$,

$\therefore \angle OPM=30°, \angle POM=60°$,

$$S_{阴影}=S_{扇形BOP}-S_{\triangle MOP}-S_{扇形BMN}$$

$$=\frac{4}{6}\pi-\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

∴阴影部分面积为$(\frac{5\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2})$平方单位.

题293 已知:如图 7 - 258,在半圆 O 内作一个最大的内切$\odot O_1$,再作$\odot O_2$,使$\odot O_1$与$\odot O_2$外切与半圆内切,并与半圆的直径相切于 A 点.

求:$\cos OO_1O_2$的值.

解 作 $O_2M\perp OO_1$于 M,连结 OO_2.

设 $\odot O$ 半径为 R,$\odot O_2$半径为 r,

则$\odot O_1$的半径为$\frac{R}{2}$,$OO_2=R-r$

在 $\text{Rt}\triangle OO_2M$ 中,

$O_2M^2=OO_2{}^2-OM^2=(R-r)^2-r^2=R^2-2Rr.$

在 $\text{Rt}\triangle O_1O_2M$ 中,

$O_2M^2=O_1O_2-O_1M^2=(\frac{R}{2}+r)^2-(\frac{R}{2}-r)^2=2Rr.$

$\therefore R^2-2Rr=2Rr, R\neq0, \therefore r=\frac{R}{4}.$

$$\therefore \cos OO_1O_2=\frac{O_1M}{O_1O_2}=\frac{\frac{R}{2}-\frac{R}{4}}{\frac{R}{2}+\frac{R}{4}}=\frac{2R-R}{2R+R}=\frac{1}{3}.$$

图 7 - 258

题294 已知:如图 7 - 259,在正方形 $ABCD$ 中,以 B 为圆心,AB 为半径作$\overset{\frown}{AB}$交对角线 BD 于 E.

求证:DE 等于扇形 BAC 的内切圆的半径.

证明 设扇形 BAC 的内切圆圆心为 O,

作 $OF\perp BC$,$OG\perp AB$,则 OE、OF、OG 均为$\odot O$ 的半径,设 $OE=x$.

$\because OGBF$ 为正方形,$\therefore OB=\sqrt{2}x$,

$BE=\sqrt{2}x+x=AB$,$\therefore x=(\sqrt{2}-1)AB$,

而 $DE=(\sqrt{2}-1)AB$,

$\therefore DE$ 等于扇形 BAC 的内切圆的半径.

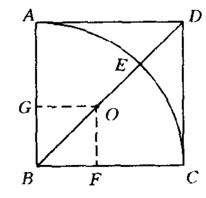


图 7 - 259

题295 已知:如图 7 - 260,正方形 $ABCD$ 边长为 a,截去四个角成一正八边形.

求:八边形 $EFGHIJKL$ 的边长.

解 设正八边形边长为 b.

在$\triangle AEL$ 中,$LE=b$,$AL=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}b$,

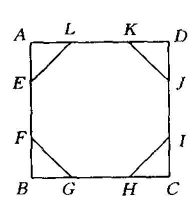


图 7 - 260

$\therefore 2\times\frac{\sqrt{2}}{2}b+b=a, b=(\sqrt{2}-1)a$,

$\therefore EFGHIJKL$ 的边长为$(\sqrt{2}-1)a$.

题236 求证:圆的内接正六边形的面积为同圆的内接正三角形的面积和外切正三角形面积的比例中项.

已知:如图 7-261,⊙O 的内接正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 S,⊙O 的内接正三角形 ACE 的面积为 S_1,⊙O 的外切正三角形 GHK 的面积为 S_2.

求证:$S^2=S_1\cdot S_2$.

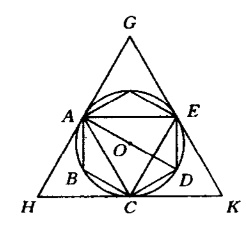


图 7-261

证明 设⊙O 的半径为 R,则

$S=6\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot R=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$,

$\because AE=\sqrt{3}R$,

AE 边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}R=\frac{3}{2}R$.

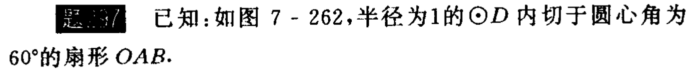
$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}R\times\frac{3}{2}R=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

$\because CH=CK=\sqrt{3}R, \therefore HK=2\sqrt{3}R$,

HK 边上的高为$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{3}R=3R$.

$\therefore S_2=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}R\times 3R=3\sqrt{3}R^2$.

$\therefore S^2=S_1\cdot S_2$.



题237 已知:如图 7-262,半径为1的⊙D 内切于圆心角为



60°的扇形 OAB.

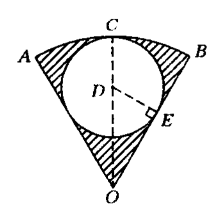


图 7-262

求:(1) $\overset{\frown}{AB}$的长;

(2) 阴影部分的面积.

解(1)作 $DE\perp BO$ 垂足为 E,

在△ODE 中,$DE=1$,$\angle DOE=30°$,

$\therefore OD=2, \therefore OC=3$,

$\overset{\frown}{AB}=\frac{n\pi R}{180}=\frac{60\times 3}{180}\pi=\pi$.

(2)$S_{扇形OAB}=\frac{n\pi R^2}{360}=\frac{60\pi\times 3^2}{360}=\frac{3}{2}\pi$.

$S_{圆D}=\pi R^2=\pi$. $\therefore S_{阴影}=\frac{1}{2}\pi$.

题238 已知:如图 7-263,AB 是⊙O 的直径,$AB=20$ cm,$\angle DAB=30°$,$\angle ABC=$

90°,求下列各值.

(1) 扇形 BOD 的面积;

(2) CD 的长;

(3) $\triangle BCD$ 的面积;

(4) 阴影部分的面积.

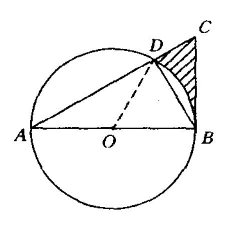


图 7 - 263

解 (1)连结 OD,则由$\angle A=30°$,可知$\angle DOB=60°$,

$\therefore S_{扇形OBD}=\dfrac{n\pi R^2}{360}=\dfrac{60\pi\cdot 10^2}{360}=\dfrac{50}{3}\pi\ \text{cm}^2$.

(2)$\because \triangle ABC$ 中,$\angle ABC=90°$,$BD\perp AC$,

$\therefore AD=10\sqrt{3}$,$AB^2=AD\cdot AC$.

$\therefore 20^2=10\sqrt{3}\cdot AC$,$\therefore AC=\dfrac{40\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore DC=AC-AD=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}$.

(3)$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times BD\times DC=\dfrac{1}{2}\times 10\times\dfrac{10\sqrt{3}}{3}=\dfrac{50\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^2$.

(4)$S_{阴影}=S_{\triangle BDC}+S_{\triangle BDO}-S_{扇形OBD}$

$$=\frac{50\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times 10\times\frac{10\sqrt{3}}{2}-\frac{50}{3}\pi.$$

$$=\frac{125}{3}\sqrt{3}-\frac{50}{3}\pi.$$

题299 已知:如图 7 - 264,半径为10的圆上有一弓形,弓形的弧所对的圆周角为120°.

求:弓形的面积.

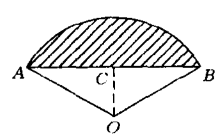


图 7 - 264

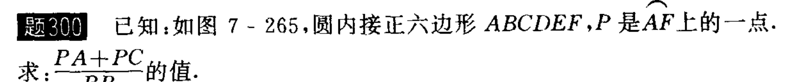
解 $S_{扇形OAB}=\dfrac{120\cdot\pi\cdot 10^2}{360}=\dfrac{100}{3}\pi$.

在$\triangle OAB$ 中,$OA=10$,$CO=5$,$AC=5\sqrt{3}$,

$AB=10\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times 10\sqrt{3}\times 5=25\sqrt{3}$,

$\therefore S_{弓形}=\dfrac{100}{3}\pi-25\sqrt{3}$.


题300 已知:如图 7 - 265,圆内接正六边形 $ABCDEF$,P 是$\overset{\frown}{AF}$上的一点.

求:$\dfrac{PA+PC}{PB}$的值.

解 $\because ABCDEF$ 是圆内接正六边形,

$\therefore AB=BC$,$\angle APB=\angle BPC=30°$,

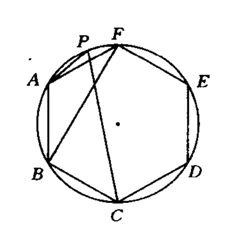


图 7 - 265

在$\triangle APB$中，由余弦定理，得

$AB^2=PA^2+PB^2-2PA\cdot PB\cdot\cos30°$

$\quad=PA^2+PB^2-\sqrt{3}PA\cdot PB$,

同理，在$\triangle BPC$中得

$BC^2=PB^2+PC^2-\sqrt{3}PB\cdot PC$.

$\because AB=BC$,

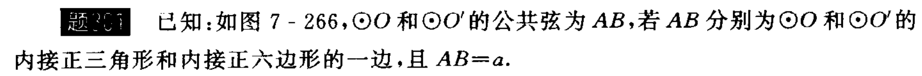
$\therefore PA^2+PB^2-\sqrt{3}PA\cdot PB=PB^2+PC^2-\sqrt{3}PB\cdot PC$,

即 $PA^2-PC^2=\sqrt{3}PB(PA-PC)$,

$(PA-PC)(PA+PC-\sqrt{3}PB)=0$,

$\because PA\neq PC$, $\therefore PA+PC=\sqrt{3}PB$,

$\therefore \dfrac{PA+PC}{PB}=\sqrt{3}$.


题201 已知：如图 7 - 266，$\odot O$和$\odot O'$的公共弦为AB，若AB分别为$\odot O$和$\odot O'$的内接正三角形和内接正六边形的一边，且$AB=a$.

求：两圆公共部分的面积.

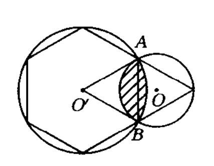


图 7 - 266

解 $\because \angle AO'B=60°$，$\angle AOB=120°$，

$O'A=AB=a$，$OA=\dfrac{\frac{1}{2}AB}{\cos30°}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$,

$\therefore S_{扇形OAB}-S_{\triangle OAB}$

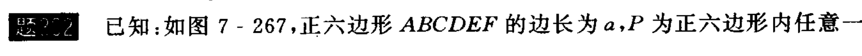
$=\dfrac{120}{360}(\dfrac{a}{\sqrt{3}})^2\pi-\dfrac{1}{2}(\dfrac{a}{\sqrt{3}})^2\sin120°$

$=\dfrac{\pi}{9}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2$,

$\therefore S_{扇形O'AB}-S_{\triangle O'AB}$

$=\dfrac{60}{360}a^2\pi-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cdot a=\dfrac{\pi}{6}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

$\therefore$阴影部分面积为$\dfrac{\pi}{9}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2+\dfrac{\pi}{6}a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{5}{18}\pi a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{3}a^2$.


题202 已知：如图 7 - 267，正六边形$ABCDEF$的边长为a，P为正六边形内任意一点.

求：P到各边距离的和.

解 依次连结PA、PB、PC、PD、PE、PF.

设点P到正六边形各边的距离依次为h_1、h_2、h_3、h_4、h_5、h_6,

则正六边形的面积

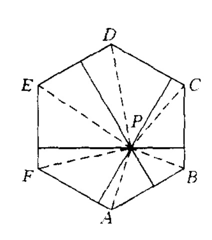


图 7 - 267

$S=6\times\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$，

正六边形的面积又可表示为

$S=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCD}+S_{\triangle PDE}+S_{\triangle PEF}+S_{\triangle PFA}$

$=\frac{1}{2}a(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6)$，

$\therefore \frac{1}{2}a(h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6)=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$，

$\therefore h_1+h_2+h_3+h_4+h_5+h_6=3\sqrt{3}a$.

即 P 到各边距离的和为 $3\sqrt{3}a$.

题303 若两个边数不同的正多边形的内角之比等于其边数之比，则这两个正多边形的边数为六与三.

证明 设这两个正多边形的边数分别为 m、n，则其内角大小分别为 $\frac{1}{m}(m-2)\cdot180°$，$\frac{1}{n}(n-2)\cdot180°$，

则 $\frac{1}{m}(m-2)\cdot180°:\frac{1}{n}(n-2)\cdot180°=m:n$，

$\therefore \frac{m-2}{m}:\frac{n-2}{n}=m:n$，$\therefore n(m-2):m(n-2)=m:n$，

$\therefore nm(n-m)=2(n-m)(n+m)$，

$\because n\neq m$，$\therefore nm=2(n+m)$，即 $m=\frac{2n}{n-2}=2+\frac{4}{n-2}$，

$\because m$、n 都是多边形的边数，$\therefore m\geqslant3$，$n\geqslant3$，且 m、n 都是正整数.

$\therefore \frac{4}{n-2}\geqslant1$，$n\leqslant6$，$\therefore n=3,4,5,6$.

但当 $n=4$ 时，$m=4$，不合题意，$n=5$ 时，$m=3\frac{1}{3}$ 不合题意，

$\therefore n=3$，$m=6$ 或 $n=6$，$m=3$.

这两个正多边形是正三角形与正六边形.

题304 已知：如图 7 - 268，设正七边形 $ABCDEFG$ 的边长为 a，对角线中较长的长度为 x，较短的长度为 y.

求证：$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$.

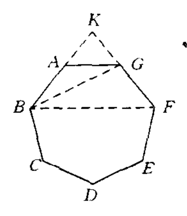


图 7 - 268

证明 连接 BG、BF，则 $BF=x$，$BG=y$，延长 BA、FG 交于 K.

$\because \angle AGB=\angle GBF=\frac{1}{2}\times\frac{360°}{7}=\frac{180°}{7}$，

$\therefore AG/\!/BF$，四边形 $ABFG$ 是等腰梯形，$\triangle KAG$ 是等腰三角形.

$\frac{KA}{KB}=\frac{AG}{BF}=\frac{a}{x}$，

$\because \angle KAG=\angle KGA=\dfrac{360^\circ}{7}$

$\therefore \angle BKG=180^\circ-2\angle KGA=180^\circ-2\times\dfrac{360^\circ}{7}=\dfrac{540^\circ}{7}$,

$\angle BGK=\dfrac{360^\circ}{7}+\dfrac{180^\circ}{7}=\dfrac{540^\circ}{7}$,

$\therefore KB=BG$,

$\therefore \dfrac{a}{y}=\dfrac{AG}{BG}=\dfrac{AB}{KB}$.

$\therefore \dfrac{a}{x}+\dfrac{a}{y}=\dfrac{KA+AB}{KB}=\dfrac{KB}{KB}=1$, $\therefore \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}$.

题305 已知:如图 7 - 269,$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O_3$、$\odot O_4$两两相切,$\odot O_1$的半径为 R.

求:阴影部分的面积.

解 连结 O_1O_3,O_2O_3,

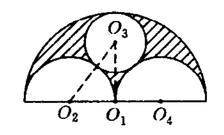


图 7 - 269

$\because \odot O_1$的半径为 R,则$\odot O_2$、$\odot O_4$的半径为$\dfrac{R}{2}$,

$\therefore \odot O_1$面积的一半 $S_1=\dfrac{1}{2}\pi R^2$,

$\odot O_2$、$\odot O_4$面积的一半

$S_2=2\times\dfrac{1}{2}\pi(\dfrac{R}{2})^2=\dfrac{1}{4}\pi R^2$.

设$\odot O_3$的半径为 x,由 $O_2O_3^2=O_1O_2{}^2+O_1O_3{}^2$,得

$(x+\dfrac{R}{2})^2=(\dfrac{R}{2})^2+(R-x)^2$,

$\therefore 3Rx=R^2$,$R\neq 0$,$\therefore x=\dfrac{R}{3}$,

$\therefore \odot O_3$的面积,$S_3=\pi(\dfrac{R}{3})^2=\dfrac{1}{9}\pi R^2$,

$\therefore$阴影部分面积

$S=S_1-S_2-S_3=\dfrac{1}{2}\pi R^2-\dfrac{1}{4}\pi R^2-\dfrac{1}{9}\pi R^2=\dfrac{5}{36}\pi R^2$.

题306 已知:如图 7 - 270,$ABCD$ 是正方形,它的边长为1,在正方形内$\odot O$ 与$\odot O_1$外切,$\odot O$ 与 AB、AD 相切,$\odot O_1$与 CB、CD 相切.

求:(1)这两圆半径之和;

(2)两圆半径各是多少时,两圆面积之和最大;

(3)两圆半径是多少时,两圆面积之和最小.

解 (1)设两圆半径之和 OO_1 为 x,则

$x^2=(1-x)^2+(1-x)^2$,

解得 $x=2\pm\sqrt{2}$.但 $x=2+\sqrt{2}>\sqrt{2}$ 不合题意,舍去.

$\therefore$两圆半径之和为$2-\sqrt{2}$.

(2)设两圆面积之和为 S,圆半径分别为 R、r.

$\because R+r=2-\sqrt{2}$,$\therefore r=2-\sqrt{2}-R$.

$$S=\pi(R^2+r^2)$$
$$=\pi[R^2+(2-\sqrt{2}-R)^2]$$
$$=2\pi[R^2-(2-\sqrt{2}R)+(3-2\sqrt{2})]$$
$$=2\pi[(R-\frac{2-\sqrt{2})}{2})^2+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}],$$

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}\leqslant R\leqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore$当 $R=\frac{1}{2}$,$r=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ 时,两圆面积之和最大.

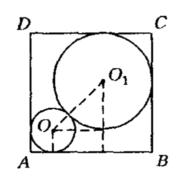


图 7 - 270

(3)由上可知,当 $R=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$,$r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ 时,两圆面积之和最小.

题307 已知:如图 7 - 271,⊙O 的半径为 R,求它的内接正△ABC 的内切圆的内接正方形 $DEFG$ 的周长.

解 连结 OB、OD,

在 Rt△OBD 中,$OB=R$,$\angle OBD=30°$,

$\therefore OD=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}R$.

作 $OM\perp DE$ 交 DE 于 M,在 Rt△ODM 中,

$\because\angle DOM=45°$,

$\therefore DM=OD\sin45°=\frac{1}{2}R\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}R$.

$\therefore DE=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.

$\therefore$正方形 $DEFG$ 的周长$=\frac{\sqrt{2}}{2}R\times4=2\sqrt{2}R$.

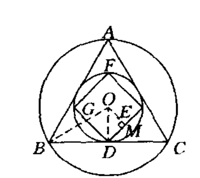


图 7 - 271

题308 已知:如图 7 - 272,正六边形 $ABCDEF$ 的边长为1,延长 AB、BC、CD、DE、EF、FA 至 G、H、I、J、K、L,且

$$\frac{AG}{AB}=\frac{BH}{BC}=\frac{CI}{CD}=\frac{DJ}{DE}=\frac{EK}{EF}=\frac{FL}{FA}=t(t>1),$$

且六边形 $GHIJKL$ 的面积为正六边形 $ABCDEF$ 面积的7倍,求 t 的值.

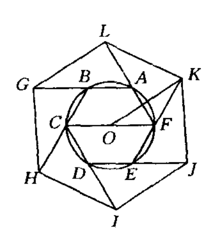


图 7 - 272

解 $\because\frac{AG}{AB}=\frac{EK}{EF}=t$,$\therefore EK=t\cdot EF=t$.

$\therefore FK=t-1$,则

$OK^2=1+(t-1)^2+2(t-1)\cos60°$,

即 $OK^2=t^2-t+1$.

根据题意,得$7\times6\times\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(t^2-t+1)\times6,$$

整理,得 $t^2-t-6=0$,

$\therefore t_1=3, t_2=-2$(不合题意,舍去),$\therefore t$ 的值为3.

题309 已知:如图 7-273,矩形 $ABCD$,$AB=2AD=2r$,以 AB 为直径作半圆与 CD 相切,对角线 AC、BD 分别与半圆相交于 E、F 点,过 E、F 点作 AB 的垂线,垂足为 H、G.

求:四边形 $EFGH$ 的面积.

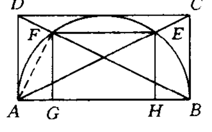


图 7-273

解 连结 AF.

$\because AB$ 是直径,$\therefore \angle AFB=90°$,

$\therefore \triangle ABF\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAF$.

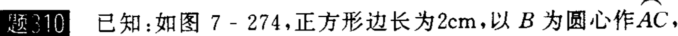
$\therefore \frac{2r}{\sqrt{5}r}=\frac{AF}{r}=\frac{BF}{2r}$. $\therefore AF=\frac{2r}{\sqrt{5}}$,$BF=\frac{4r}{\sqrt{5}}$.

又$\because AB\cdot GF=AF\cdot BF$,$\therefore GF=\frac{4r}{5}$.

$\because FG\perp AB$,$\therefore \triangle AGF$ 是 Rt$\triangle$,则

$\sqrt{AF^2-FG^2}=AG=\frac{2r}{5}$,$\therefore GH=2r-\frac{4r}{5}=\frac{6r}{5}$.

$\therefore S_{FGHE}=GF\cdot GH=\frac{4r\cdot6r}{5\times5}=\frac{24}{25}r^2$.



题310 已知:如图 7-274,正方形边长为2cm,以 B 为圆心作$\overset{\frown}{AC}$,



P 是$\overset{\frown}{AC}$上一点,$PE\perp DC$,$DE=EC$.

求:$\overset{\frown}{AP}$的长.

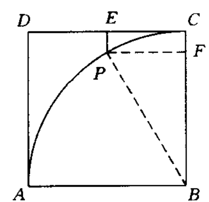


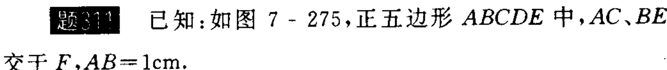
图 7-274

解 连结 BP,作 $PF\perp BC$ 于 F.

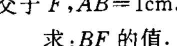
则 $PF=EC=\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}PB$,

$\therefore \angle PBF=30°$,$\therefore \angle PBA=60°$.

$\therefore \overset{\frown}{AP}$长为$\frac{60}{360}\cdot2\pi\times2=\frac{2}{3}\pi$(cm).



题311 已知:如图 7-275,正五边形 $ABCDE$ 中,AC、BE 交于 F,$AB=1$cm.



求:BF 的值.

解 连结 AD 交 BE 于 G.

$\because ABCDE$ 是正五边形,根据外接圆上

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AE}=72°$,

可得对应的圆周角

$\angle ABG=\angle BAF=\angle CAG=36°$,

$\therefore \angle AFG=72°, \angle AGB=72°$,

$\therefore \triangle BAG$、$\triangle AFG$ 都是等腰三角形,

且 $\triangle BAG \backsim \triangle AFG$.

设 $BF=x$,则 $AF=AG=x$.

$\because \frac{AB}{AG}=\frac{AG}{FG}, \therefore \frac{1}{x}=\frac{x}{FG}, FG=x^2$.

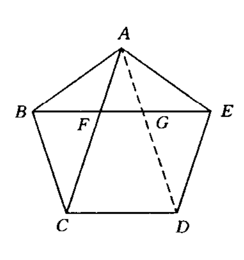


图 7 - 275

$\because BG=BF+FG, \therefore 1=x+x^2, x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$(舍去负值),

$\therefore x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,即 $BF=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$(cm).

题312 已知:如图 7 - 276,一个小正六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 内接于一个边长为1的大正六边形 $ABCDEF$,小正六边形的顶点 A'、B'、C'、D'、E'、F' 顺次分大正六边形各边 AB、BC、CD、DE、EF、FA 成 $m:n$.

(1) 求小正六边形的面积 $S_{小}$;

(2) 求证:$4S_{小}\geqslant 3S_{大}$($S_{大}$ 表示大正六边形的面积).

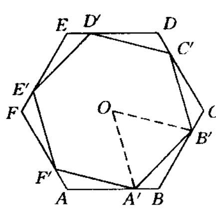


图 7 - 276

解 (1)设 $A'B=nx, BB'=mx$.

则 $mx+nx=1, \therefore x=\frac{1}{m+n}$.

$\therefore A'B=\frac{n}{m+n}, BB'=\frac{m}{m+n}$,

又 $\angle A'BB'=120°$.

在 $\triangle A'BB'$ 中,由余弦定理,得

$$A'B'^2=A'B^2+BB'^2-2A'B\cdot BB'\cdot\cos120°$$

$$=(\frac{n}{m+n})^2+(\frac{m}{m+n})^2+\frac{mn}{(m+n)^2}=\frac{m^2+mn+n^2}{(m+n)^2},$$

又 $S_{\triangle OA'B'}=\frac{1}{2}OA'\cdot OB'\cdot\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{4}A'B'^2$,

$$\therefore S_{小}=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{m^2+n^2+mn}{(m+n)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{(m+n)^2}.$$

(2) $\because AB=1, \therefore S_{大}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$$\therefore 4S_{小}-3S_{大}=4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{m^2+mn+n^2}{(m+n)^2}-3\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}(m^2+n^2-2mn)}{2(m+n)^2}=\frac{3\sqrt{3}(m-n)^2}{2(m+n)^2}\geqslant 0,$$

$\therefore 4S_{小} \geqslant 3S_{大}$.

题313 已知：如图7-277，AD、BC 是$\odot O_1$的两条弦，且 $AD /\!/ BC$，以 DC 为直径的$\odot O_2$交 BC 于点 E，$AB=6\text{cm}$，$BC=14\text{cm}$，$S_{\triangle BCD}=21\sqrt{3}\text{ cm}^2$. 求：(1) EC 的长；(2) 弓形 EmC（阴影部分）的面积.

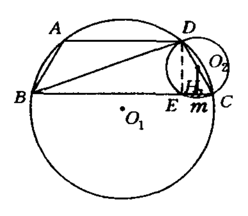


图 7-277

解 (1)连结 DE.

$\because DC$ 是$\odot O_2$的直径，

$\therefore \angle DEC=90°$，$DE \perp BC$.

$\therefore S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BC \cdot DE$，

即$\dfrac{1}{2}\times 14DE=21\sqrt{3}$，解得 $DE=3\sqrt{3}$(cm).

$\because$弦 $AD /\!/ BC$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{DC}$，$\therefore AB=DC=6\text{cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle CED$ 中，由勾股定理，得

$EC=\sqrt{DC^2-DE^2}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{3})^2}=3(\text{cm})$.

(2)连结 O_2E.

$\because EC=O_2C=O_2E=3\text{cm}$，$\therefore \triangle O_2EC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ECO_2=\angle CO_2E=60°$.

作 $O_2H \perp EC$，垂足为 H.

在 $\text{Rt}\triangle O_2HC$ 中，

$O_2H=O_2C\sin O_2CH=3\sin 60°=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}(\text{cm})$.

$\because S_{弓形EmC}=S_{扇形O_2EmC}-S_{\triangle O_2EC}$，

$S_{扇形O_2EmC}=\dfrac{60\pi}{360}\times 3^2=\dfrac{3}{2}\pi(\text{cm}^2)$，

$S_{\triangle O_2EC}=\dfrac{1}{2}EC\cdot O_2H=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

$\therefore S_{弓形EmC}=\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}(\text{cm}^2)$.

题314 已知：图7-278是一根圆木的断面图，圆的直径是1m，要把它锯成三根方木，使它们的横断面是相等的正方形.

求：正方形的边长.

解 设正方形的一边长为$2x$cm，

则 $CD=2x\text{cm}$，$AF=x\text{cm}$.

连结 AO、CO，$\triangle CDO$、$\triangle OFA$ 是直角三角形，

$\therefore DO^2=OC^2-CD^2$，即 $DO=\sqrt{50^2-4x^2}$.

$\because OF=DF-DO=4x-\sqrt{50^2-4x^2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OFA$ 中，$AO^2=OF^2+AF^2$，

$\therefore 50^2=x^2+[4x-\sqrt{50^2-4x^2}]^2$.

$\therefore 8x\sqrt{50^2-4x^2}=13x^2$，

$\because x>0$，$\therefore 8\sqrt{50^2-4x^2}=13x$.

$\therefore x=\dfrac{80\sqrt{17}}{17}$，$2x=\dfrac{160\sqrt{17}}{17}$.

$\therefore$ 正方形边长为 $\dfrac{160\sqrt{17}}{17}$cm.

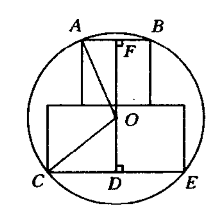


图 7 - 278

题318 已知：如图 7 - 279，有一块矩形的铁板，长为50cm，宽为30cm，先在与短边相切的位置上切割出一个尽可能大的圆板，再在剩余的部分上切割出一个最大的圆板，求第二块圆板的半径.

解 设第二块圆板的半径为 $x$cm.

作 $OB\perp BC$，$O'C\perp BC$，连结 OO'，$O'A\perp OB$，

则 $\triangle O'OA$ 为直角三角形，且 $OO'=x+15$，

$AO'=BC=50-15-x$，

$AO=BO-AB=BO-O'C=15-x$.

$\therefore (15+x)^2=(15-x)^2+(50-15-x)^2$，

化简，得 $x^2-130x+35^2=0$，

$\therefore x=65\pm10\sqrt{30}$，

$\because x<15$，$\therefore x=65-10\sqrt{30}$，

即第二块圆板的半径为 $(65-10\sqrt{30})$cm.

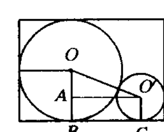


图 7 - 279

题319 已知：如图 7 - 280，正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 36cm^2，求连结它各边中点所成的正六边形的面积.

解 设原正六边形的一边为 a，面积为 S，则

$S=6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

$\therefore 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=36$，$a^2=\dfrac{24}{\sqrt{3}}$.

设所求正六边形的面积为 S'，一边 MN 为 x，则

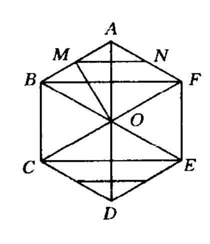


图 7 - 280

$S'=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$.

连结 AB、AF 的中点 M、N，因为$\triangle AOB$ 是正三角形，$\therefore AB=a$.

$\therefore OM=\frac{\sqrt{3}}{2}a, MN=OM$,

$\therefore x=MN=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\therefore S'=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{4}a^2=\frac{9}{8}\sqrt{3}a^2=\frac{9}{8}\sqrt{3}\times\frac{24}{\sqrt{3}}=27(\text{cm}^2)$.

题317 已知正三角形的面积为20cm²，它的一边长和正六边形的一边长之比为5∶2，求:正六边形的面积.

解 设正三角形的一边长为 a，则它的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=20$.

设正六边形一边长为 b，则 $a:b=5:2$，$a=\frac{5}{2}b$.

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{5}{2}b)^2=20$.

正六边形的面积为$6\times\frac{\sqrt{3}}{4}b^2=\frac{96}{5}=19.2(\text{cm}^2)$.

题318 已知:如图 7 - 281，正六边形 $ABCDEF$ 的一边长等于 a，在这个正六边形的顶点中，每隔一顶点连结一线段，由这六条线段的交点作成第二个正六边形，再把这个正六边形每隔一顶点连结一线段，又由这六条线段的交点作成第三个正六边形.如此依次作下去.

求:原来的正六边形的面积与所有这些正六边形的面积的总和.

解 设正六边形 $ABCDEF$ 的外心为 O，则 OAB 是一边为 a 的正三角形.它的面积是$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

设正六边形的面积为 S，则

$S=6S_{\triangle OAB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$.

设第二个正六边形为 $A'B'C'D'E'F'$，

AO 与 $A'F'$的交点为 H，则

$AH=\frac{1}{2}AO=\frac{1}{2}a, A'F':AH=2:\sqrt{3}$,

$\therefore A'F'=\frac{2}{\sqrt{3}}AH=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}a=\frac{1}{\sqrt{3}}a$.

设正六边形 $A'B'C'D'E'F'$的面积为 S_1，则

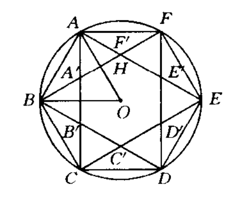


图 7 - 281

$S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}(A'F')^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{a^2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$

$\therefore S_1=\frac{1}{3}S.$

设第三、第四个正六边形的面积为 S_2、S_3，则

$S_2=\frac{1}{3}S_1=\frac{1}{3^2}S, S_3=\frac{1}{3}S_2=\frac{1}{3^2}S_1=\frac{1}{3^3}S.$

设所求面积的总和为 P，则

$$\begin{aligned}P&=S+S_1+S_2+S_3+\cdots\\&=S+\frac{1}{3}S+\frac{1}{3^2}S+\frac{1}{3^3}S+\cdots\\&=S(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots)\\&=S(\frac{1}{1-\frac{1}{3}})=\frac{3}{2}S.\end{aligned}$$

而 $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$，$\therefore P=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2\cdot\frac{3}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}a^2.$

题319 求证：如果直圆柱的侧面积等于两底面积的和，那么它的高与底面半径相等.

证明 如图7 - 282所示，设直圆柱的高为 h，底面半径为 r，则侧面面积是$2\pi rh$，两底面积的和为$2\pi r^2$，

$\therefore 2\pi rh=2\pi r^2$，$\therefore r=h.$

图 7 - 282

题320 用一张长为 a，宽为 b 的纸，作一圆柱的侧面，用两种不同的方法作成两个不同的圆柱，求这两个圆柱的表面积.

解 设以 b 为高，围成一个圆柱，圆柱的底面半径为 r_1，表面积为 S_1，则

$2\pi r_1=a, r_1=\frac{a}{2\pi}$，

$\therefore S_1=ab+2\pi r_1^2=ab+\frac{a^2}{2\pi}.$

设以 a 为高，围成一个圆柱，圆柱的底面半径为 r_2，表面积为 S_2，则

$2\pi r_2=b, r_2=\frac{b}{2\pi}$，

$\therefore S_2=ab+2\pi r_2^2=ab+\frac{b^2}{2\pi}.$

题321 直圆锥的底面半径为 r，斜高为 l，则全面积可用 $\pi r(l+r)$表示.

解 根据直圆锥的展开图，可知它的侧面积为：

$\pi l^2\times\frac{2\pi r}{2\pi l}=\pi lr.$

又底面积为 πr^2，

$\therefore$ 全面积为 $\pi lr+\pi r^2=\pi r(l+r)$.

题 22 如果直圆锥的高等于底面的直径，求它的底面积与侧面积的比.

解 如图 7 - 283，设直圆锥的底面积为 F，侧面积为 S，底面半径为 r，则高为 $2r$，

则 $F=\pi r^2$，

斜高 $l=\sqrt{5}\,r$，

$S=\pi lr=\pi(\sqrt{5}\,r)r=\sqrt{5}\,\pi r^2$.

$\therefore \dfrac{F}{S}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

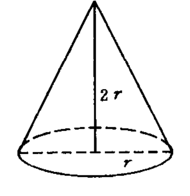


图 7 - 283

题 23 从半径为12cm 的马口铁的圆板上截下一个中心角为120°的扇形，用它做成漏斗，求：这个漏斗的高.

解 $\because$ 漏斗底面的周长与扇形的弧长相等，设弧长为 $l$cm，则

$l=2\pi\times 12\times\dfrac{120}{360}=8\pi$.

设漏斗的底面半径为 $r$cm，则 $r=\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$.

$\because$ 漏斗的母线长为12cm，底面半径为4cm，则高为

$h=\sqrt{12^2-4^2}=8\sqrt{2}$ cm.

第三部分　综合篇

题1　已知：如图 1 - 1，Rt△AOC 中，直角边 OA 在 x 轴负半轴上，OC 在 y 轴正半轴上，点 F 在 AO 上，以 F 为圆心的圆与 y 轴、AC 边相切，切点分别为 O、D，⊙F 与 x 轴的另一个交点为 E. 若 $\mathrm{tg}A=\frac{3}{4}$，⊙F 的半径为$\frac{3}{2}$.

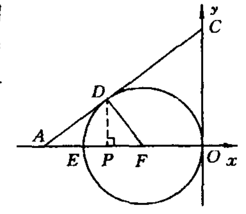


图 1 - 1

(1)求过 A、C 两点的一次函数的解析式；

(2)求过 E、D、O 三点的二次函数的解析式；

(3)证明(2)中抛物线的顶点在直线 AC 上.

解　(1)连结 DF，$\because DF=\frac{3}{2}$，$\mathrm{tg}A=\frac{3}{4}$，$\therefore AD=2$.

在 Rt△ADF 中，$AF=\frac{5}{2}$，$\therefore AO=4$.

在 Rt△AOC 中，$AO=4$，$\mathrm{tg}A=\frac{3}{4}$，$\therefore CO=3$.

$\therefore A(-4,0)$，$C(0,3)$.

设过 A、C 的一次函数解析式为 $y=kx+b$，把 A、C 坐标代入，解得 $y=\frac{3}{4}x+3$.

(2)过 D 作 $DP\perp AO$ 于 P，$\therefore DP/\!/CO$，$\therefore \frac{DP}{OC}=\frac{AD}{AC}$.

在 Rt△AOC 中，$\because AO=4$，$CO=3$，$\therefore AC=5$，

$\therefore \frac{DP}{3}=\frac{2}{5}$，$DP=\frac{6}{5}$.

把 $y=\frac{6}{5}$ 代入一次函数的解析式中，得 $x=-\frac{12}{5}$，$\therefore D\left(-\frac{12}{5},\frac{6}{5}\right)$.

设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 O、D、E 三点，

则$\begin{cases}c=0,\\9a-3b+c=0,\\\frac{144}{25}a-\frac{12}{5}b+c=\frac{6}{5}.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-\frac{5}{6},\\b=-\frac{5}{2},\\c=0.\end{cases}$

$\therefore$二次函数的解析式为 $y=-\frac{5}{6}x^2-\frac{5}{2}x$.

(3)抛物线的顶点坐标为$\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{8}\right)$.

把$\left(-\frac{3}{2},\frac{15}{8}\right)$代入$y=\frac{3}{4}x+3$中,可有

右边$=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{3}{2}\right)+3=\frac{15}{8}=$左边,

∴抛物线的顶点在直线AC上.

题2 已知:如图1-2,在平面直角坐标系中,以点$A(4,0)$为圆心,AO为半径的圆交x轴于点B.设M为x轴上方的圆上一点,且$\overset{\frown}{OM}$的长是$\frac{4}{3}\pi$,点P为$\overset{\frown}{OM}$上任意一点,(P不与O点重合),连结AP并延长交y轴于点C,连结BP并延长交y轴于点D.

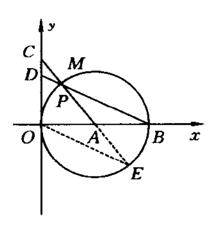


图1-2

(1)当点P在$\overset{\frown}{OM}$上运动时,设$PC=x$,$\frac{OC}{OD}=y$,求y与x之间的函数关系式及自变量x的取值范围;

(2)当点P运动到某一位置时,恰使$OB=3OD$,求此时AC所在直线的解析式.

解 (1)延长PA交$\odot A$于E,连结OE.

$\because AO=AE$,$\therefore \angle BOE=\angle E$.

又$\because \angle PBO=\angle E$,$\therefore \angle BOE=\angle PBO$,$\therefore DB/\!/OE$,$\therefore \frac{OC}{OD}=\frac{CE}{PE}$.

又$\because \frac{OC}{OD}=y$,$PC=x$,$PE=2AO=8$,$CE=CP+PE=x+8$,

$\therefore y=\frac{x+8}{8}$,即$y=\frac{1}{8}x+1$.

当点P运动到点M时,连结AM并延长交y轴于点F,设$\angle OAM=n°$,

$\because P$在$\overset{\frown}{OM}$上运动,$\therefore PC=x>0$.

$\because \overset{\frown}{OM}$的长为$\frac{4}{3}\pi$,$\frac{n\pi R}{180}=\frac{n\pi\cdot 4}{180}=\frac{4}{3}\pi$,$\therefore n=60°$,即$\angle OAM=60°$.

$\because OC\perp OB$,$\therefore AF=2AO=8$,$\therefore MF=4$,$\therefore x\leqslant 4$.

∴当点P在$\overset{\frown}{OM}$上运动时,自变量x的取值范围是$0<x\leqslant 4$.

(2)当点P运动到恰使$OB=3OD$时,即$OD=\frac{1}{3}OB=\frac{8}{3}$,

$\because \frac{OC}{OD}=y$,$\therefore OC=OD\cdot y=\frac{8}{3}\cdot\frac{x+8}{8}=\frac{x+8}{3}$.

在Rt$\triangle AOC$中,$OA^2+OC^2=AC^2$,

$\therefore \left(\frac{x+8}{3}\right)^2+4^2=(x+4)^2$,

整理,得$x^2+7x-8=0$,$\therefore x_1=1$,$x_2=-8$(舍去).

$\therefore OC=\frac{1+8}{3}=3$,$\therefore C(0,3)$.

设过 A、C 两点的直线解析式为 $y=kx+b$,

$\therefore \begin{cases} b=3, \\ 0=4k+b. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-\dfrac{3}{4}, \\ b=3. \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y=-\dfrac{3}{4}x+3$.

题3 已知:如图 1-3,抛物线 $y=ax^2-3x+c$ 交 x 轴正方向于 A、B 两点,交 y 轴正方向于 C 点,过 A、B、C 三点作⊙D. 若⊙D 与 y 轴相切.

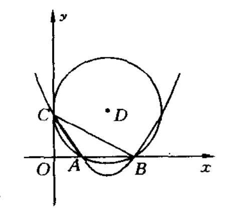
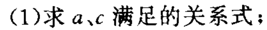


图 1-3



(1)求 a、c 满足的关系式;

(2)设 $\angle ACB=\alpha$,求 $\operatorname{tg}\alpha$;

(3)设抛物线顶点为 P,判断直线 PA 与⊙D 的位置关系,并证明.

解 (1)A、B 的横坐标是方程 $ax^2-3x+c=0$ 的两根,设为 x_1、$x_2(x_2>x_1)$,C 的纵坐标是 c.

又 $\because$ y 轴与⊙D 相切,$\therefore OA\cdot OB=OC^2$,$\therefore x_1\cdot x_2=c^2$.

又由方程 $ax^2-3x+c=0$ 知 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$,

$\therefore c^2=\dfrac{c}{a}$,即 $ac=1$.

(2)连结 PD,交 x 轴于 E,直线 PD 必为抛物线的对称轴. 连结 AD、BD.

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}AB$,$\angle ACB=\dfrac{1}{2}\angle ADB=\angle ADE=\alpha$.

$\because a>0$,$x_2>x_1$,$\therefore AB=x_2-x_1=\dfrac{\sqrt{9-4ac}}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{a}$.

$\therefore AE=\dfrac{\sqrt{5}}{2a}$. 又 $ED=OC=c$,$\therefore \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{AE}{DE}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(3)设 $\angle PAB=\beta$,P 点坐标为 $\left(\dfrac{3}{2a},-\dfrac{5}{4a}\right)$.

又 $\because a>0$,$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle PAE$ 中,$PE=\dfrac{5}{4a}$,

$\therefore \operatorname{tg}\beta=\dfrac{PE}{AE}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,$\therefore \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha$,$\therefore \beta=\alpha$.

$\therefore \angle PAE=\angle ADE$,则 $\angle PAD=90^\circ$,PA 和⊙D 相切.

题4 已知抛物线 $y=x^2-(m+4)x+m+2$ 与 x 轴交于两点 $A(a,0)$、$B(b,0)(a<b)$,O 为坐标原点,分别以 OA、OB 为直径作⊙O_1、⊙O_2.

(1)若⊙O_1 与⊙O_2 外切,求 m 的取值范围;

(2)如果⊙O_1 与⊙O_2 外切,设两圆的一条外公切线分别切⊙O_1、⊙O_2 于点 P、Q,判断

四边形 PO_1O_2Q 的形状(不要求证明),并求出这个四边形的面积(用含 a、b 的代数式表示).

(3)当 $m>-2$ 时,$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 在 y 轴的哪一侧?简要说明理由,并指出两圆的位置关系.

解 (1)$\because \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于原点 O,

$\therefore A$、B 两点分别位于原点两旁,即 $a<0,b>0$.

$\therefore$ 方程 $x^2-(m+4)x+m+2=0$ 的两个实根 a、b 异号,

$\therefore ab=m+2<0$,$\therefore m<-2$.

(2)当 $m<-2$ 且 $m\neq-4$ 时,四边形 PO_1O_2Q 是直角梯形.

根据题意,可得 $S_{四边形PO_1O_2Q}=\frac{1}{4}(b-a)\sqrt{-ab}$.

当 $m=-4$ 时,四边形 PO_1O_2Q 是矩形,

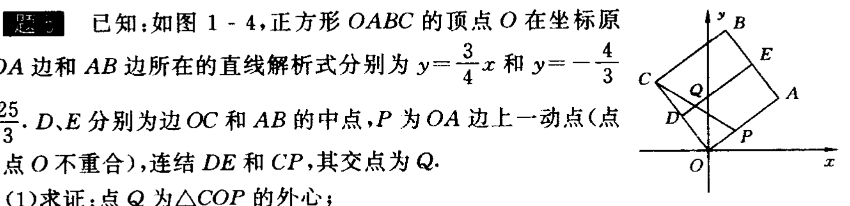
根据题意,可得 $S_{四边形PO_1O_2Q}=\frac{1}{2}b^2$(或 $\frac{1}{2}a^2$ 或 1).

(3)$\because \Delta=(m+4)^2-4(m+2)=(m+2)^2+4>0$,

$\therefore$ 方程 $x^2-(m+4)x+m+2=0$ 有两个不相等的实数根,

又 $m>-2$. $\therefore \begin{cases} a+b=m+4>0, \\ ab=m+2>0. \end{cases}$

$\therefore a>0,b>0$,$\therefore \odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 都在 y 轴右侧,并且两圆内切.



题 已知:如图 1-4,正方形 $OABC$ 的顶点 O 在坐标原点,OA 边和 AB 边所在的直线解析式分别为 $y=\frac{3}{4}x$ 和 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}$. D、E 分别为边 OC 和 AB 的中点,P 为 OA 边上一动点(点 P 与点 O 不重合),连结 DE 和 CP,其交点为 Q.

图 1-4

(1)求证:点 Q 为 $\triangle COP$ 的外心;

(2)求正方形 $OABC$ 的边长;

(3)当 $\odot Q$ 与 AB 相切时,求点 P 的坐标.

解 (1)$\because D$、E 分别为正方形 $OABC$ 中 OC、AB 的中点,$\therefore DE\parallel OA$,$\therefore Q$ 也是 CP 的中点.

又 $\because CP$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle COP$ 的斜边,$\therefore$ 点 Q 为 $\triangle COP$ 的外心.

(2)由方程组 $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x, \\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{25}{3}, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4,3)$.

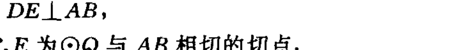
如图 1-5,过点 A 作 $AF\perp Ox$ 轴,垂足为点 F,

$\therefore OF=4,AF=3$.

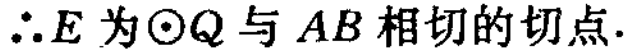
由勾股定理,得 $OA=\sqrt{4^2+3^2}=5$,

∴正方形 $OABC$ 的边长为 5.

(3)当 $\triangle COP$ 的外接圆⊙Q 与 AB 相切时,圆心 Q 在直线 DE 上,且 $DE\perp AB$,



∴E 为⊙Q 与 AB 相切的切点.



又∵AE 和 APO 分别是⊙Q 的切线与割线,

∴$AE^2=AP\cdot AO$.

∵$OA=5$,$AE=\frac{5}{2}$,∴$\left(\frac{5}{2}\right)^2=AP\cdot 5$,∴$AP=\frac{5}{4}$.

∴当⊙Q 与 AB 相切时,$OP=5-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$.

如图 1-5,作 $PH\perp Ox$ 轴,垂足为 H.

∵$PH/\!/AF$,∴$\frac{OP}{OA}=\frac{OH}{OF}=\frac{PH}{AF}$,

∴$OH=\frac{OP\cdot OF}{OA}=\frac{\frac{15}{4}\times 4}{5}=3$,$PH=\frac{OP\cdot AF}{OA}=\frac{\frac{15}{4}\times 3}{5}=\frac{9}{4}$.

∴点 P 的坐标为$\left(3,\frac{9}{4}\right)$.

图 1-5

题6 已知:如图 1-6,直线 AB 分别交 y 轴、x 轴于 A、B 两点,$A(0,2\sqrt{3})$、$B(2,0)$. 以 $P\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 为圆心的圆与直线 AB 相切于点 E.

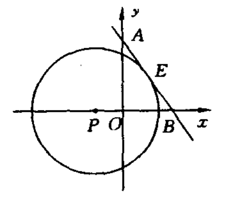
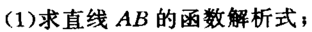


图 1-6

(1)求直线 AB 的函数解析式;



(2)求⊙P 的半径的长;

(3)若 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 被直线 $y=kx-2k$ 分成两部分,设靠近原点的那一部分的面积为 S. 以 k 为自变量,求出 S 与 k 的函数关系式.

(4)若直线 $y=kx-2k$ 把 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 分成的两部分面积之比为 1∶2,求 k 的值.

解 (1)设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+b$,把 A、B 两点坐标代入,得

$\begin{cases}b=2\sqrt{3},\\2k+b=0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\sqrt{3},\\b=2\sqrt{3}.\end{cases}$

∴直线 AB 的函数解析式为 $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$.

(2)连结 PE. ∵AB 切⊙P 于 E,∴$PE\perp AB$.

∵$\angle ABP$ 是 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle PEB$ 的公共角,

∴$\triangle AOB\backsim\triangle PEB$,∴$\frac{PE}{OA}=\frac{PB}{AB}$.

∵$OA=2\sqrt{3}$,$PB=2+\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{2}$,

又 $AB=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$，

$\therefore PE=\dfrac{OA\cdot PB}{AB}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\frac{5}{2}}{4}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

即$\odot P$的半径为$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$.

(3)在直线 $y=kx-2k$ 上，令 $y=0$，得 $x=2$，即直线经过点 $B(2,0)$.

设直线 $y=kx-2k$ 与 y 轴的交点为 C，则 C 点的坐标为$(0,-2k)$，$(-2k>0)$，

$\therefore S_{\triangle COB}=\dfrac{1}{2}\cdot OB\cdot OC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot(-2k)$，

即 $S=-2k$，此时，$0<-2k<2\sqrt{3}$，$\therefore -\sqrt{3}<k<0$.

(4)点 C 是 OA 的一个三等分点时，有

$S_{\triangle COB}:S_{\triangle ABC}=1:2$， ①

或 $S_{\triangle ABC}:=S_{\triangle COB}=1:2$. ②

由①知 $S_{\triangle COB}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABO}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，即 $-2k=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由②知，$S_{\triangle COB}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABO}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $-2k=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$k=-\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$当直线 $y=kx-2k$ 把$\triangle ABO$ 分成的两部分面积之比为 $1:2$ 时，$k=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$或 $k=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

题 7 已知：如图 1-7，在$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，O 是 AB 上一点，以 O 为圆心，OB 为半径的半圆与 AB 交于点 E，与 AC 切于点 D，$AD=2$，$AE=1$.

求证：$S_{\triangle AOD}$、$S_{\triangle BCD}$是方程 $10x^2-51x+54=0$ 的两个根.

证明 $\because AD$ 是切线，$\therefore AD^2=AE\cdot AB$.

由 $AD=2$，$AE=1$，得 $AB=4$，从而 $OD=\dfrac{3}{2}$.

$\because\angle ABC=90°$，$\therefore AC^2=BC^2+AB^2$.

又 BC、CD 是$\odot O$ 的切线，$\therefore BC=CD$.

$\therefore(2+BC)^2=BC^2+4^2$，解得 $BC=3$.

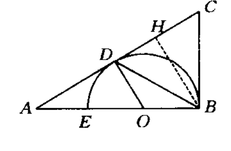


图 1-7

$\because OD\perp AD$，$\therefore S_{\triangle AOD}=\dfrac{1}{2}AD\cdot OD=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$.

如图 1-7，作 $BH\perp AC$ 于 H，则 $\text{Rt}\triangle AOD\backsim\text{Rt}\triangle ABH$.

$\therefore\dfrac{OD}{BH}=\dfrac{AO}{AB}$，即$\dfrac{\frac{3}{2}}{BH}=\dfrac{1+\frac{3}{2}}{4}$，$\therefore BH=\dfrac{12}{5}$.

$\therefore S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot BH=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{12}{5}=\dfrac{18}{5}$.

而 $S_{\triangle AOD}+S_{\triangle BCD}=\frac{3}{2}+\frac{18}{5}=\frac{51}{10}$,

$S_{\triangle AOD}\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{3}{2}\times\frac{18}{5}=\frac{54}{10}$,

$\therefore S_{\triangle AOD}$、$S_{\triangle BCD}$是方程 $10x^2-51x+54=0$ 的两个根.

题8 已知:如图 1-8,在矩形 $ABCD$ 中,$BC=a$ 厘米,$AB=b$ 厘米,$a>b$,且 a、b 是方程$\frac{8-4x}{x(x+5)}+\frac{2x+3}{x+5}=1$ 的两个根. P 是 BC 上一动点,动点 Q 在 PC 或其延长线上,$BP=PQ$,以 PQ 为一边的正方形为 $PQRS$. 点 P 从 B 点开始沿射线 BC 方向运动,设 $BP=x$ 厘米,正方形 $PQRS$ 与矩形 $ABCD$ 重叠部分的面积为 y 厘米².

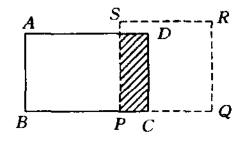


图 1-8

(1)求 a 和 b;

(2)分别求出 $0\leqslant x<2$ 和 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时,y 与 x 之间的函数关系式;

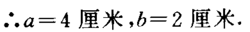
(3)在同一坐标系内画出(2)的函数图像.

解 (1)解方程$\frac{8-4x}{x(x+5)}+\frac{2x+3}{x+5}=1$.

去分母,得 $8-4x+(2x+3)x=x(x+5)$,

化简,得 $x^2-6x+8=0$.

解得,$x_1=2$,$x_2=4$,经检验 $x_1=2$,$x_2=4$ 都是原方程的根,



$\therefore a=4$ 厘米,$b=2$ 厘米.

(2)当 $0\leqslant x<2$ 时,$y=x^2$;

当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时,$y=8-2x$.

(3)图像如图 1-9 所示.

图 1-9

题9 已知:如图 1-10,抛物线 $y=-x^2+ax+b$ 与 x 轴从左至右交于 A、B 两点,与 y 轴交于点 C,且$\angle BAC=\alpha$,$\angle ABC=\beta$,$\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=2$,$\angle ACB=90°$.

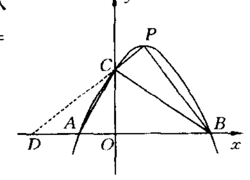
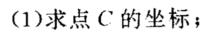


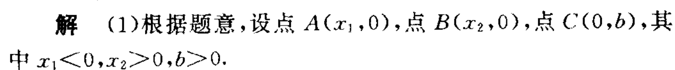
图 1-10



(1)求点 C 的坐标;

(2)求抛物线的解析式;

(3)若抛物线的顶点为 P,求四边形 $ABPC$ 的面积.



解 (1)根据题意,设点 $A(x_1,0)$,点 $B(x_2,0)$,点 $C(0,b)$,其中 $x_1<0$,$x_2>0$,$b>0$.

$\because x_1$、x_2 是方程$-x^2+ax+b=0$ 的两根,

$\therefore x_1+x_2=a$,$x_1\cdot x_2=-b$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$OC\perp AB$,$\therefore OC^2=OA\cdot OB$.

$\because OA=-x_1$,$OB=x_2$,$\therefore b^2=-x_1\cdot x_2=b$.

$\because b>0$，$\therefore b=1$，$\therefore C(0,1)$.

(2)在Rt△AOC和Rt△BOC中，

$\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\dfrac{OC}{OA}-\dfrac{OC}{OB}=-\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}=-\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\dfrac{a}{b}=2$，

$\therefore a=2$，

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+1$.

(3)$\because y=-x^2+2x+1$，∴顶点 P 的坐标为(1,2).

当 $-x^2+2x+1=0$ 时，$x=1\pm\sqrt{2}$，

$\therefore A(1-\sqrt{2},0)$，$B(1+\sqrt{2},0)$.

如图1-10，延长 PC 交 x 轴于点 D，过 C、P 的直线为 $y=x+1$.

∴点 D 的坐标为(−1,0).

$\therefore S_{四边形ABPC}=S_{\triangle DPB}-S_{\triangle DCA}=\dfrac{1}{2}\times(2+\sqrt{2})\times2-\dfrac{1}{2}\times(2-\sqrt{2})\times1=\dfrac{2+3\sqrt{2}}{2}$.

题10 已知：如图1-11，直线 AB 过点 $A(m,0)$，$B(0,n)$（$m>0$，$n>0$）. 反比例函数 $y=\dfrac{m}{x}$ 的图像与 AB 交于 C、D 两点，P 为双曲线 $y=\dfrac{m}{x}$ 上任意一点，过 P 作 $PQ\perp x$ 轴于 Q，$PR\perp y$ 轴于 R.

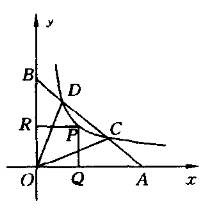


图1-11

(1)若 $m+n=10$，n 为何值时△AOB 的面积最大？最大值是多少？

(2)若 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COD}=S_{\triangle DOB}$，求 n 的值；

(3)在(2)的条件下，过 O、D、C 三点作抛物线，当该抛物线的对称轴为 $x=1$ 时，矩形 $PROQ$ 的面积是多少？

解 (1)由 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}mn$，$m+n=10$，得

$S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}n(10-n)=-\dfrac{1}{2}n^2+5n=-\dfrac{1}{2}(n-5)^2+\dfrac{25}{2}$.

当 $n=5$ 时，$S_{\triangle AOB}$的最大值为$\dfrac{25}{2}$.

(2)$\because AB$ 过$(m,0)$，$(0,n)$两点，

求得直线 AB 的方程为 $y=-\dfrac{n}{m}x+n$.

当 $S_{\triangle AOC}=S_{\triangle COD}=S_{\triangle DOB}$时，有 $AC=CD=DB$.

过 C、D 作 x 轴的垂线，可知 D、C 的横坐标分别为$\dfrac{m}{3}$，$\dfrac{2}{3}m$.

把 $x=\dfrac{m}{3}$代入 $y=\dfrac{m}{x}$，得 $y=3$.

把 $y=3,x=\frac{m}{3}$ 代入 $y=-\frac{n}{m}x+n$，得 $n=\frac{9}{2}$.

(3)当 $n=\frac{9}{2}$ 时，可求得 $C\left(\frac{2}{3}m,\frac{3}{2}\right)$，$D\left(\frac{m}{3},3\right)$.

设过 O、C、D 的抛物线为 $y=ax^2+bx$，则

$$\begin{cases}\frac{4}{9}m^2a+\frac{2}{3}mb=\frac{3}{2},\\ \frac{1}{9}m^2a+\frac{m}{3}b=3.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-\frac{81}{4m^2},\\ b=\frac{63}{4m}.\end{cases}$$

∴对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{18}m$，由 $\frac{7}{18}m=1$，$m=\frac{18}{7}$.

∵$P(x,y)$在 $y=\frac{m}{x}$ 上，∴$S_{\text{四边形}PROQ}=xy=m=\frac{18}{7}$.

题11 已知：如图 1 - 12，点(1,3)在函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$的图像上，矩形 $ABCD$ 的边 BC 在 x 轴上，E 是对角线 BD 的中点，函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$的图像又经过 A、E 两点，点 E 的横坐标为 m.

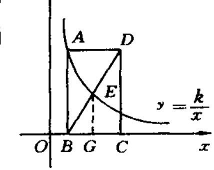


图 1 - 12

(1)求 k 的值；

(2)求点 C 的横坐标(用 m 表示)；

(3)当$\angle ABD=45°$时，求 m 的值.

解 (1)由函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像过点(1,3)，

可把点(1,3)代入 $y=\frac{k}{x}$ 中，得 $k=3$.

(2)∵当 $x=m$ 时，$y=\frac{3}{m}$，∴$E\left(m,\frac{3}{m}\right)$.

作 $EG\perp BC$，G 为垂足.

∵E 是 BD 的中点，$EG/\!/DC$，

∴$BG=CG$，∴$EG=\frac{1}{2}DC$，D 点的纵坐标为$\frac{6}{m}$.

∵D、A 两点纵坐标相等，∴A 点的纵坐标为$\frac{6}{m}$.

当 $y=\frac{6}{m}$时，$\frac{3}{x}=\frac{6}{m}$，∴$x=\frac{m}{2}$，∴$A\left(\frac{m}{2},\frac{6}{m}\right)$.

∵A、B 两点的横坐标相等，

∴B 点的坐标为$\left(\frac{m}{2},0\right)$，∴$BG=m-\frac{m}{2}=\frac{m}{2}$.

∵$BG=GC$，∴$BC=m$，∴$OC=\frac{m}{2}+m=\frac{3}{2}m$，即 C 点的横坐标为$\frac{3}{2}m$.

(3)当$\angle ABD=45°$时，$AB=AD$，则$\frac{6}{m}=m$，即 $m^2=6$，解得 $m_1=\sqrt{6}$，$m_2=-\sqrt{6}$(不合题意，舍去).

$\therefore m=\sqrt{6}$.

题 12 已知直线 $y=\frac{1}{2}x$ 和 $y=-x+m$，二次函数 $y=x^2+px+q$ 图像的顶点为 M.

(1)若 M 恰在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 与 $y=-x+m$ 的交点处，试证明：无论 m 取何实数值，二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图像与直线 $y=-x+m$ 总有两个不同的交点；

(2)在(1)的条件下，若直线 $y=-x+m$ 过点 $D(0,-3)$，求二次函数 $y=x^2+px+q$ 的表达式，并作出其大致的图像；

(3)在(2)的条件下，若二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图像与 y 轴交于点 C，与 x 轴的左交点为 A，试在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上求异于 M 的点 P，使 P 在$\triangle CMA$ 的外接圆上.

解 (1)由 $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x, & ① \\ y=-x+m. & ② \end{cases}$

则 $\frac{1}{2}x=-x+m, x=\frac{2}{3}m, y=\frac{1}{3}m$,

$\therefore$ 交点 $M\left(\frac{2}{3}m,\frac{1}{3}m\right)$.

此时二次函数为

$y=\left(x-\frac{2}{3}m\right)^2+\frac{1}{3}m=x^2-\frac{4}{3}mx+\frac{4}{9}m^2+\frac{1}{3}m$. ③

由②、③联列，消去 y，则

$x^2-\left(\frac{4}{3}m-1\right)x+\frac{4}{9}m^2-\frac{2}{3}m=0$,

$\therefore \Delta=\left[-\left(\frac{4}{3}m-1\right)\right]^2-4\left(\frac{4}{9}m^2-\frac{2}{3}m\right)$

$=\frac{16}{9}m^2-\frac{8}{3}m+1-\frac{16}{9}m^2+\frac{8}{3}m=1>0$.

$\therefore$ 无论 m 为何实数值，二次函数 $y=x^2+px+q$ 的图像与直线 $y=-x+m$ 总有两个不同的交点.

(2)$\because$ 直线 $y=-x+m$ 过点 $D(0,-3)$，

$\therefore m=-3$，$\therefore M(-2,-1)$.

$\therefore$ 二次函数为

$y=(x+2)^2-1=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$.

图像如图 1 - 13.

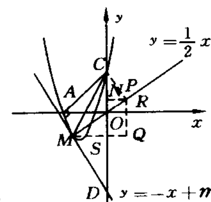


图 1 - 13

(3)由勾股定理可知$\triangle CMA$ 为直角三角形，且$\angle CAM=\text{Rt}\angle$.

$\therefore MC$ 为$\triangle CMA$ 外接圆直径.

$\because P$ 在 $y=\frac{1}{2}x$ 上，可设 $P\left(n,\frac{1}{2}n\right)$.

由 MC 为 $\triangle CMA$ 外接圆的直径，P 在这个圆上，$\therefore \angle CPM=\text{Rt}\angle$.

过 P 分别作 $PN\perp y$ 轴于 N，$PQ\perp x$ 轴于 R，过 M 作 $MS\perp y$ 轴于 S，MS 的延长线与 PR 的延长线交于点 Q.

由勾股定理，有 $MP^2=MQ^2+QP^2$，

即 $MP^2=(n+2)^2+\left(\frac{1}{2}n+1\right)^2$，

$CP^2=NC^2+NP^2=\left(3-\frac{1}{2}n\right)^2+n^2$，$CM^2=20$，

而 $MP^2+CP^2=CM^2$，

$\therefore (n+2)^2+\left(\frac{1}{2}n+1\right)^2+\left(3-\frac{1}{2}n\right)^2+n^2=20$，

$\therefore 5n^2+4n-12=0$，$\therefore n_1=\frac{6}{5}$，$n_2=-2$，而 $n_2=-2$ 是 M 点的横坐标，因此 P 点横坐标为 $\frac{6}{5}$.

又 P 在直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上，则 P 点纵坐标为 $\frac{3}{5}$.

$\therefore P$ 点的坐标为 $\left(\frac{6}{5},\frac{3}{5}\right)$.

题 13 已知：如图 1 - 14，$\triangle ABC$ 中，$AB=AC=6$，$\cos B=\frac{1}{3}$，点 O 在边 AB 上，圆 O 过点 B 且分别与边 AB、BC 另有交点 D、E，但圆 O 与边 AC 不相交，又 $EF\perp AC$，垂足为 F，设 $OB=x$，$CF=y$.

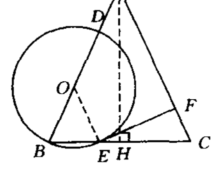


图 1 - 14

(1)求证：直线 EF 是⊙O 的切线；

(2)求 y 关于 x 轴的函数解析式，并写出这个函数的自变量的取值范围；

(3)当直线 DF 与圆 O 相切时，求 OB 的长.

解 (1)连结 OE，则 $OE=OB$，$\angle OBE=\angle OEB$.

$\because AB=AC$，$\therefore \angle OBE=\angle C$，$\therefore \angle OEB=\angle C$，$\therefore OE /\!/ AC$.

$\because EF\perp AC$，$\therefore OE\perp EF$.

$\because$ 点 E 在⊙O 上，$\therefore EF$ 是⊙O 的切线.

(2)作 $AH\perp BC$，H 为垂足，那么 $BH=\frac{1}{2}BC$.

$\because AB=6$，$\cos B=\frac{1}{3}$，$\therefore BH=2$，$BC=4$.

$\because OE /\!/ AC$，$\therefore \frac{BE}{BC}=\frac{OE}{AC}$，即 $\frac{BE}{4}=\frac{x}{6}$，$\therefore BE=\frac{2}{3}x$，

$\therefore EC=4-\frac{2}{3}x$.

在 Rt$\triangle ECF$ 中，$\cos C=\cos B=\frac{1}{3}$.

$\therefore CF=EC\cdot\cos C=\left(4-\frac{2}{3}x\right)\cdot\frac{1}{3}$，

∴所求函数的解析式为 $y=\frac{4}{3}-\frac{2}{9}x$.

当⊙O 与 AC 相切时，$EF=x$，由 $EF^2+CF^2=CE^2$，则

$x^2+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{9}x\right)^2=\left(4-\frac{2}{3}x\right)^2$，解得 $x=\frac{216\sqrt{2}-192}{49}$.

∴函数自变量的取值范围是 $0<x\leqslant\frac{216\sqrt{2}-192}{49}$.

(3)如图 1-15. 连结 OE、DE、OF. 由 DF 与圆 O 相切，$\therefore FD=FE$.

又 $OD=OE$，∴OF 垂直平分 DE.

由 $\angle DEB=90°$，$\therefore BC\perp DE$，$\therefore OF/\!/BC$.

这时 $OB=CF$，得 $\frac{4}{3}-\frac{2}{9}x=x$，解得 $x=\frac{12}{11}$，即 $OB=\frac{12}{11}$.

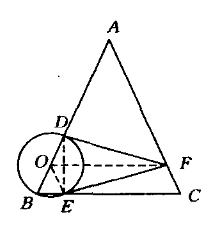
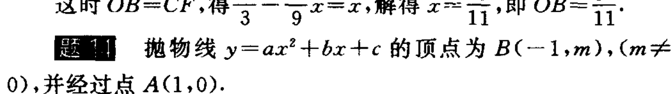


图 1-15



题 11 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点为 $B(-1,m)$，$(m\neq 0)$，并经过点 $A(1,0)$.

(1)求此抛物线的解析式(系数和常数项用含 m 的代数式表示)；

(2)化简 $\sqrt{b^2-4ac}$；

(3)设原点为 O，抛物线与 y 轴的交点为 C，若$\triangle AOC$ 为等腰三角形，求 m 的值.

解 (1)∵抛物线的顶点为 $B(-1,m)$，∴对称轴为 $x=-1$.

$\therefore -\frac{b}{2a}=-1, 2a=b$，　　①

又抛物线过点 $A(1,0)$，$B(-1,m)$，得

$a+b+c=0$，　　②

$a-b+c=m$，　　③

解由①、②、③所得的方程组，得

$a=-\frac{m}{4}, b=-\frac{m}{2}, c=\frac{3m}{4}$.

∴所求解析式为 $y=-\frac{m}{4}x^2-\frac{m}{2}x+\frac{3}{4}m$.

(2) $\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}m\right)^2-4\left(-\frac{1}{4}m\right)\left(\frac{3}{4}m\right)}=\sqrt{m^2}=|m|$.

(3)∵$\angle AOC$ 是直角，$\triangle AOC$ 为等腰三角形，$\therefore OC=OA=1$.

又点 C 可以在 x 轴的上方，也可以在 x 轴的下方，

$\therefore$点 C 的坐标为 $(0,1)$ 或 $(0,-1)$.

将 $x=0, y=1$ 代入抛物线的解析式，得 $m_1=\frac{4}{3}$.

将 $x=0, y=-1$ 代入抛物线的解析式，得 $m_2=-\frac{4}{3}$.

$\therefore m=\pm\frac{4}{3}$.

题 16 已知：二次函数 $y=x^2+2ax-2b+1$ 和 $y=-x^2+(a-3)x+b^2-1$ 的图像都经过 x 轴上两个不同的点 M、N，求 a、b 的值.

解法 1 根据题意，设 $M(x_1,0)$，$N(x_2,0)$，且 $x_1\neq x_2$.

则 x_1、x_2 为方程 $x^2+2ax-2b+1=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=-2a$，$x_1\cdot x_2=-2b+1$.

$\because x_1$、x_2 又是方程 $-x^2+(a-3)x+b^2-1=0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1+x_2=a-3$，$x_1x_2=1-b^2$.

$\therefore \begin{cases}-2a=a-3,\\ -2b+1=1-b^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

当 $a=1, b=0$ 时，二次函数为 $y=x^2+2x+1$ 和 $y=-x^2-2x-1$ 与 x 轴都只有一个交点，不合题意，舍去.

当 $a=1, b=2$ 时，二次函数为 $y=x^2+2x-3$ 和 $y=-x^2-2x+3$ 符合题意，

$\therefore a=1, b=2$.

解法 2 $\because$二次函数 $y=x^2+2ax-2b+1$ 的图像的对称轴为 $x=-a$，

二次函数 $y=-x^2+(a-3)x+b^2-1$ 的图像的对称轴为 $x=\frac{a-3}{2}$.

又两个二次函数图像都经过 x 轴上两个不同的点 M、N，

$\therefore$两个二次函数图像的对称轴为同一直线，

$\therefore -a=\frac{a-3}{2}$，解得 $a=1$.

$\therefore$两个二次函数分别为 $y=x^2+2x-2b+1$ 和 $y=-x^2-2x+b^2-1$.

依题意，令 $y=0$，得

$x^2+2x-2b+1=0$， ①

$-x^2-2x+b^2-1=0$. ②

①+②，得 $b^2-2b=0$，解得 $b_1=0, b_2=2$.

$\therefore \begin{cases}a=1,\\ b=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

当 $a=1, b=0$ 时，二次函数的图像与 x 轴只有一个交点，$\therefore$舍去 $a=1$，$b=0$.

当 $a=1, b=2$ 时，二次函数为 $y=x^2+2x-3$ 和 $y=-x^2-2x+3$ 符合题意.

$\therefore a=1, b=2.$

题 16 已知:如图 1 - 16,$\odot O'$ 与 x 轴交于 A、B 两点,与 y 轴交于 C、D 两点,圆心 O' 的坐标是 $(1,-1)$,半径是 $\sqrt{5}$.

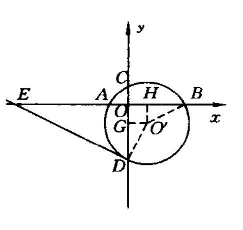


图 1 - 16

(1)比较线段 AB 与 CD 的大小;

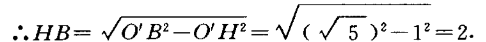
(2)求 A、B、C、D 四点的坐标;

(3)过点 D 作 $\odot O'$ 的切线,求这条切线的解析式.

解 (1)过点 O' 作 $O'H\perp x$ 轴于 H,作 $O'G\perp y$ 轴于 G.

$\because O'H=O'G=1, \therefore AB=CD.$

(2)连结 $O'B$,$\because O'B=\sqrt{5}, O'H=1,$



$\therefore HB=\sqrt{O'B^2-O'H^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2.$

$\therefore OB=OH+HB=1+2=3$,$\therefore$ 点 B 的坐标是 $(3,0)$.

类似地,可得 $A(-1,0)$、$C(0,1)$、$D(0,-3)$.

(3)设过点 D 的切线与 x 轴交于点 E,连结 $O'D$.

$\because \angle O'DG+\angle ODE=\angle DEO+\angle ODE=90°,$

$\therefore \angle O'DG=\angle DEO.$

又 $\angle O'GD=\angle DOE=90°$,

$\therefore \triangle DO'G\backsim\triangle EDO, \therefore \dfrac{DG}{EO}=\dfrac{O'G}{DO}.$

又 $DG=2$,则 $EO=6$,$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-6,0)$.

设所求切线的解析式为 $y=kx+b$.

$\because$ 切线过点 $D(0,-3)$ 和点 $E(-6,0)$,

则 $\begin{cases}-3=b,\\ 0=-6k+b,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}k=-\dfrac{1}{2},\\ b=-3.\end{cases}$

$\therefore$ 所求切线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x-3.$

题 17 一条直线过点 $(1,1)$,与 x 轴、y 轴围成的三角形面积为 2,求这条直线的解析式.

解 设这条直线的解析式为 $y=kx+b$,则直线与 x 轴交点为 $\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$,与 y 轴交点为 $(0,b)$.

由直线与 x、y 轴围成的三角形面积为 2,可知:

$\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{b}{k}\right|\cdot|b|=2.$ ①

由直线过点 $(1,1)$,可得 $k+b=1$. ②



由②可得 $k=1-b$. ③

把③代入①，得 $\left|-\dfrac{b^2}{1-b}\right|=4,\dfrac{b^2}{1-b}=\pm 4$.

若$\dfrac{b^2}{1-b}=4$，即 $b^2+4b-4=0$，$\therefore b=-2\pm 2\sqrt{2}$.

当 $b=-2+2\sqrt{2}$ 时，$k=3-2\sqrt{2}$，

则 $y=(3-2\sqrt{2})x-2+2\sqrt{2}$；

当 $b=-2-2\sqrt{2}$ 时，$k=3+2\sqrt{2}$，

则 $y=(3+2\sqrt{2})x-2-2\sqrt{2}$.

若$\dfrac{b^2}{1-b}=-4$，$b^2-4b+4=0$，$b=2$，则 $k=-1$，$y=-x+2$.

∴所求直线解析式为 $y=-x+2$ 或 $y=(3-2\sqrt{2})x-2+2\sqrt{2}$ 或 $y=(3+2\sqrt{2})x-2-2\sqrt{2}$.

题 18 已知：如图 1 - 17，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle B=90°$，$AB=8\text{cm}$，$AD=24\text{cm}$，$BC=26\text{cm}$. AB 为⊙O 的直径，动点 P 从点 A 开始沿 AD 边向点 D 以 1 厘米/秒的速度运动，动点 Q 从点 C 开始沿 CB 边向点 B 以 3 厘米/秒的速度运动，P、Q 分别从点 A、C 同时出发，当其中一点到达端点时，另一点也随之停止运动，设运动时间为 t 秒.

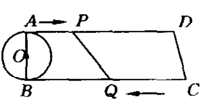


图 1 - 17

求：(1)t 分别为何值时，四边形 $PQCD$ 为平行四边形、等腰梯形.

(2)t 分别为何值时，直线 PQ 与⊙O 相切、相交、相离？

解 (1)∵$AD/\!/BC$，

∴只要 $QC=PD$，四边形 $PQCD$ 即为平行四边形.

此时 $3t=24-t$，解得 $t=6$.

即当 $t=6$ 秒时，四边形 $PQCD$ 为平行四边形.

同理，只要 $PQ=CD$，$PD\neq QC$ 时，四边形 $PQCD$ 为等腰梯形，过 P、D 分别作 BC 的垂线交 BC 于 E、F 两点，如图 1 - 18，则由等腰梯形的性质可知：

图 1 - 18

$EF=PD$，$QE=FC=2$.

$\therefore 2=\dfrac{1}{2}[3t-(24-t)]$，解得 $t=7$.

$\therefore t=7$ 秒时，四边形 $PQCD$ 为等腰梯形.

(2)设运动 t 秒时，直线 PQ 与⊙O 相切于点 G，如图 1 - 19，过 P 作 $PH\perp BC$，垂足为 H，则 $PH=AB$，$BH=AP$，

即 $PH=8$，

$HQ=BC-CQ-BH=26-3t-t=26-4t$.

由切线长定理，得

$PQ=AP+BQ=t+26-3t=26-2t$.

由勾股定理，得 $PQ^2=PH^2+HQ^2$,

$\therefore (26-2t)^2=8^2+(26-4t)^2$,

整理，得 $3t^2-26t+16=0$，解得 $t_1=\frac{2}{3}$，$t_2=8$.

即 $t=\frac{2}{3}$ 秒或 $t=8$ 秒时，直线 PQ 与⊙O 相切.

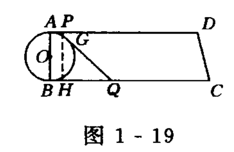


图 1 - 19

$\because t=0$ 秒时，PQ 与⊙O 相交；当 $t=\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$ 秒时，Q 点运动到 B 点，P 点尚未运动到 D 点，但也停止运动，此时 PQ 也与⊙O 相交.

$\therefore$ 当 $t=\frac{2}{3}$ 或 $t=8$ 时，直线 PQ 与⊙O 相切；当 $0\leqslant t<\frac{2}{3}$ 或 $8<t\leqslant 8\frac{2}{3}$ 时，直线 PQ 与⊙O 相交；当 $\frac{2}{3}<t<8$ 时，直线 PQ 与⊙O 相离.

题 19 已知：如图 1 - 20，抛物线与直线 $y=k(x-4)$ 都经过坐标轴的正半轴上 A、B 两点，该抛物线的对称轴 $x=-1$ 与 x 轴交于点 C，且 $\angle ABC=90°$.

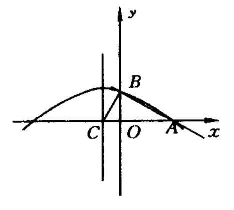


图 1 - 20

求：(1)直线 AB 的解析式；



(2)抛物线的解析式.

解 (1)在直线 $y=k(x-4)$ 中，令 $y=0$，得 $x=4$.

$\therefore A$ 点坐标为 $(4,0)$.

$\because \angle ABC=90°$，$\therefore \triangle CBO\backsim\triangle BAO$，$\therefore \frac{OB}{OC}=\frac{OA}{OB}$，即 $OB^2=CO\cdot OA$.

$\because OC=1$，$OA=4$，$\therefore OB=2$，$\therefore B$ 点坐标为 $(0,2)$.

将点 $B(0,2)$ 代入 $y=k(x-4)$ 中，得 $k=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 直线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

(2)设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)^2+h$，函数图像过 $A(4,0)$，$B(0,2)$，得

$$\begin{cases}25a+h=0, & ①\\ a+h=2. & ②\end{cases}$$

解这个方程组，得 $a=-\frac{1}{12}$，$h=\frac{25}{12}$.

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{12}(x+1)^2+\frac{25}{12}$，即 $y=-\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{6}x+2$.

题 20 已知反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图像和一次函数 $y=kx-7$ 的图像都经过点 $P(m,2)$.

(1)求这个一次函数的解析式；

(2)如果等腰梯形 $ABCD$ 的顶点 A、B 在这个一次函数的图像上，顶点 C、D 在这个反比例函数的图像上，两底 AD、BC 与 y 轴平行，且 A 和 B 的横坐标分别为 a 和 $a+2$，求 a 的值.

解 (1)∵点 $P(m,2)$ 在函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图像上，

∴$m=6$.

∵一次函数 $y=kx-7$ 的图像经过点 $P(6,2)$，

∴$k=\frac{3}{2}$.

∴所求的一次函数解析式是 $y=\frac{3}{2}x-7$.

图 1 - 21

(2)∵点 A、B 的横坐标分别是 a 和 $a+2$，

∴$A\left(a,\frac{3}{2}a-7\right)$，$B\left(a+2,\frac{3}{2}a-4\right)$，

$C\left(a+2,\frac{12}{a+2}\right)$，$D\left(a,\frac{12}{a}\right)$.

∵$AB=CD$，∴$2^2+3^2=2^2+\left(\frac{12}{a+2}-\frac{12}{a}\right)^2$，

∴$\frac{12}{a+2}-\frac{12}{a}=\pm3$.

①由 $\frac{12}{a+2}-\frac{12}{a}=3$，化简得 $a^2+2a+8=0$，方程无实根.

②由 $\frac{12}{a+2}-\frac{12}{a}=-3$，化简得 $a^2+2a-8=0$，∴$a=-4$，$a=2$.

经检验 $a=-4$，$a=2$ 均为所求的值.

题 21 已知：如图 1 - 22，在△ABC 中，$\angle A=90°$，$AB=6$，$AC=8$，点 P 从点 A 开始沿 AC 边向点 C 匀速移动，点 Q 从点 A 开始沿 AB 边向点 B，再沿 BC 边向点 C 匀速移动．若 P、Q 两点同时从点 A 出发，则可同时到达点 C.

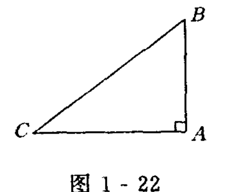


图 1 - 22

(1)如果 P、Q 两点同时从点 A 出发，以原速度按各自的移动路线移动到某一时刻同时停止移动，当点 Q 移动到 BC 边上(Q 不与 C 重合)时，求以 tgQCA、tgQPA 为根的一元二次方程.

(2)如果 P、Q 两点同时从点 A 出发，以原速度按各自的移动路线移动到某一时刻同时停止移动，当 $S_{\triangle PBQ}=\frac{12}{5}$ 时，求 PA 的长.

解 在 Rt△ABC 中，$AB=6$，$AC=8$，∴$BC=10$.

∵P、Q 两点从点 A 同时出发，可同时到达点 C，

∴$\frac{s_P}{s_Q}=\frac{8}{6+10}=\frac{1}{2}$.

(1)如图 1 - 23，设 P 点移动的路程为 x，Q 点移动的路程为 $2x$.

$\therefore CP=8-x, BQ=2x-6, CQ=16-2x.$

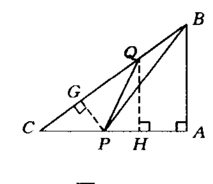


图 1 - 23

作 $QH\perp AC$ 于 H，$\because \angle A=90°$，$\therefore QH\,/\!/\,AB$，

$\therefore \dfrac{QH}{AB}=\dfrac{CQ}{CB}=\dfrac{CH}{AC}.$

$\therefore QH=\dfrac{6}{5}(8-x), CH=\dfrac{8}{5}(8-x)$，

$\therefore PH=CH-CP=\dfrac{3}{5}(8-x).$

$\therefore \text{tg}QPA=\dfrac{QH}{PH}=2, \text{tg}QCA=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{3}{4}.$

$\therefore \text{tg}QPA+\text{tg}QCA=\dfrac{11}{4}, \text{tg}QPA\cdot\text{tg}QCA=\dfrac{3}{2}.$

$\therefore$ 以 $\text{tg}QPA$、$\text{tg}QCA$ 为根的一元二次方程为 $y^2-\dfrac{11}{4}y+\dfrac{3}{2}=0$，即 $4y^2-11y+6=0.$

(2)当 $S_{\triangle PBQ}=\dfrac{12}{5}$ 时，设 $PA=x$，点 Q 的位置有两种情况：

①如图 1 - 24，当点 Q 在 BC 边上时，$QB=2x-6.$

作 $PG\perp BC$ 于 G，$\therefore \triangle PCG\backsim\triangle BCA$，$\therefore \dfrac{PG}{BA}=\dfrac{PC}{BC}$，$\therefore PG=\dfrac{3}{5}(8-x).$

$\therefore S_{\triangle PBQ}=\dfrac{1}{2}QB\cdot PC=\dfrac{1}{2}(2x-6)\cdot\dfrac{3}{5}(8-x)=\dfrac{12}{5}.$

$\therefore x^2-11x+28=0$，解得 $x_1=4, x_2=7.$

②当点 Q 在 AB 上时，$AQ=2x, BQ=6-2x.$

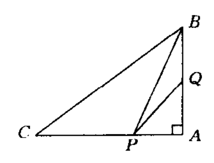


图 1 - 24

$\therefore S_{\triangle PBQ}=\dfrac{1}{2}PA\cdot BQ=\dfrac{1}{2}x(6-2x)=\dfrac{12}{5}$，

$\therefore x^2-3x+\dfrac{12}{5}=0.$

$\because \Delta=9-\dfrac{48}{5}<0$，

$\therefore$ 此方程无实根，故点 Q 不能在 AB 上.

由①、②可知当 $S_{\triangle PBQ}=\dfrac{12}{5}$ 时，$PA=4$ 或 $PA=7.$

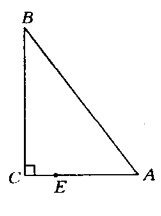
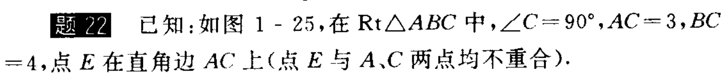
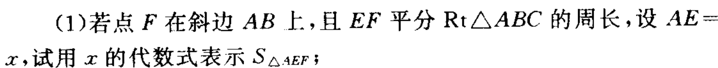


图 1 - 25

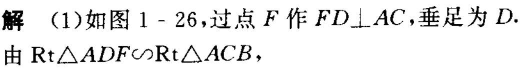


题 22 已知：如图 1 - 25，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，点 E 在直角边 AC 上(点 E 与 A、C 两点均不重合).



(1)若点 F 在斜边 AB 上，且 EF 平分 Rt$\triangle ABC$ 的周长，设 $AE=x$，试用 x 的代数式表示 $S_{\triangle AEF}$；

(2)若点 F 在折线 ABC 上移动，试问：是否存在直线 EF 将 Rt$\triangle ABC$ 的周长和面积同时平分，若存在直线 EF，则求出 AE 的长；若不存在直线 EF，请说明理由.



解 (1)如图 1 - 26，过点 F 作 $FD\perp AC$，垂足为 D.

由 Rt$\triangle ADF\backsim$Rt$\triangle ACB$，

易知 $FD=\dfrac{BC\cdot AF}{AB}=\dfrac{4}{5}(6-x)$.

$\therefore S_{\triangle AEF}=\dfrac{1}{2}AE\cdot FD=\dfrac{2}{5}x(6-x)$.

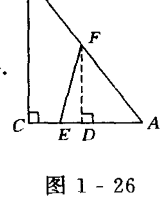


图 1 - 26

(2)假设存在直线 EF 将$\triangle ABC$ 的周长和面积同时平分，又 $AE=x$.

①若点 F 在斜边 AB 上，则由(1)可知

$S_{\triangle AEF}=\dfrac{2}{5}x(6-x)$，

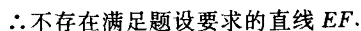
而$\dfrac{2}{5}x(6-x)=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=3$，

$\therefore 2x^2-12x+15=0$，解得 $x_1=3-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$x_2=3+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$(舍去).

此时，$AF=6-\left(3-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)=3+\dfrac{\sqrt{6}}{2}<5$.

$\therefore$存在直线 EF 将$\triangle ABC$ 的周长与面积同时平分，且 AE 为 $3-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

②若点 F 与 B 重合，如图 1 - 27，则由 $S_{\triangle AEB}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，可得 E 为 AC 的中点，由于 $BC<AB$，故 $BC+CE<AE+AB$.


$\therefore$不存在满足题设要求的直线 EF.

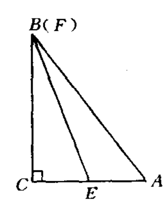


图 1 - 27

③若点 F 在 BC 上，如图 1 - 28，由 $AE=x$，得 $CE=3-x$.

又 $CE+CF=6$，故 $CF=6-(3-x)=3+x$.

$\therefore S_{\triangle CEF}=\dfrac{1}{2}CE\cdot CF=\dfrac{1}{2}(9-x^2)$，

由$\dfrac{1}{2}(9-x)^2=3$，解得 $x=\sqrt{3}$，$x=-\sqrt{3}$(舍去).

由于 $3+x_1=3+\sqrt{3}>4$，

$\therefore$不存在直线 EF 满足要求.

由①、②、③可知，当 $AE=3-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时，存在直线 EF 将$\triangle ABC$ 的周长、面积同时平分.

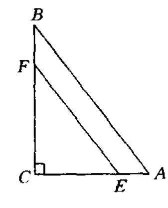
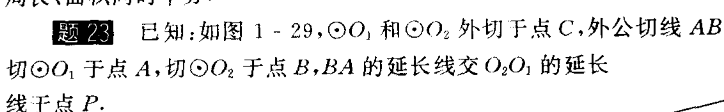
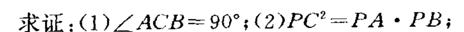


图 1 - 28


题23 已知：如图 1 - 29，$\odot O_1$ 和$\odot O_2$ 外切于点 C，外公切线 AB 切$\odot O_1$ 于点 A，切$\odot O_2$ 于点 B，BA 的延长线交 O_2O_1 的延长线于点 P.


求证：(1)$\angle ACB=90°$；(2)$PC^2=PA\cdot PB$；

(3)若 $AB=6\sqrt{2}$，两圆半径之差为 3，求以两圆的半径为根的一元二次方程.

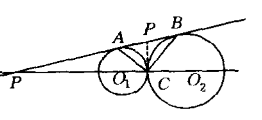


图 1 - 29

解 (1)过 C 作两圆的公切线交 AB 于 D，则 $DA=DC$，$DC=DB$，$\therefore 2CD=AB$，$\therefore$

$\angle ACB=90°$.

(2)以 D 为圆心,DC 为半径作圆,则⊙D 过 A、B、C 三点,且 $DC\perp PC$,即 PC 是⊙D 的切线,$\therefore PC^2=PA\cdot PB$.

(3)设⊙O_1 半径为 R_1,⊙O_2 半径为 R_2,

$AB=\sqrt{(R_1+R_2)^2-(R_2-R_1)^2}=6\sqrt{2}$,

$4R_1R_2=72$,$\therefore R_1R_2=18$.

又 $R_2-R_1=3$,$\therefore (R_2-R_1)^2=9$,

$(R_2+R_1)^2=(R_2-R_1)^2+4R_1R_2=9+4\times18=81$,

$\therefore R_1+R_2=9$,$(R_1+R_2>0)$.

则以 R_1、R_2 为半径的一元二次方程为 $x^2-9x+18=0$.

题24 已知:如图 1-30,矩形 $ABCD$ 中,$AB=5$,$AD=3$,过 B、C 两点的⊙O 交 CD 于 E,且⊙O 与 AD 不相交,AE 交⊙O 于点 F.

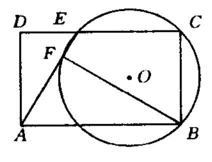


图 1-30

(1)求证:$\angle EAD=\angle ABF$;

(2)设 $AE=x$,$BF=y$,求 y 与 x 之间的函数关系式,并求出自变量 x 的取值范围;

(3)当$\triangle AEB$ 为等腰三角形时,求 y 的值(即 BF 的长).

解 (1)$\because \angle AFB=\angle C=90°$,$\angle D=90°$,$\therefore \angle AFB=\angle D$.

$\because \angle FAB+\angle ABF=90°$,$\angle EAD+\angle FAB=90°$,$\therefore \angle EAD=\angle ABF$.

(2)由(1)可知 $Rt\triangle ADE\backsim Rt\triangle BFA$,

$\therefore AD:BF=AE:BA$,$\therefore y=\dfrac{15}{x}$.

当⊙O 与 AD 相切时,AE 最小,此时 $DE\cdot DC=\left(\dfrac{1}{2}AD\right)^2$.

$\therefore DE=\dfrac{9}{20}$,$AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\dfrac{3}{20}\sqrt{409}$.

又 $AE<AC$,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{34}$,$\therefore \dfrac{3}{20}\sqrt{409}\leqslant x<\sqrt{34}$.

(3)$\triangle ABE$ 是等腰三角形时,有以下几种情况:

当 $AE=AB$ 时,$x=5$,则 $y=3$.

当 $AE=BE$ 时,$x=\sqrt{3^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{61}$,则 $y=\dfrac{30}{61}\sqrt{61}$.

当 $AB=BE$ 时,$CE=\sqrt{BE^2-BC^2}=4$,$DE=1$,$x=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{10}$,

则 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{10}$.

题25 已知:如图 1-31,梯形 $ABCD$ 中,$AB/\!/CD$,$\angle ABC=90°$,$AB=8$,$CD=6$,

$BC=\sqrt{m}$，在 AB 边上取动点 P，连结 DP，作 $PQ\perp DP$，使 PQ 交 BC 于点 E. 设 $AP=x$，$BE=y$.

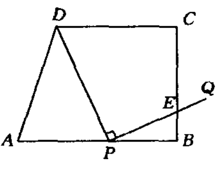


图 1 - 31

(1)试写出 y 关于 x 的函数关系式；

(2)如果在线段 AB 上能找到不同的两点 P_1、P_2，使得按上述作法得到的点 E 都与点 C 重合，试求 m 的范围，并用 m 表示相应的 AP_1、AP_2 的长.

解 (1)过 D 作 $DF\perp AB$ 于 F，则 $\angle DFP=\angle B=90°$.

又∵ $\angle DPE=90°$，∴ $\angle DPF+\angle EPB=90°$，$\angle EPB+\angle PEB=90°$，

∴ $\angle DPF=\angle PEB$，∴ $\triangle DFP\backsim\triangle PBE$.

∴ $\frac{DF}{PB}=\frac{PF}{BE}$，∴ $\frac{\sqrt{m}}{8-x}=\frac{x-2}{y}$，

∴ $y=-\frac{1}{\sqrt{m}}(x^2-10x+16)$，$(2<x<8)$.

(2)若 E 与 C 重合，则 $BE=BC=\sqrt{m}$，即 $y=\sqrt{m}$.

∴ $\sqrt{m}=-\frac{1}{\sqrt{m}}(x^2-10x+16)$，∴ $x^2-10x+16+m=0$.

由"P_1、P_2 是 AB 上两个不同的点"可知：x 有两个不同的值，方程 $x^2-10x+16+m=0$ 有两个不同的解，

∴ $\Delta=36-4m>0$，$m<9$，则 m 的范围是 $0<m<9$.

可求得 $x=\frac{10\pm\sqrt{100-4(16+m)}}{2}=5\pm\sqrt{9-m}$，

∴ $AP_1=5+\sqrt{9-m}$，$AP_2=5-\sqrt{9-m}$.

题 26 已知：如图 1 - 32，直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于点 A 和点 B，若 $OA=4$，且 OA、OB 的长是关于 x 的方程 $x^2-mx+12=0$ 的两个根，以 OB 为直径的⊙M 与 AB 交于 C，连结 CM 并延长交 x 轴于 N.

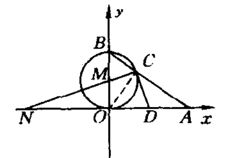


图 1 - 32

(1)求直线 AB 的解析式；

(2)求线段 AC 的长；

(3)求证：$NC^2=NO\cdot NA$；

(4)若点 D 为 OA 的中点，求证：CD 为⊙M 的切线.

解 (1)根据题意，得 $OB=3$，∴ $A(4,0)$，$B(0,3)$，

∴直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

(2)由勾股定理，得 $AB=5$，

又因为 AO 是⊙M 的切线，

$\therefore AO^2=AC\cdot AB, AC=\frac{16}{5}$.

(3)连结 OC，$\angle OCM+\angle MCB=90°$，且$\angle MCB=\angle MBC$，

$\therefore \angle OCM+\angle MBC=90°$.

又$\angle OAC+\angle MBC=90°$，$\therefore \angle OAC=\angle OCN$.

又$\angle CNO=\angle ANC$，$\therefore \triangle CNO\backsim\triangle ANC$，$\therefore NC^2=NO\cdot NA$.

(4)在 $Rt\triangle AOC$ 中，$\because D$ 为 OA 的中点，$\therefore DC=DO$，$\therefore \angle COD=\angle OCD$.

又 $MC=MO$，$\therefore \angle MOC=\angle MCO$，

而$\angle MOC+\angle COD=90°$，$\therefore \angle MCO+\angle OCD=90°$.

即 $CD\perp MC$，$\therefore CD$ 为$\odot M$ 的切线.

题 27 已知：如图 1 - 33，$\triangle ABC$ 内接于一圆，$\angle ACB=90°$，$AB=2\pi$，以 C 点为圆心的$\odot C$ 与 AB 相切于点 D，与 CA、CB 分别相交于 E、F，设$\angle CAB=\alpha$，$\angle CBA=\beta$，且 $\text{tg}\alpha$、$\text{tg}\beta$ 是一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根.

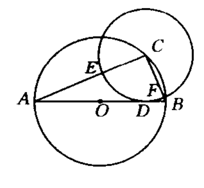


图 1 - 33

(1)若 $p+q=-1$，证明：方程 $x^2+px+q=0$ 有两个相等的实根；

(2)设面积 $S=S_{\triangle ABC}-S_{扇形CEF}$，试求 S 的最大值，当 S 为最大值时，p、q 的值各为多少？

解 (1)$\because q=\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta=1$，又 $p+q=-1$，$\therefore p=-2$.

$\therefore \Delta=p^2-4q=(-2)^2-4\times1=0$，

$\therefore$方程有两个相等的实根.

(2)连结 CD，则 $CD\perp AB$，设 $CD=x$，则

$$S=S_{\triangle ABC}-S_{扇形CEF}$$

$$=\frac{1}{2}CD\cdot AB-\frac{1}{4}\pi CD^2=\frac{1}{2}x\cdot 2\pi-\frac{1}{4}\pi x^2=-\frac{1}{4}\pi x^2+\pi x.$$

即 $S=-\frac{\pi}{4}(x-2)^2+\pi$，此时，$q=\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta=1$，

由 $-p=\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta=\frac{CD}{AD}+\frac{CD}{BD}=\frac{CD(AD+BD)}{AD\cdot BD}=\frac{2\cdot 2\pi}{AD\cdot BD}$.

又$\because \triangle ACD\backsim\triangle CBD$，$\therefore \frac{CD}{AD}=\frac{BD}{CD}$，即 $AD\cdot BD=CD^2=2^2=4$，

$\therefore -p=\frac{4\pi}{4}=\pi$，$p=-\pi$.

题 28 已知：如图 1 - 34，EB 是$\odot O$ 的直径，且 $EB=6$，在 BE 的延长线上取点 P，使 $EP=EB$. A 是 EP 上一点，过 A 作$\odot O$ 的切线 AD，切点为 D. 过 D 作 $DF\perp AB$ 于 F，过 B 作 AD 的垂线 BH，交 AD 的延长线于 H，连结 ED 和 FH.

(1)若 $AE=2$，求 AD 的长；

(2)当点 A 在 EP 上移动(点 A 与点 E 不重合)时,

①是否总有 $\frac{AD}{AH}=\frac{ED}{FH}$? 证明你的结论;

②设 $ED=x, BH=y$,求 y 与 x 的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围.

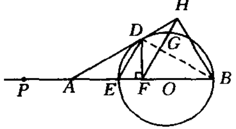


图 1 - 34

解 (1)∵AD 切⊙O 于 D,$AE=2, EB=6$,

∴$AD^2=AE\cdot AB=2\times(2+6)=16$,∴$AD=4$.

(2)①无论点 A 在 EP 上怎样移动,点 A 与点 E 不重合,都有 $\frac{AD}{AH}=\frac{ED}{FH}$.

连结 DB 交 FH 于 G.

∵AH 是⊙O 的切线,∴$\angle HDB=\angle DEB$.

又∵$BH\perp AH$,BE 为直径,∴$\angle BDE=90°$,

∴$\angle DBE=90°-\angle DEB=90°-\angle HDB=\angle DBH$.

在△DFB 和△DHB 中,

$DF\perp AB$,$\angle DFB=\angle DHB=90°$,$DB=DB$,$\angle DBE=\angle DBH$,

∴△DFB≌△DHB,

∴$BH=BF$,即△BHF 是等腰三角形,

∴$BG\perp FH$,$BD\perp FH$,∴$ED/\!/FH$,$\frac{AD}{AH}=\frac{ED}{EH}$.

②∵$ED=x$,$BH=y$,$BE=6$,$BF=BH$,∴$EF=6-y$.

又∵DF 是 Rt△BDE 斜边上的高,∴△DFE∽△BDE,∴$\frac{EF}{ED}=\frac{ED}{EB}$.

即 $ED^2=EF\cdot EB$,∴$x^2=6(6-y)$,即 $y=-\frac{1}{6}x^2+6$.

∵点 A 与点 E 不重合,∴$ED=x>0$,当 A 从 E 向左移动,ED 逐渐增大,当 A 和 P 重合时,ED 最大,这时,连结 OD,则 $OD\perp PH$,∴$OD/\!/BH$.

又 $PO=PE+EO=6+3=9$,$PB=12$,

$\frac{OD}{BH}=\frac{PO}{PB}$,$BH=\frac{OD\cdot PB}{PO}=4$,

∴$BF=BH=4$,$EF=EB-BF=6-4=2$.

由 $ED^2=EF\cdot EB$,得 $x^2=2\times6=12$,

∵$x>0$,∴$x=2\sqrt{3}$,∴$0<x\leqslant2\sqrt{3}$.

故所求函数关系式为 $y=-\frac{1}{6}x^2+6 \quad (0<x\leqslant2\sqrt{3})$.

题 29 已知:二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像过点 $A(2,4)$,顶点的横坐标为 $\frac{1}{2}$,它的图像与 x 轴交于两点 $B(x_1,0)$、$C(x_2,0)$,与 y 轴交于点 D,且 $x_1^2+x_2^2=13$. 试问:y 轴上是否存在点 P,使得△POB 与△DOC 相似(O 为坐标原点)? 若存在,请求出过 P、B 两点直线的解析式. 若不存在,请说明理由.

解 $\because y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴交于点 $B(x_1,0),C(x_2,0)$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$.

又 $x_1^2+x_2^2=13$，即 $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=13$，

$\therefore\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}=13.$ ①

又由函数的图像经过点 $A(2,4)$，顶点横坐标为 $\frac{1}{2}$，则有

$4a+2b+c=4$， ②

$-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$. ③

解由①、②、③组成的方程组，得

$a=-1,b=1,c=6$.

$\therefore y=-x^2+x+6$.

与 x 轴交点坐标为 $(-2,0)$，$(3,0)$，与 y 轴交点 D 的坐标为 $(0,6)$.

设 y 轴上存在点 P，使得 $\triangle POB\backsim\triangle DOC$，则

(1)如图 1-35，当 $B(-2,0)$，$C(3,0)$，$D(0,6)$ 时，有

$\frac{OB}{OC}=\frac{OP}{OD}$，$OB=2$，$OC=3$，$OD=6$，

$\therefore OP=4$，即点 P 坐标为 $(0,4)$ 或 $(0,-4)$.

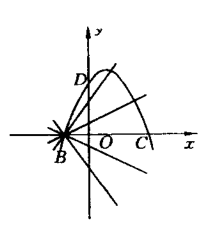


图 1-35

当 P 点坐标为 $(0,4)$ 时，可设过 P、B 两点直线解析式为 $y=kx+4$.

则 $0=-2k+4$，$k=2$，$\therefore y=2x+4$.

当 P 点坐标为 $(0,-4)$ 时，可设过 P、B 两点直线的解析式为 $y=kx-4$.

则 $0=-2k-4$，$k=-2$，$\therefore y=-2x-4$，

或 $\frac{OB}{OD}=\frac{OP}{OC}$，$OB=2$，$OD=6$，$OC=3$，

$\therefore OP=1$，这时 P 点坐标为 $(0,1)$ 或 $(0,-1)$.

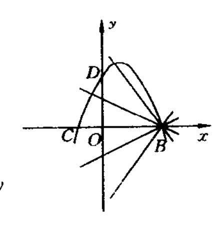


图 1-36

当 P 点坐标为 $(0,1)$ 时，可设过 P、B 两点直线的解析式为 $y=kx+1$. 则 $0=-2k+1$，得 $k=\frac{1}{2}$，

$\therefore y=\frac{1}{2}x+1$.

当 P 点坐标为 $(0,-1)$ 时，可设过 P、B 两点直线的解析式为 $y=kx-1$. 则 $0=-2k-1$，得 $k=-\frac{1}{2}$，

$\therefore y=-\frac{1}{2}x-1$.

(2)如图 1 - 36，当 $B(3,0)$，$C(-2,0)$，$D(0,6)$时，同理可得

$y=-3x+9$，或 $y=3x-9$，或 $y=-\frac{1}{3}x+1$，或 $y=\frac{1}{3}x-1$.

题30 已知：二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+6$ 的图像与 x 轴从左到右的两个交点依次为 A、B，与 y 轴的交点为 C.

(1)求 A、B、C 三点的坐标；

(2)求过 B、C 两点的一次函数的解析式；

(3)如果 $P(x,y)$是线段 BC 上的动点，O 为坐标原点，试求$\triangle POA$ 的面积 S 与 x 之间的函数关系式，并求出自变量 x 的取值范围；

(4)是否存在这样的点 P，使得 $PO=AO$，若存在，求出点 P 的坐标，若不存在，说明理由.

解 (1)由 $y=0$，$\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x+6=0$ 可得 $x_1=4$，$x_2=6$.

由 $x=0$，可得 $y=6$.

$\therefore A(4,0)$，$B(6,0)$，$C(0,6)$.

(2)易知过 B、C 两点的一次函数的解析式为

$y=-x+6$.

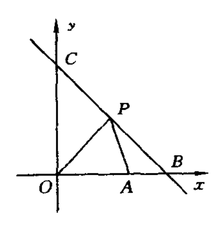


图 1 - 37

(3)$S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}\times4\times y=-2x+12$，$0\leqslant x\leqslant6$.

(4)$\because OB=OC$，$\angle COB=90°$，$\triangle BOC$ 是等腰直角三角形.

当 $OP\perp BC$ 时，OP 最短.

$OP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\sqrt{36+36}=3\sqrt{2}$.

而 $OA=4<\sqrt{18}$，

$\therefore$不存在这样的点 P，使得 $OP=OA$.

题31 已知：正方形 $ABCD$ 的边 AB 是$\odot O$ 的弦，CF 切$\odot O$ 于点 E，交 AD 于点 F，且切点 E 在正方形的内部，AE、BE 的长是方程 $x^2-3x+m=0$ 的两个实根.

(1)当 AB 是$\odot O$ 的直径时，如图 1 - 38. ①用含 m 的代数式表示 AB 的长；②求 m 的值和 AF 的长；

(2)当 AB 不是$\odot O$ 的直径时，$\triangle ABE$ 能否与以 B、C、E 为顶点的三角形相似？请说明理由. 若相似，求 $AE+AB$ 的长.

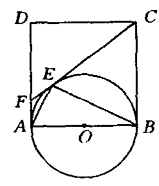
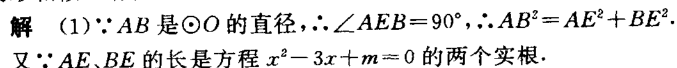


图 1 - 38



解 (1)$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径，$\therefore\angle AEB=90°$，$\therefore AB^2=AE^2+BE^2$.

又$\because AE$、BE 的长是方程 $x^2-3x+m=0$ 的两个实根.

$\therefore AE+BE=3$，$AE\cdot BE=m$.

$\therefore AB^2=(AE+BE)^2-2AE\cdot BE=9-2m$，

$\therefore AB=\sqrt{9-2m}$，$(0<m\leqslant\frac{9}{4})$

②$m=AE\cdot BE=2$，$AF=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

(2)①当圆心 O 在正方形 $ABCD$ 外时，$\angle AEB=90°$，则$\triangle AEB$ 是钝角三角形，而$\triangle ECB$ 是锐角三角形，$\therefore\triangle AEB$ 不可能与$\triangle CEB$ 相似.

②当圆心 O 在正方形 $ABCD$ 内时，$\angle AEB<90°$，$\because CF$ 切$\odot O$ 于 E，

$\therefore\angle CEB=\angle EAB$.

要使$\triangle ECB\backsim\triangle ABC$，只需$\angle EBC=\angle AEB$，则 $AE/\!/BC$，这是不可能的，$\therefore$此时$\triangle ECB$ 与$\triangle ABE$ 不相似.

要使$\triangle EBC\backsim\triangle ABE$，只需$\angle EBC=\angle ABE$，此时 E 在对角线 BD 上，$\therefore\triangle EBC\backsim\triangle ABE$，$\therefore\frac{BE}{BA}=\frac{BC}{BE}$，$\therefore BE^2=BA\cdot BC=AB^2$.

$\therefore AB=BE(AB>0,BE>0)$，$\therefore AE+AB=AE+BE=3$.

题 32 已知抛物线 $y=\frac{1}{8}x^2+3mx+18m^2-m$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)(x_1<x_2)$两点，与 y 轴交于点 $C(0,b)$，O 为原点.

(1)求 m 的取值范围；

(2)若 $m>\frac{1}{18}$，且 $OA+OB=3OC$，求抛物线的解析式及 A、B、C 的坐标；

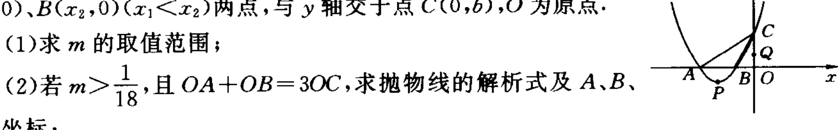


图 1 - 39

(3)在(2)的情形下，点 P、Q 分别从 A、O 两点同时出发，如图 1 - 39，以相同的速度沿 AB、OC 向 B、C 运动，连结 PQ 与 BC 交于 M，设 $AP=k$，问是否存在 k 值，使以 P、B、M 为顶点的三角形与$\triangle ABC$ 相似，若存在，求所有 k 值；若不存在，请说明理由.

解 (1)$\because$抛物线 $y=\frac{1}{8}x^2+3mx+18m^2-m$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)(x_1<x_2)$两点，

$\therefore\Delta=(3m)^2-4\times\frac{1}{8}(18m^2-m)=9m^2-9m^2+\frac{1}{2}m>0$，$\therefore m>0$.

(2)$\because m>\frac{1}{18}$，$\therefore x_1<0,x_2<0$，由 $OA+OB=3\cdot OC$，

$\therefore -x_1-x_2=3(18m^2-m)$，

$\therefore 24m=3(18m^2-m)$，解得 $m=0$(舍去)，$m=\frac{1}{2}$.

$\therefore y=\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x+4$，$\therefore A(-8,0)$，$B(-4,0)$，$C(0,4)$.

(3)当 $PQ/\!/AC$ 时，$\triangle ABC\backsim\triangle PBM$.

则$\frac{AP}{PO}=\frac{CQ}{QO}$，即$\frac{k}{8-k}=\frac{4-k}{k}$，$\therefore k=\frac{8}{3}$.

当 PQ 不与 AC 平行，$\angle CAB=\angle PMB$ 时，$\triangle ABC\backsim\triangle MBP$，过 B 作 AC 的垂线，D 为垂足．

$\sin A=\frac{BD}{AB}=\frac{CO}{AC}$，$\therefore BD=\frac{16}{\sqrt{80}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$．

$\because\angle ACB=\angle MPB$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle CDB\backsim\mathrm{Rt}\triangle POQ$，$\therefore\frac{BD}{OQ}=\frac{BC}{PQ}$．

$\therefore\frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{k}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{k^2+(8-k)^2}}$，解得 $k=2$．

$\therefore$存在符合题目条件的 k，即当 $k=\frac{8}{3}$ 或 $k=2$ 时，所得三角形与 $\triangle ABC$ 相似．

题 33 已知 $\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle CAB=\alpha$（定值），圆 O 的圆心 O 在 AB 上，并分别与 AC、BC 相切于 P、Q．

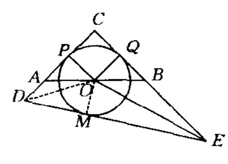


图 1 - 40

(1)求 $\angle POQ$ 的大小（用 α 表示）；

(2)设 D 是 CA 延长线上的一个动点，DE 与圆 O 相切于点 M，点 E 在 CB 的延长线上，试判断 $\angle DOE$ 的大小是否保持不变，并说明理由；

(3)在(2)的条件下，如果 $AB=m$（m 为已知数），$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，设 $AD=x$，$DE=y$，求 y 关于 x 的函数解析式（要指出函数的自变量取值范围）．

解 (1)$\because AC=BC$，$\therefore\angle OAP=\angle OBQ=\alpha$．

$\because$圆 O 分别和 AC、BC 相切于点 P、Q，

$\therefore\angle OPA=\angle OQB=90^\circ$．

$\therefore\angle AOP=\angle BOQ=90^\circ-\alpha$，$\angle POQ=180^\circ-2(90^\circ-\alpha)=2\alpha$．

(2)$\angle DOE$ 的大小保持不变．理由如下：连结 OM，则 $EM=EQ$．

又$\because OM=OQ$，$OE=OE$，

$\therefore\triangle OEM\cong\triangle OEQ$，$\therefore\angle MOE=\angle QOE$．

同理，$\angle MOD=\angle POD$，

$\therefore\angle DOE=\frac{1}{2}(\angle POM+\angle QOM)=\frac{1}{2}(360^\circ-\angle POQ)=180^\circ-\alpha$．

$\because\alpha$ 为定值，$\therefore\angle DOE$ 的大小不变．

(3)由 $OP=OQ$，O 是 AB 的中点，$\therefore OA=OB=\frac{1}{2}AB=\frac{m}{2}$．

$AP=BQ=AO\cdot\cos\alpha=\frac{3}{10}m$，$DM=DP=\frac{3}{10}m+x$．

在 $\triangle ADO$ 和 $\triangle BOE$ 中，$\angle DAO=\angle OBE=180^\circ-\alpha$．

$\because\angle ADO+\angle AOD=\angle OAP=\alpha$．

又 $\angle BOE+\angle AOD=180^\circ-\angle DOE=\alpha$．

$\therefore \angle ADO=\angle BOE$，$\therefore \triangle ADO \backsim \triangle BOE$.

$\therefore \dfrac{BE}{AO}=\dfrac{BO}{AD}$，$BE=\dfrac{AO \cdot BO}{AD}=\dfrac{m^2}{4x}$.

$\therefore ME=QE=QB+BE=\dfrac{3}{10}m+\dfrac{m^2}{4x}$.

$\therefore DE=DM+ME=\dfrac{3}{10}m+x+\dfrac{3}{10}m+\dfrac{m^2}{4x}=x+\dfrac{m^2}{4x}+\dfrac{3}{5}m$.

∴所求函数的解析式为 $y=x+\dfrac{m^2}{4x}+\dfrac{3}{5}m\ (x>0)$.

题34 已知：如图 1－41，抛物线 $y=mx^2-8mx-4\sqrt{3}$，与 x 轴交于 A、B 两点，OA 长为 a，OB 长为 b.

(1)若 $a:b=1:3$，求 m 的值及抛物线的对称轴方程；

(2)在第一象限的抛物线上有一点 C，恰使$\triangle OCA \backsim \triangle OBC$，$BC$ 的延长线交 y 轴于 P，若 C 是 BP 的中点，求 C 点的坐标；

(3)求$\dfrac{BC}{AC}$的值及$\angle COA$ 的度数.

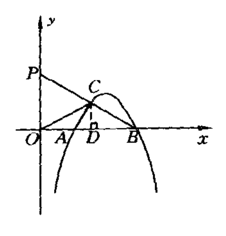
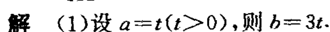


图 1－41



解 (1)设 $a=t(t>0)$，则 $b=3t$.

$\because t$ 与 $3t$ 是方程 $mx^2-8mx-4\sqrt{3}=0$ 的两个根，

$\therefore \begin{cases} 3t+t=8, \\ 3t \cdot t=-\dfrac{4\sqrt{3}}{m}. \end{cases}$ 解得 $t=2$，$m=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

∴对称轴方程为 $x=4$.

(2)$\because \triangle OCA \backsim \triangle OBC$，$\therefore \dfrac{OC}{OA}=\dfrac{OB}{OC}$，$\therefore OC^2=OA \cdot OB$.

由(1)知，$OA=2$，$OB=6$，$\therefore OC^2=12$，$OC=2\sqrt{3}$.

$\because OC$ 是 Rt$\triangle OBP$ 斜边 BP 上的中线，

$\therefore BP=2OC=4\sqrt{3}$.

令 $C(x,y)$，作 $CD \perp x$ 轴，垂足为 D，则 D 是 OB 的中点，

$\therefore OD=3$，即 $x=3$.

从而 $y=\sqrt{OC^2-OD^2}=\sqrt{3}$，∴$C$ 点坐标为$(3,\sqrt{3})$.

(3)由$\triangle OCA \backsim \triangle OBC$，得$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{OC}{OA}=\sqrt{3}$，

又 $\sin COA=\dfrac{CD}{OC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \angle COA=30°$.

题35 已知：如图 1－42，有一边长为 5cm 的正方形 $ABCD$ 和等腰$\triangle PQR$，$PQ=PR=5$cm，$QR=8$cm，点 B、C、Q、R 在同一条直线 l 上，当 C、Q 两点重合时，等腰$\triangle PQR$

以 1 厘米/秒的速度沿直线 l 按箭头所示方向开始匀速运动，t 秒后正方形 $ABCD$ 与等腰$\triangle PQR$ 重合部分的面积为 S 厘米^2.

(1)当 $t=3$ 秒时，求 S 的值；

(2)当 $t=5$ 秒时，求 S 的值；

(3)当 $5\leqslant t\leqslant 8$ 时，求 S 与 t 的函数关系式，并求出 S 的最大值.

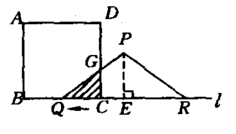


图 1 - 42

解 (1)作 $PE\perp QR$，E 为垂足.

$\because PQ=PR$，$\therefore QE=RE=\frac{1}{2}QR=4$.

$\therefore PE=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

当 $t=3$ 时，$CQ=3$. 设 PQ 与 CD 交于点 G.

$\because PE/\!/DC$，$\therefore \triangle QCG\backsim\triangle QEP$，$\therefore \frac{S}{S_{\triangle QEP}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$，

$\because S_{\triangle QEP}=\frac{1}{2}\times 4\times 3=6$，$\therefore S=\left(\frac{3}{4}\right)^2\times 6=\frac{27}{8}\text{cm}^2$.

(2)当 $t=5$ 时，$CR=3$，设 PR 与 CD 交于 G.

由$\triangle RCG\backsim\triangle REP$，可得 $S_{\triangle RCG}=\frac{27}{8}$，$S=S_{\triangle PQR}-S_{\triangle GCR}=\frac{69}{8}\text{cm}^2$.

(3)当 $5\leqslant t\leqslant 8$ 时，$QB=t-5$，$RC=8-t$.

设 PQ 交 AB 于点 H，

由$\triangle QBH\backsim\triangle QEP$，可得 $S_{\triangle QBH}=\frac{3}{8}(t-5)^2$，

由$\triangle RCG\backsim\triangle REP$，可得 $S_{\triangle RCG}=\frac{3}{8}(8-t)^2$，

$\therefore S=12-\frac{3}{8}(t-5)^2-\frac{3}{8}(8-t)^2$.

即 $S=-\frac{3}{4}t^2+\frac{39}{4}t-\frac{171}{8}$，当 $t=\frac{13}{2}$ 时，S 最大，S 的最大值为 $\frac{165}{16}\text{cm}^2$.

题 35 已知：AB 是$\odot O$ 中一条长为 4 的弦，P 是$\odot O$ 上一动点，$\cos APB=\frac{1}{3}$. 问是否存在以 A、P、B 为顶点的面积最大的三角形，试说明理由；若存在，求出这个三角形的面积.

解 存在以 A、P、B 为顶点的面积最大的三角形.

$\because \cos APB=\frac{1}{3}$，$\therefore \angle APB\neq 90°$，$\therefore AB$ 不是$\odot O$ 的直径.

如图 1 - 43，取$\overset{\frown}{AB}$的中点 P，作 $PD\perp AB$ 于 D.

则 PD 为弓形高，且 PD 所在直线必过圆心 O.

$\because$当点 P 在优弧上时，PD 大于$\odot O$ 半径；当点 P 在劣弧上时，PD 小于$\odot O$ 半径，

$\therefore$优弧与弦 AB 构成的弓形的高大于劣弧与弦 AB 构成的弓形的高.

∴点 P 必在优弧上.

∵AB 的长为定值,

∴当点 P 为优弧中点时,$\triangle APB$ 的面积最大.

连结 PA、PB.

则等腰三角形 APB 为所求的三角形.

作⊙O 直径 AC,连结 BC,$\angle ABC=90°$,$\angle APB=\angle C$.

∴$\cos APB=\cos C=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{1}{3}$.

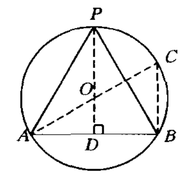


图 1 - 43

设 $BC=x$,则 $AC=3x$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AB=4$,由勾股定理,得

$AC^2=AB^2+BC^2$,∴$(3x)^2=4^2+x^2$.

解得 $x=\pm\sqrt{2}$(舍去负值),

∴$BC=\sqrt{2}$,$AC=3\sqrt{2}$.

∴$PO=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

∵$AO=OC$,$AD=DB$,∴$OD=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

∴$PD=PO+OD=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$,

∴$S_{\triangle APB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot PD=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

题 37 已知一条抛物线经过 $A(0,3)$、$B(4,6)$两点,对称轴为 $x=\dfrac{5}{3}$.

(1)求这条抛物线的解析式;

(2)试证明这条抛物线与 x 轴的两个交点中,必有一点 C,使得对于 x 轴上任意一点 D,都有 $AC+BC\leqslant AD+BD$.

解 (1)设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$,A 点关于 $x=\dfrac{5}{3}$的对称点为 A',则 $A'\left(\dfrac{10}{3},3\right)$. 根据题意,有

$$\begin{cases}16a+4b+c=6,\\ \left(\dfrac{10}{3}\right)^2a+\dfrac{10}{3}b+c=3,\\ c=3.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=\dfrac{9}{8},\\ b=-\dfrac{15}{4},\\ c=3.\end{cases}$$

∴抛物线的解析式为 $y=\dfrac{9}{8}x^2-\dfrac{15}{4}x+3$.

(2)设$\dfrac{9}{8}x^2-\dfrac{15}{4}x+3=0$,

解得 $x_1=\frac{4}{3}$，$x_2=2$.

∴抛物线与 x 轴的两个交点的坐标分别是 $\left(\frac{4}{3},0\right)$、$(2,0)$.

设点 A 关于 x 轴的对称点为 E，则 $E(0,-3)$.

设直线 BE 的解析式为 $y=mx+n$.

由直线 $y=mx+n$ 经过 $B(4,6)$、$E(0,-3)$ 两点，

得 $m=\frac{9}{4}$，$n=-3$，∴$y=\frac{9}{4}x-3$.

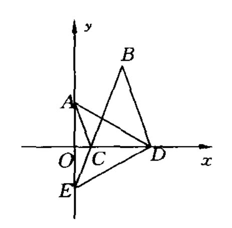


图 1 - 44

易知，直线 $y=\frac{9}{4}x-3$ 与 x 轴的交点坐标是 $\left(\frac{4}{3},0\right)$.

设 $C\left(\frac{4}{3},0\right)$，则点 C 恰为抛物线与 x 轴的一个交点.

在 x 轴上任意取一点 D，连结 AC、AD、BD、ED.

若点 D 与点 C 为同一点，则 $AC+BC=AD+BD$；

若点 D 与点 C 不同，在 $\triangle BED$ 中，有 $BE<ED+BD$.

∵$BE=EC+BC$，$EC=AC$，$ED=AD$，∴$AC+BC<AD+BD$.

∴对 x 轴上任意一点 D，都有 $AC+BC\leqslant AD+BD$.

题 38 已知关于 x 的二次函数 $y=x^2+(2k-1)x+k^2-1$.

(1)若关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2k-1)x+k^2-1=0$ 的两根的平方和等于 9，求 k 的值；

(2)在(1)的条件下，设这个二次函数的图像与 x 轴从左至右交于 A、B 两点. 问在对称轴右边的图像上，是否存在点 M，使锐角三角形 AMB 的面积等于 3？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3)在(1)、(2)条件下，若点 P 是二次函数图像上的点，且 $\angle PAM=90°$，求 $\triangle APM$ 的面积.

解 (1)由题设有 $\Delta=(2k-1)^2-4(k^2-1)=-4k+5\geqslant 0$，∴$k\leqslant\frac{5}{4}$.

又 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=[-(2k-1)]^2-2(k^2-1)$

$=2k^2-4k+3=9$，

∴$k^2-2k-3=0$，解得 $k_1=-1$，或 $k_2=3$.

∵$k\leqslant\frac{5}{4}$，∴$k=-1$.

(2)由(1)可知，二次函数的解析式为 $y=x^2-3x=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$.

令 $y=0$，得 $x^2-3x=0$，∴$x_1=0$，$x_2=3$.

∴$A(0,0)$，$B(3,0)$.

假设点 M 存在，并设其坐标为 (x_0,y_0)，如图 1 - 45.

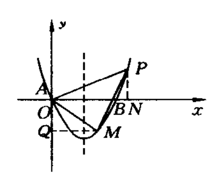


图 1 - 45

由题意知△AMB是锐角三角形，故

$\frac{3}{2}<x_0<3$，∴$y_0<0$.

则$S_{\triangle AMB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot|y_0|=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot|y_0|=3$，

∴$|y_0|=2$，$y_0=\pm 2$，舍去正值，$y_0=-2$.

当$y_0=-2$时，$x_0^2-3x_0=-2$，

∴$x_0=1$或$x_0=2$.

∵$1<\frac{3}{2}$，∴$x_0=1$应舍去，而$\frac{3}{2}<2<3$，∴$x_0=2$满足条件.

∴这样的点M存在，坐标为$(2,-2)$.

(3)∵$M(2,-2)$，∴$\angle MAx=45°$，∴$\angle xAP=45°$.

∴AP所在直线的方程为$y=x$.

∵点P在$y=x$和$y=x^2-3x$上，

$$\therefore\begin{cases}y=x, & ①\\ y=x^2-3x. & ②\end{cases}$$

把①代入②，得$x^2-4x=0$.

∴$x_1=0$(舍去)，$x_2=4$，此时$y=4$，∴$P(4,4)$.

过P作$PN\perp x$轴于N，在Rt△PNA中，由勾股定理，可得$AP=4\sqrt{2}$.

过M作$MQ\perp y$轴于Q，在Rt△MQA中，由勾股定理，可得$AM=2\sqrt{2}$.

∴$S_{\triangle AMP}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=8$.

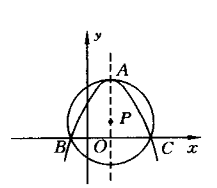
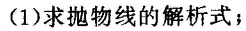


图 1 - 46

题39 已知：如图 1 - 46，抛物线$y=ax^2+bx+c(a<0)$的顶点A在以$P(1,1)$为圆心，2为半径的圆上，且经过⊙P与x轴的两个交点B、C.



(1)求抛物线的解析式；

(2)求⊙P的弦AC在第一象限内形成的弓形面积；

(3)在抛物线上能否找到一点D，使线段DP与OA相互平分？如果有，写出D的坐标；如果没有，说明理由.

解 (1)由已知条件，得$B(-\sqrt{3}+1,0)$，$C(\sqrt{3}+1,0)$，$A(1,3)$.

$$\therefore\begin{cases}(-\sqrt{3}+1)^2a+(-\sqrt{3}+1)b+c=0,\\ (\sqrt{3}+1)^2a+(\sqrt{3}+1)b+c=0,\\ a+b+c=3.\end{cases}$$

解得$a=-1$，$b=2$，$c=2$.

∴$y=-x^2+2x+2$.

(2)连结PC，求出$\angle PCO=30°$，得$\angle APC=120°$，

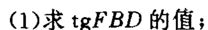
由 $S_{扇形PAC}=\dfrac{120\pi\cdot 2^2}{360}=\dfrac{4}{3}\pi$，$S_{\triangle APC}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$．

$\therefore S_{弓形}=S_{扇形PAC}-S_{\triangle APC}=\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$．

(3)在抛物线上能找到一点 D，使 DP 与 OA 互相平分．

这点就是抛物线与 y 轴的交点，坐标为(0,2)．

$\because Oy\parallel AP$，且 $AP=2$，若 DP 与 OA 互相平分，则 $DOPA$ 为平行四边形，则 $OD=2$，而点(0,2)在抛物线 $y=-x^2+2x+2$ 上．


题10　已知：如图 1-47，$\odot A$ 的圆心在 x 轴上，$\odot A$ 与 x 轴交于 D、E 两点，与 y 轴交于 B、C 两点，过点 B 作$\odot A$ 的切线 BF 交 x 轴于点 F．若$\odot A$ 的半径为 5，$OB=4$．

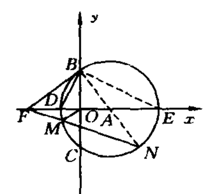


图 1-47

(1)求 $\mathrm{tg}FBD$ 的值；

(2)求切线 BF 的解析式；

(3)在劣弧 $\overset{\frown}{DC}$ 上有任意一点 M 自 D 向 C 移动(M 与 C、D 不重合)，连结 FM，并延长交 $\overset{\frown}{CE}$ 于点 N，设 $OM=x$，$FN=y$．求 y 与 x 之间的函数关系式，并求出自变量 x 的取值范围．

解　(1)连结 AB、BE．

在 Rt$\triangle AOB$ 中，

$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$．

$\because BF$ 是$\odot A$ 的切线，$\therefore \angle FBD=\angle E$，

$\therefore \mathrm{tg}FBD=\mathrm{tg}E=\dfrac{OB}{OE}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$．

(2)$\because BF$ 是$\odot A$ 的切线，

$\therefore AB\perp BF$，又 $OB\perp AF$，$\therefore \triangle FBO\backsim\triangle BAO$，

$\therefore OB^2=OA\cdot OF$，$OF=\dfrac{OB^2}{OA}=\dfrac{16}{3}$．

$\therefore F\left(-\dfrac{16}{3},0\right)$，且 $B(0,4)$．

设直线 BF 的解析式为 $y=\dfrac{3}{4}x+4$．

则$\begin{cases}b=4,\\ -\dfrac{16}{3}k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=4,\\ k=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

$\therefore$直线 BF 的解析式为 $y=\dfrac{3}{4}x+4$．

(3)连结 AN．

$\because \triangle FBO\backsim\triangle FAB$，$\therefore FB^2=FO\cdot FA$，

又 $FB^2=FM\cdot FN$，

$\therefore FO \cdot FA = FM \cdot FN$，$\therefore \dfrac{FO}{FM} = \dfrac{FN}{FA}$.

且$\angle OFM = \angle NFA$，$\therefore \triangle FOM \backsim \triangle FNA$，

$\therefore \dfrac{OM}{AN} = \dfrac{OF}{FN}$，$\therefore \dfrac{x}{5} = \dfrac{\frac{16}{3}}{y}$，

$\therefore y = \dfrac{80}{3x}$，$(2 < x < 4)$.

题41 已知：如图 1 - 48，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD /\!/ BC$，$\angle ABC = 90°$，上底 $AD = a$，下底 $BC = b$，高为 h，以腰 CD 为直径的圆与 AB 的交点为 M. 求证：MA、MB 的长是方程 $x^2 - hx + ab = 0$ 的两个根.

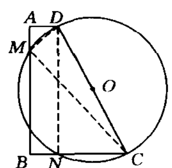


图 1 - 48

证法 1 $\because MA + MB = AB = h$. ①

连结 MC、MD.

$\because \angle CMD = 90°$，

$\therefore \angle AMD + \angle BMC = \angle AMD + \angle ADM = 90°$，

$\therefore \angle BMC = \angle ADM$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle AMD \backsim \mathrm{Rt}\triangle BCM$.

$\therefore \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{BC}{BM}$，$\therefore MA \cdot BM = AD \cdot BC = ab$. ②

由①、②得 MA、MB 是方程 $x^2 - hx + ab = 0$ 的两个根.

证法 2 设圆的直径 $CD = d$，连结 DN.

$\because \angle DNC = 90°$，又$\angle ABC = 90°$，$\angle DAB = 90°$，

$\therefore ABND$ 为矩形.

$\therefore AD = BN$，即 $NC = b - a$，$DN = d$.

$\therefore d^2 = h^2 + (b-a)^2$. ①

又$\because d^2 = MD^2 + MC^2 = AD^2 + AM^2 + MB^2 + BC^2 = a^2 + b^2 + AM^2 + MB^2$. ②

由①、②得

$a^2 + b^2 + AM^2 + MB^2 = h^2 + a^2 - 2ab + b^2$，

$\therefore AM^2 + MB^2 = h^2 - 2ab$.

$\therefore (AM + MB)^2 - 2AM \cdot MB = h^2 - 2ab$，

$\therefore 2AM \cdot MB = 2ab$，即 $AM \cdot MB = ab$.

且 $AM + MB = h$，$\therefore AM$、MB 是方程 $x^2 - hx + ab = 0$ 的两个根.

题42 已知：如图 1 - 49，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 90°$，$AB = 10$，$BC = 8$. 点 D 在 BC 上运动（不运动至 B、C），$DE /\!/ CA$ 交 AB 于 E. 设 $BD = x$，$\triangle ADE$ 的面积为 y.

(1)求 y 关于 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围；

(2)何时$\triangle ADE$ 的面积最大，最大面积是多少？

(3)求当 $\mathrm{tg}ECA = 4$ 时，$\triangle ADE$ 的面积.

解 (1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

$\therefore \text{tg}B=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

$\because DE/\!/AC$，$\therefore \angle BDE=\angle BCA=90°$，

$\therefore DE=BD\cdot \text{tg}B=\frac{3}{4}x$，$CD=BC-BD=8-x$.

在$\triangle ADE$ 中，设 DE 上的高为 h，

$\because DE/\!/AC$，$\therefore h=CD$.

$\therefore y=\frac{1}{2}DE\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x(8-x)=-\frac{3}{8}x^2+3x$.

自变量 x 的取值范围是 $0<x<8$.

(2)当 $x=4$ 时，(此时满足 $0<x<8$)，y 的最大值为 8.

(3)$\because DE/\!/AC$，$\therefore \angle ECA=\angle CED$，$\therefore \text{tg}ECA=\text{tg}CED=4$，

即$\frac{CD}{DE}=4$，$\frac{8-x}{\frac{3}{4}x}=4$.

$\therefore x=2$ 时，$y=-\frac{3}{8}x^2+3x=\frac{9}{2}$，即$\triangle ADE$ 的面积为$\frac{9}{2}$.

图 1-49

题 43 已知抛物线 $y=mx^2-\left(3m+\frac{4}{3}\right)x+4$ 与 x 轴交于两点 A、B，与 y 轴交于 C 点，若$\triangle ABC$ 是等腰三角形，求抛物线的解析式.

解 $\because y=mx^2-\left(3m+\frac{4}{3}\right)x+4$，

$\therefore$当 $x=0$ 时，$y=4$；

当 $mx^2-\left(3m+\frac{4}{3}\right)x+4=0$，$m\neq 0$ 时，

$x_1=3$，$x_2=\frac{4}{3m}$.

则抛物线与 y 轴的交点为 $C(0,4)$，与 x 轴的交点为 $A(3,0)$，$B\left(\frac{4}{3m},0\right)$.

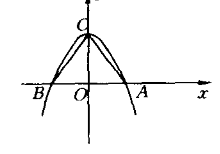


图 1-50

(1)若 $AC=BC$，则有$\frac{4}{3m}=-3$，$m=-\frac{4}{9}$，

$\therefore y=-\frac{4}{9}x^2+4$，如图 1-50.

(2)若 $AC=AB$，

$\because AO=3$，$OC=4$，$\therefore AC=5$，

$\therefore \left|3-\frac{4}{3m}\right|=5$，$\therefore m_1=\frac{1}{6}$，$m_2=-\frac{2}{3}$.

当 $m_1=\frac{1}{6}$时，$y=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{6}x+4$；

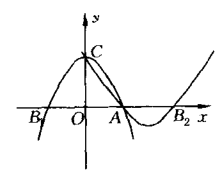


图 1-51

当 $m_2=-\frac{2}{3}$ 时，$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$，如图 1 - 51.

(3)若 $AB=BC$ 时，如图 1 - 52，则有

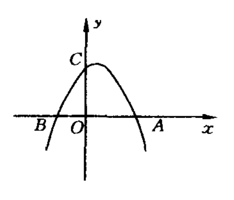


图 1 - 52

$\left|3-\frac{4}{3m}\right|=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3m}\right)^2}$，

$\therefore m=-\frac{8}{7}$，

$\therefore y=-\frac{8}{7}x^2+\frac{44}{21}x+4$.

综上所述，所求抛物线的解析式为 $y=-\frac{4}{9}x^2+4$ 或 $y=\frac{1}{6}x^2-\frac{11}{6}x+4$ 或 $y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+4$ 或 $y=-\frac{8}{7}x^2+\frac{44}{21}x+4$.

题 11 已知：二次函数 $y=ax^2+bx+c$，其中 $a>0$，$b^2-4a^2c^2=0$，它的图像与 x 轴只有一个交点，交点为 A，与 y 轴交于点 B，且 $AB=2$.

(1)求二次函数的解析式；

(2)当 $b<0$ 时，过 A 的直线 $y=x+m$ 与二次函数的图像交于点 C，在线段 BC 上依次取 D、E 两点，若 $DE^2=BD^2+EC^2$，试确定 $\angle DAE$ 的度数，并简述求解过程.

解 (1)$\because y=ax^2+bx+c$ 的图像与 x 轴只有一个交点，

$\therefore$ 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta=b^2-4ac=0$.

又 $\because b^2-4a^2c^2=0$，$4a^2c^2=4ac\geqslant 0$.

由 $AB=2$，$\therefore A$ 与 B 不重合，又 $a>0$，$\therefore c>0$.

$\therefore ac=1$. ①

$\therefore b^2=4$，解得 $b=\pm 2$.

$\therefore$ 二次函数与 x 轴、y 轴交点坐标为 $A\left(\frac{1}{a},0\right)$，$B(0,c)$ 或 $A\left(-\frac{1}{a},0\right)$，$B(0,c)$.

在 Rt$\triangle ABO$ 中，$OA^2+OB^2=AB^2$，$OA=\left|\pm\frac{1}{a}\right|=\frac{1}{a}$，$OB=c$，$AB=2$，

$\therefore \left(\frac{1}{a}\right)^2+c^2=4$，

整理，得 $1+a^2c^2=4a^2$. ②

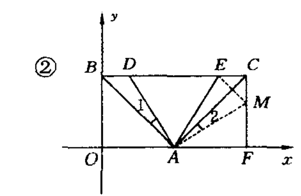
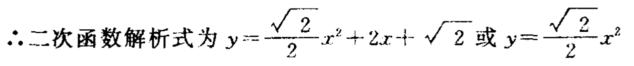


图 1 - 53

把①代入②，解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$（舍去）.

把 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入①得 $c=\sqrt{2}$.



$\therefore$ 二次函数解析式为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2+2x+\sqrt{2}$ 或 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$

$-2x+\sqrt{2}$.

(2)当 $b<0$ 时，由二次函数的解析式 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-2x+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2})^2$，得 $A(\sqrt{2},0)$，$B(0,\sqrt{2})$.

又∵直线 $y=x+m$ 过点 $A(\sqrt{2},0)$，

∴$m=-\sqrt{2}$，$y=x-\sqrt{2}$.

由$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-2x+\sqrt{2}, \\ y=x-\sqrt{2}. \end{cases}$

解得 $x=2\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$.

∴直线与二次函数图像交点 C 的坐标为$(2\sqrt{2},\sqrt{2})$.

过 C 点作 $CF\perp x$ 轴，垂足为 F，可得 $AB=AC$，$\angle BAC=90°$，如图 1 - 53.

在 CF 上截取 $CM=BD$，连结 EM、AM，

则 $EC^2+CM^2=EM^2$.

∵$CE^2+BD^2=DE^2$，∴$EM=DE$.

可证$\triangle ABD\cong\triangle ACM$，从而$\triangle DAE\cong\triangle MAE$.

∴$\angle 1=\angle 2$，$\angle DAE=\angle EAM$，∴$\angle DAM=\angle BAC=90°$，∴$\angle DAE=90°$.

题 45 已知：如图 1 - 54，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，O 是 AB 上的一点，以 O 为圆心，以 OB 为半径作圆，交 AC 于 E、F，交 AB 于 D. 若 E 是$\overset{\frown}{DF}$的中点，且 $AE:EF=3:1$，$FC=4$，求$\angle CBF$ 的正弦值及 BC 的长.

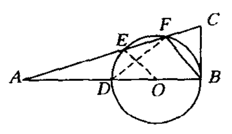


图 1 - 54

解 连结 OE、DF.

∵E 是$\overset{\frown}{DF}$的中点，BD 是⊙O 的直径，

∴$OE\perp DF$，$\angle DFB=90°$，

∴$OE/\!/BF$.

∴$AE:EF=AO:OB$，且 $AE:AF=OE:BF$.

又∵$AE:EF=3:1$，即有 $AE=3EF$，

∴$AO:OB=3:1$，$OE:BF=3:4$.

设 $OB=r$，则 $AO=3r$，$BF=\frac{4}{3}r$，∴$AD=2r$.

∵$AE\cdot AF=AD\cdot AB$，

∴$3EF\cdot 4EF=2r\cdot 4r$，∴$EF=\frac{\sqrt{6}}{3}r$.

∵$\angle ABC=90°$，DB 是⊙O 的直径，∴BC 是⊙O 的切线.

$\therefore BC^2=CF\cdot CE=4(4+EF)$.

在Rt△ABC中,由勾股定理,得

$BC^2=AC^2-AB^2=(4EF+4)^2-(4r)^2$,

$\therefore 4(4+EF)=(4EF+4)^2-(4r)^2$,

即 $4\left(4+\frac{\sqrt{6}}{3}r\right)=\left(4\times\frac{\sqrt{6}}{3}r+4\right)^2-(4r)^2$,

解得 $r=\frac{7\sqrt{6}}{4}$,$\therefore BC=\sqrt{30}$.

$\because \angle CBF=\angle BDF$,又在Rt△$DBF$中,$\sin BDF=\frac{FB}{DB}=\frac{2}{3}$,

$\therefore \sin CBF=\frac{2}{3}$.

题46 已知:如图1-55,这是某市一立交桥的横断面在平面直角坐标系中的示意图,横断面的地平线为x轴,横断面的对称轴为y轴. 桥拱的DGD'部分为一段抛物线,顶点G的高度为8m,AD和$A'D'$是两侧高为5.5m的支柱,OA和OA'为两个方向的汽车通行区,宽都为15m,线段CD和$C'D'$为两段对称的上桥斜坡,其坡度为1∶4.

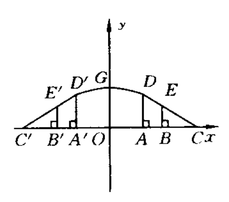


图1-55

(1)求桥拱DGD'所在抛物线的解析式及CC'的长;

(2)BE和$B'E'$为支撑斜坡的立柱,其高都为4m,相应的AB和$A'B'$为两个方向的行人及非机动车通行区,试求AB和$A'B'$的宽;

(3)按规定,汽车通过该桥下时,载货最高处和桥拱之间的距离不得小于0.4m,今有一大型运货汽车,装载某大型设备后,其宽为4m,车载大型设备的顶部与地面的距离均为7m,它能否从OA(或OA')区域安全通过?请说明理由.

解 (1)设DGD'所在的抛物线的解析式为$y=ax^2+c$.

由题意,得$G(0,8)$,$D(15,5.5)$

$\therefore \begin{cases}8=c,\\5.5=225a+c.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{90},\\c=8.\end{cases}$

$\therefore DGD'$所在的抛物线解析式为$y=-\frac{1}{90}x^2+8$.

$\because \frac{AD}{AC}=\frac{1}{4}$,且$AD=5.5$(m),

$\therefore AC=5.5\times4=22$(m)

$CC'=2CO=2\times(OA+AC)=2\times(15+22)=74$(m).

(2)$\because \frac{EB}{BC}=\frac{1}{4}$,$BE=4$,$\therefore BC=16$.

$\therefore AB=AC-BC=22-16=6$(m).

(3)在 $y=-\frac{1}{90}x^2+8$ 中，

当 $x=4$ 时，$y=-\frac{1}{90}\times16+8=7\frac{37}{45}$.

$\because 7\frac{37}{45}-(7+0.4)=\frac{19}{45}>0$,

$\therefore$该大型货车可以从 OA(或 OA')区域安全通过.

题47 已知:如图 1-56,$\odot O$ 与直线 MN 相切于点 A,连结 OA,在 OA 上任取一点 O_1,以 O_1 为圆心作圆与$\odot O$ 相切于 B,交直线 MN 于 C、D. 设$\odot O$ 的半径为 1,OO_1 的长为 $x(0<x\leqslant1)$,以 CD 为边向上作正方形,其面积为 y.

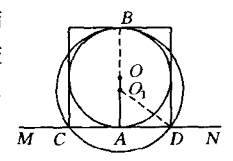


图 1-56

(1)求 y 与 x 的函数关系式;

(2)在这正方形中,设 CD 的对边所在的直线为 l,问当 x 为何值时,l 与$\odot O$ 相切、相离、相交?

解 (1)连结 O_1D、OB,则 O_1、O、B 在同一条直线上,故

$O_1D=O_1B=1+x$.

$\because\odot O$ 与直线 MN 相切于 A,$\therefore OA\perp CD$.

$\therefore CA=AD$,$\triangle O_1AD$ 是直角三角形,$\therefore AD^2+O_1A^2=O_1D^2$.

$\because CD^2=y$,$\therefore AD^2=\frac{y}{4}$.

$\because O_1A=1-x$,$\therefore\frac{y}{4}+(1-x)^2=(1+x)^2$,

$\therefore y=16x$.

(2)设 l 与$\odot O$ 相切,则直线 l 与直线 MN 的距离等于$\odot O$ 的直径,

$\therefore CD=BA=2$,$y=CD^2=4$.

$\therefore 4=16x$,$x=\frac{1}{4}$.

①当 $x=\frac{1}{4}$ 时,$y=4$,$CD=2$,

l 与 MN 的距离等于$\odot O$ 的直径,故 l 与$\odot O$ 相切.

②当 $\frac{1}{4}<x\leqslant1$ 时,$y>4$,$CD>2$,

l 与 MN 的距离大于$\odot O$ 的直径,故 l 与$\odot O$ 相离.

③当 $0<x<\frac{1}{4}$ 时,$y<4$,$CD<2$,

l 与 MN 的距离小于$\odot O$ 的直径,故 l 与$\odot O$ 相交.

题48 已知:如图 1-57,C、D 是双曲线 $y=\frac{m}{x}$ 在第一象限内的分支上的两点,直线 CD 分别交 x 轴、y 轴于 A、B 两点,设 C、D 的坐标分别是 (x_1,y_1)、(x_2,y_2),连结 OC、OD.

(1)求证：$y_1<OC<y_1+\frac{m}{y_1}$；

(2)若$\angle BOC=\angle AOD=\alpha$，$\text{tg}\alpha=\frac{1}{3}$，$OC=\sqrt{10}$，求直线$CD$的解析式；

(3)在(2)的条件下，双曲线上是否存在一点P，使得$S_{\triangle POC}=S_{\triangle POD}$？若存在，请给出证明；若不存在，请说明理由.

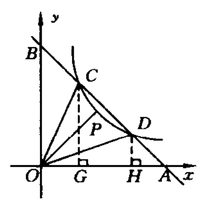


图 1－57

证明 (1)过点C作$CG\perp x$轴，垂足为G，则$CG=y_1$，$OG=x_1$.

∵点$C(x_1,y_1)$在双曲线$y=\frac{m}{x}$上，∴$x_1=\frac{m}{y_1}$.

∵在Rt△OCG中，$CG<OC<CG+OG$，

∴$y_1<OC<y_1+\frac{m}{y_1}$.

(2)在Rt△GCO中，$\angle GCO=\angle BOC=\alpha$，

$\text{tg}\alpha=\frac{OG}{CG}=\frac{1}{3}$，即$\frac{x_1}{y_1}=\frac{1}{3}$，$y_1=3x_1$.

∵$OC^2=OG^2+CG^2$，$OC=\sqrt{10}$，

∴$10=x_1^2+y_1^2$，即$10=x_1^2+(3x_1)^2$.

解之，得$x_1=\pm1$，负值不合题意，舍去，∴$x_1=1$，$y_1=3$.

∴C点的坐标为$(1,3)$.

∵点C在双曲线$y=\frac{m}{x}$上，∴$m=3$，∴双曲线的解析式为$y=\frac{3}{x}$.

过点D作$DH\perp x$轴，垂足为H，则$DH=y_2$，$OH=x_2$.

在Rt△ODH中，$\text{tg}\alpha=\frac{DH}{OH}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{1}{3}$，即$x_2=3y_2$.

又$y_2=\frac{3}{x_2}$，则$3y_2^2=3$.

解得$y_2=\pm1$，负值不合题意，∴$y_2=1$，$x_2=3$.

∴D点的坐标为$(3,1)$.

设直线CD的解析式为$y=kx+b$，

则$\begin{cases}3=k+b,\\1=3k+b,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=-1,\\b=4.\end{cases}$

∴直线CD的解析式为$y=-x+4$.

(3)双曲线$y=\frac{3}{x}$上存在点P，使得$S_{\triangle POC}=S_{\triangle POD}$，这个点$P$就是$\angle COD$的平分线与双曲线$y=\frac{3}{x}$的交点.

证明如下：∵点P在$\angle COD$的平分线上，

∴点P到OC、OD的距离相等.

又 $OD=\sqrt{OH^2+DH^2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{10}=OC$.

$\therefore S_{\triangle POD}=S_{\triangle POC}$.

题 49 已知：如图 1 - 58，O 是正方形 $ABCD$ 对角线 AC 上一点，以 O 为圆心，OA 的长为半径的⊙O 与 BC 相切于 M，与 AB、AD 分别相交于 E、F.

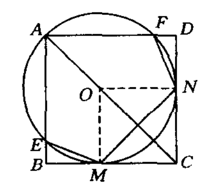


图 1 - 58

(1)求证：CD 与⊙O 相切；

(2)若正方形 $ABCD$ 的边长为 1，求⊙O 的半径；

(3)对于以点 M、E、A、F 以及 CD 与⊙O 的切点为顶点的五边形的五条边，从相等关系考虑，你可以得出什么结论？请给出证明.

证明 (1)连结 OM，则 $OM\perp BC$，过 O 作 $ON\perp CD$ 于 N.

∵点 O 在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上，

$\therefore \angle ACB=\angle ACD=45°$，$\therefore ON=OM$，

$\therefore CD$ 与⊙O 相切于 N.

(2)设⊙O 的半径为 R，则 $OM=R$.

∵正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$\therefore AC=\sqrt{2}$，$OC=\sqrt{2}-R$.

在 Rt△OMC 中，$\sin OCM=\dfrac{OM}{OC}$，$\sin 45°=\dfrac{R}{\sqrt{2}-R}$.

解得 $R=2-\sqrt{2}$.

(2)对五边形 $MEAFN$ 的五条边，从相等关系考虑，有①$AE=AF=MN$；②$EM=FN$.

证明如下：①∵$\angle OMC=\angle ONC=\angle MCN=90°$，$OM=ON$，

∴四边形 $OMCN$ 是正方形.

$MC=NC=R=2-\sqrt{2}$，$BM=DN=\sqrt{2}-1$.

在 Rt△MNC 中，$MN=\sqrt{2}R=2\sqrt{2}-2$.

∵BC 切⊙O 于 M，$\therefore BM^2=BE\cdot BA$，

$\therefore BE=\dfrac{BM^2}{BA}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$.

同理 $DF=3-2\sqrt{2}$.

$\therefore AE=AF=1-(3-2\sqrt{2})=2\sqrt{2}-2$，

$\therefore AE=AF=MN$.

②在 Rt△EBM 和 Rt△FDN 中，

$$\begin{cases} BE=DF, \\ \angle B=\angle D=90°, \\ BM=DN. \end{cases}$$

$\therefore \triangle EBM \cong \triangle FDN$，$\therefore EM=FN$.

题 50 已知：如图 1 - 59，$\triangle ABC$ 的面积为 16，$AB=4$，D 为 AB 上一点，M 为 BD 的中点，DE、MN 都与 BC 平行，且分别交 AC 于 E、N，设 $AD=x$.

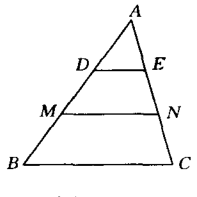


图 1 - 59

(1)求$\triangle ADE$ 的面积(用 x 表示)；

(2)设梯形 $DMNE$ 的面积为 y，求 y 与 x 的函数解析式和自变量 x 的取值范围；

(3)画出(2)中函数的图像并根据图像写出 x 等于多少时，梯形 $DMNE$ 的面积最大.

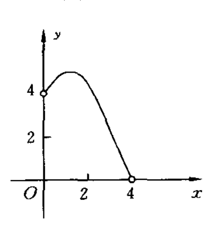


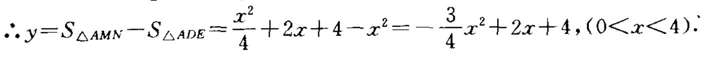
图 1 - 60

解 (1)$\because \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AD^2}{AB^2}$，即$\dfrac{S_{\triangle ADE}}{16}=\dfrac{x^2}{16}$，$\therefore S_{\triangle ADE}=x^2$.

(2)$AM=\dfrac{1}{2}(4-x)+x=\dfrac{4+x}{2}$，

又$\dfrac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{AM^2}{AB^2}$，即$\dfrac{S_{\triangle AMN}}{16}=\dfrac{\left(\dfrac{4+x}{2}\right)^2}{16}$.

$\therefore S_{\triangle AMN}=\left(\dfrac{x+4}{2}\right)^2=\dfrac{x^2}{4}+2x+4$.



$\therefore y=S_{\triangle AMN}-S_{\triangle ADE}=\dfrac{x^2}{4}+2x+4-x^2=-\dfrac{3}{4}x^2+2x+4$，$(0<x<4)$.

(3)图像如图 1 - 60，

$y=-\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\dfrac{16}{3}$，当 $x=\dfrac{4}{3}$时，梯形 $DMNE$ 的面积最大.

题 51 已知：二次函数 $y=-x^2+2mx-m^2+m-1$.

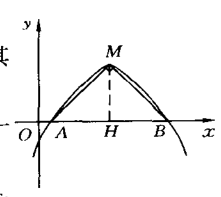
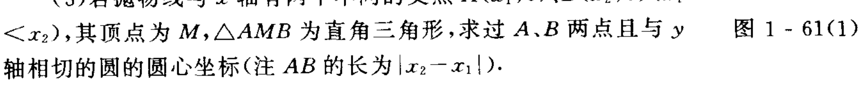


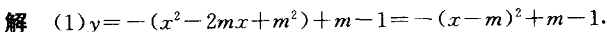
图 1 - 61(1)

(1)用配方法将此函数化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，并写出其顶点坐标和对称轴方程；

(2)可以证明，不论 m 取何实数值，抛物线的顶点均在某个一次函数的图像上，求此一次函数的解析式；



(3)若抛物线与 x 轴有两个不同的交点 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ $(x_1<x_2)$，其顶点为 M，$\triangle AMB$ 为直角三角形，求过 A、B 两点且与 y 轴相切的圆的圆心坐标(注 AB 的长为 $|x_2-x_1|$).



解 (1)$y=-(x^2-2mx+m^2)+m-1=-(x-m)^2+m-1$.

$\therefore$顶点坐标为$(m,m-1)$，对称轴为：$x=m$.

(2)取 $m=0$ 时，顶点坐标为$(0,-1)$；$m=1$ 时，顶点坐标为$(1,0)$.

$\because$上述两点在一次函数 $y=kx+b$ 的图像上.

$\therefore$一次函数的解析式是 $y=x-1$.

(3)由图像特征知$\triangle AMB$ 是等腰直角三角形，顶点纵坐标的值等于$\dfrac{1}{2}AB$ 的长度，

$\therefore \frac{1}{2}|x_2-x_1|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$,

$\therefore m-1=\sqrt{m-1}$，解得 $m_1=1, m_2=2$.

$\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点，即 $\Delta>0$，$\therefore m>1$.

$\therefore m=2$. $\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=-x^2+4x-3$.

$\therefore A(1,0), B(3,0), M(2,1)$.

设过 A、B 两点的圆与 y 轴的切点两坐标为 $(0,t)$，由切割线定理有 $t^2=OA\cdot OB$.

即 $t^2=1\times3$，$t=\pm\sqrt{3}$.

所求圆心坐标为 $(2,\sqrt{3})$ 和 $(2,-\sqrt{3})$. 如图 1 - 61(2).

图 1 - 61(2)

题 52 已知：如图 1 - 62，AB 是半圆 O 的直径，AC 切半圆于 A，CB 交⊙O 于 D，DE 切⊙O 于 D，$BE\perp DE$，垂足是 E，$BD=10$，DE、BE 是方程 $x^2-2(m+2)x+2m^2-m+3=0$ 的两个根($DE<BE$)，求 AC 的长.

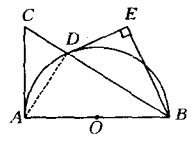


图 1 - 62

解 $\because DE$、BE 是方程 $x^2-2(m+2)x+2m^2-m+3=0$ 的两个根($DE<BE$)，且 $BE\perp DE$，$BD=10$，

$$\therefore \begin{cases} DE+BE=2(m+2), \\ DE\cdot BE=2m^2-m+3, \\ DE^2+BE^2=BD^2=100. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $m=5$，$DE=6$，$BE=8$.

连结 AD，$\because AB$ 是直径，$\therefore \angle ADB=90°$.

又 $\because DE$ 是⊙O 的切线，$\therefore \angle EDB=\angle DAB$.

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE\backsim\text{Rt}\triangle BAD$，$\therefore \angle ABC=\angle DBE$，$\frac{AB}{BD}=\frac{BD}{BE}$.

$\therefore AB=\frac{BD^2}{BE}=\frac{100}{8}=\frac{25}{2}$.

$\because CA$ 切⊙O 于 A，$\therefore \angle CAB=90°$.

$\therefore \text{Rt}\triangle CAB\backsim\text{Rt}\triangle DEB$，$\therefore \frac{AC}{DE}=\frac{AB}{BE}$.

$$\therefore AC=\frac{AB\cdot DE}{BE}=\frac{\frac{25}{2}\times6}{8}=\frac{75}{8}.$$

题 53 某跳水运动员进行 10m 跳台跳水训练时，身体(看成一点)在空中的运动路线是如图 1 - 63 所示坐标系下经过原点 O 的一条抛物线(图中标出的数据为已知条件).

在跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$m，入水处距池边的距离为 4m，同时运动员在距水面高度为 5m 以前，必须完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势，否则就会出现失误.

(1)求这条抛物线的解析式;

(2)在某次试跳中,测得运动员在空中的运动路线是(1)中的抛物线,且运动员在空中调整好入水姿势时,距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$m,问此次跳水会不会失误?并通过计算说明理由.

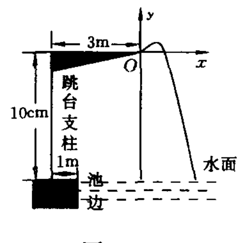
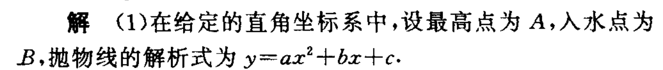


图 1 - 63



解 (1)在给定的直角坐标系中,设最高点为 A,入水点为 B,抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

由题意知,O、B 两点的坐标依次为(0,0),(2,−10),且顶点 A 的纵坐标为 $\frac{2}{3}$.

$$\therefore\begin{cases}c=0,\\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{2}{3},\\ 4a+2b+c=-10.\end{cases}$$

$$\text{解得}\begin{cases}a=-\dfrac{25}{6},\\ b=\dfrac{10}{3}\\ c=0;\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2},\\ b=-2,\\ c=0.\end{cases}$$

∵抛物线的对称轴在 y 轴右侧,∴ $-\frac{b}{2a}>0$.

又∵抛物线开口向下,∴ $a<0$,∴ $b>0$,

∴ $a=-\frac{25}{6}$,$b=\frac{10}{3}$,$c=0$.

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$.

(2)当运动员在空中距池边的水平距离为 $3\frac{3}{5}$m 时,

即 $x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$(m),

$y=\left(-\frac{25}{6}\right)\times\left(\frac{8}{5}\right)^2+\frac{10}{3}\times\frac{8}{5}=-\frac{16}{3}$(m).

∴此时运动员距水面的高为:$10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}<5$(m),

因此,此次试跳会出现失误.

题 54 已知:如图 1 - 64,在直角坐标系中,点 C 在 y 轴的正半轴上,四边形 $OABC$ 为平行四边形,$OA=2$,$\angle AOC=60°$,以 OA 为直径的⊙P 经过点 C,点 D 在 y 轴上,DM 为始终与 y 轴垂直且与 AB 边相交的动直线,设 DM 与 AB 边的交点为 M(点 M 在线段 AB 上,但与 A、B 两点不重合),点 N 是 DM 与 BC 的交点,设 $OD=t$.

(1)求点 A 和 B 的坐标;

(2)设△BMN 的外接圆⊙G 的半径为 R,请你用 t 表示 R 及点 G 的坐标;

(3)当⊙G 与⊙P 相外切时,求直角梯形 $OAMD$ 的面积.

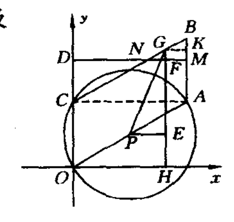


图 1-64

解 (1)连结 AC,∵OA 为⊙P 的直径,∴$\angle ACO=90°$.

又∵$OA=2$,$\angle AOC=60°$,∴$OC=1$,$AC=\sqrt{3}$,

∴点 A 的坐标为$(\sqrt{3},1)$.

又 $OABC$ 为平行四边形,∴$AB \underline{\underline{/\!/}} OC$,∴点 B 的坐标为$(\sqrt{3},2)$.

(2)∵$DM\perp y$ 轴,且 $AB/\!/OC$,∴$DM\perp AB$,

∴$\angle NMB=90°$,⊙G 的圆心 G 为 BN 的中点.

又∵$\angle B=\angle AOC=60°$,∴$BM=\frac{1}{2}BN=R$.

而点 B 的纵坐标为 2,点 M 的纵坐标等于点 D 的纵坐标,都为 t.

∴$BM=2-t$,∴$R=2-t$.

过点 G 作 $GH/\!/y$ 轴,交 x 轴于点 H,交 DM 于点 F,过点 G 作 $GK/\!/x$ 轴,交 AB 于点 K. 根据垂径定理,得到:

$FM=\frac{1}{2}MN$,$KM=\frac{1}{2}BM$.

设点 G 的坐标为(x,y).

∵$MN=\sqrt{3}(2-t)$,

∴$x=DM-\frac{1}{2}MN=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}(2-t)=\frac{\sqrt{3}}{2}t$,

$y=OD+\frac{1}{2}BM=t+\frac{1}{2}(2-t)=1+\frac{1}{2}t$,

∴点 G 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t,1+\frac{1}{2}t\right)$.

(3)连结 GP;过点 P 作 $PE/\!/x$ 轴,交 GH 于点 E,由 $PE\perp GE$,根据勾股定理可得

$$GP=\sqrt{PE^2+GE^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(1+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{t^2-t+1}.$$

当⊙G 与⊙P 外切时,$PG=R+1$,

∴$\sqrt{t^2-t+1}=3-t$,解得 $t=\frac{8}{5}$,经检验 $t=\frac{8}{5}$ 是原方程的根.

此时,$OD=t=\frac{8}{5}$,$AM=1-MB=\frac{3}{5}$,$DM=AC=\sqrt{3}$.

∴直角梯形 $OAMD$ 的面积为:

$$S=\frac{(OD+AM)}{2}\cdot DM=\frac{\left(\frac{8}{5}+\frac{3}{5}\right)}{2}\times\sqrt{3}=\frac{11}{10}\sqrt{3}.$$

题 55 已知：如图 1 - 65，圆心 $A(0,-3)$，$\odot A$ 与 x 轴相切，$\odot B$ 的圆心 B 在 x 正半轴上，且 $\odot B$ 与 $\odot A$ 外切于点 P，两圆内公切线 MP 交 y 轴于点 M，交 x 轴于点 N.

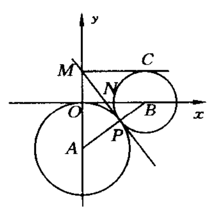
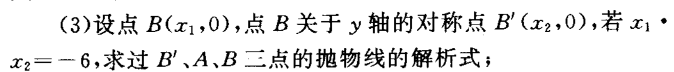


图 1 - 65

(1)求证：$\triangle AOB\backsim\triangle NPB$；

(2)设 $\odot A$ 的半径为 r_1，$\odot B$ 的半径为 r_2，若 $r_1:r_2=3:2$，求点 M、N 的坐标及公切线 MP 的函数解析式；



(3)设点 $B(x_1,0)$，点 B 关于 y 轴的对称点 $B'(x_2,0)$，若 $x_1\cdot x_2=-6$，求过 B'、A、B 三点的抛物线的解析式；

(4)若 $\odot A$ 的位置大小不变，圆心 B 在 x 正半轴上移动，并始终有 $\odot B$ 与 $\odot A$ 外切，过点 M 作 $\odot B$ 的切线 MC，C 为切点，$MC=3\sqrt{3}$ 时，B 点在 x 轴的什么位置？从你的解答中能获得什么猜想？

证明 (1)$\because AO\perp x$ 轴，$MP\perp AB$，$\angle ABO=\angle NBP$，

$\therefore\triangle AOB\backsim\triangle NPB$.

(2)$\because A(0,-3)$，$\therefore OA=AP=3$.

又 $\because r_1:r_2=AP:PB=3:2$，

$\therefore PB=2$，$AB=5$，$BO=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

而 $\frac{AB}{NB}=\frac{BO}{BP}$，$\therefore NB=\frac{AB\times BP}{BO}=\frac{5\times 2}{4}=\frac{5}{2}$.

$\therefore ON=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$，$\therefore$ 点 $N\left(\frac{3}{2},0\right)$.

由 $Rt\triangle APM\cong Rt\triangle AOB$，，$\therefore AM=AB=5$，$\therefore$ 点 $M(0,2)$.

设直线 MP 的解析式为 $y=kx+b$，则有

$$\begin{cases}2=k\cdot 0+b,\\ 0=\frac{3}{2}k+b.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-\frac{4}{3},\\ b=2.\end{cases}$$

$\therefore MP$ 的解析式为 $y=-\frac{4}{3}x+2$.

(3)设抛物线为 $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. 令 $y=0$，则 $ax^2+bx+c=0$.

$\because B$ 与 B' 关于 y 轴对称，$\therefore x_1+x_2=0$，即 $b=0$.

又点 $A(0,-3)$，$\therefore c=-3$.

又 $x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-3}{a}=-6$，$\therefore a=\frac{1}{2}$.

故所求抛物线为 $y=\frac{1}{2}x^2-3$.

(4)$\because MC=MP$，$\triangle APM\cong\triangle AOB$，

$\therefore MC=MP=BO=3\sqrt{3}$，$\therefore$点 $B(3\sqrt{3},0)$.

猜想：圆心 B 在 x 正半轴任一位置时，都有切线 MP 的长等于点 B 的横坐标或四边形 $MOBC$ 是长方形.

题 56 已知：如图 1-66，在直角坐标系 xOy 中，直线 AB 的解析式为 $y=x+1$，A、B 两点分别在 y 轴和 x 轴上，C 点是线段 AB 上的一动点.

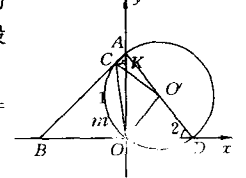


图 1-66

(1)过 A、C、O 三点的$\odot O'$交 x 轴于另一点 D，求证：$AD=\sqrt{2}CO$；

(2)若$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{CO}$、$\overset{\frown}{OD}$的弧长之比为 $2:3:1$，求扇形 $O'CmO$ 的面积；

(3)当$\odot O'$与 x 轴相切时，过 O、C 两点的$\odot O''$交线段 BC 交于点 H（异于 B、C 两点），又另交 OB、OA 于 M、N 两点，求$\dfrac{AN+OM}{O'O''}$的值.

证明 (1)对解析式 $y=x+1$，令 $x=0$，得 $y=1$；令 $y=0$，得 $x=-1$.

$\therefore A$、B 两点坐标为 $A(0,1)$、$B(-1,0)$，

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ABO$ 为等腰三角形，$AB:OB=\sqrt{2}:1$.

$\because$四边形 $ACDO$ 内接于$\odot O'$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又$\angle ABD=\angle OBC$，$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle OBC$.

$\therefore AD:CO=AB:OB=\sqrt{2}:1$，故 $AD=\sqrt{2}CO$.

(2)$\because \angle AOD$ 是直角，$\therefore AD$ 为$\odot O'$的直径.

$\because \overset{\frown}{AC}:\overset{\frown}{CO}:\overset{\frown}{OD}=2:3:1$，

$\therefore \angle AO'C=60^\circ$，$\triangle O'AC$ 为正三角形.

又$\angle CO'O=90^\circ$.

作 $CK\perp y$ 轴于 K 点，设 $O'C=AC=r$，则

$AD=2r$，$CO=\dfrac{1}{\sqrt{2}}AD=\sqrt{2}r$.

$\because \triangle ACK$ 为等腰直角三角形，$\therefore CK=AK=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CKO$ 中，$OC^2=CK^2+KO^2$，即

$$(\sqrt{2}r)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2.$$

解得 $r=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$.

$\because r>0$，舍去负值，故 $r=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

∴扇形 $O'CmO$ 的面积为

$$S_{扇形O'CmO}=\frac{1}{4}\pi r^2=\frac{1}{4}\pi\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}\pi.$$

(3)如图 1 - 67,由⊙O'与 x 轴相切,知 O 为切点,AO 为直径,OC 垂直平分 AB. 连结 OH、MN.

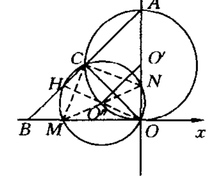


图 1 - 67

∴$\angle MON=90°$.

∴MN 为⊙O''的直径,$\angle MCN=90°$.

∵$OC\perp AB$,∴OH 为⊙O''的直径,故 $O'O''$是$\triangle AHO$ 的中位线,∴$AH=2O'O''$.

又$\angle CAO=\angle BOC=45°$,$AC=OC$,

$\angle MCO=90°-\angle OCN=\angle ACN$,

∴$\triangle OCM\cong\triangle ACN$,∴$OM=AN$.

∵$AC\cdot AH=AN\cdot AO$,∴$\dfrac{AN}{AH}=\dfrac{AC}{AO}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

∴$\dfrac{AN+OM}{O'O''}=\dfrac{2AN}{\frac{1}{2}AH}=4\cdot\dfrac{AN}{AH}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$.

题 67 已知:如图 1 - 68,直角坐标系中,O 为坐标原点,A 点坐标为$(-3,0)$,B 点坐标为$(12,0)$,以 AB 的中点 P 为圆心,AB 为直径作⊙P 与 y 轴的负半轴交于点 C,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、B、C 三点,其顶点为 M 点.

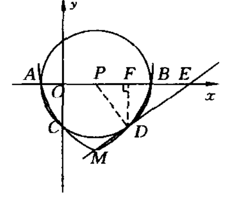
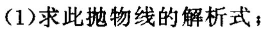


图 1 - 68


(1)求此抛物线的解析式;

(2)设点 D 是抛物线与⊙P 的第四个交点(除 A、B、C 三点以外),求直线 MD 的解析式;


(3)判定(2)中的直线 MD 与⊙P 的位置关系,并说明理由.

解 (1)由 $A(-3,0)$,$B(12,0)$知 $OA=3$,$OB=12$.

∵OC 垂直于直径 AB,∴$OC=\sqrt{OA\cdot OB}=6$.

∵点 C 在 y 轴的负半轴上,

∴点 C 的坐标为$(0,-6)$.

根据题意,得

$$\begin{cases}9a-3b+c=0,\\144a+12b+c=0,\\c=-6.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=\dfrac{1}{6},\\b=-\dfrac{3}{2},\\c=-6.\end{cases}$$

∴所求抛物线的解析式为 $y=\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{3}{2}x-6$.

(2)∵$y=\frac{1}{6}x^2-\frac{3}{2}x-6=\frac{1}{6}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{75}{8}$,

∴顶点 M 的坐标为$\left(\frac{9}{2},-\frac{75}{8}\right)$.

显然 C、D 两点关于直线 $x=\frac{9}{2}$ 对称.

可设 D 的坐标为$(m,-6)$,则有$-6=\frac{1}{6}m^2-\frac{3}{2}m-6$,

解得 $m=9$ 或 $m=0$(舍去).

∴D 点坐标为$(9,-6)$.

设过 M、D 两点的直线解析式为 $y=kx+n$,则

$\begin{cases}-\frac{75}{8}=\frac{9}{2}k+n,\\ -6=9k+n.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\ n=-\frac{51}{4}.\end{cases}$

∴直线 MD 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x-\frac{51}{4}$.

(3)直线 MD 与⊙P 相切.

∵如图 1-68,作 $DF\perp AB$ 于 F 点,连结 PD,直线 MD 与 x 轴的交点为 $E(17,0)$. 而 $P\left(\frac{9}{2},0\right)$,$F(9,0)$.

∴$PF=\frac{9}{2}$,$DF=6$,$EF=8$,$PE=\frac{25}{2}$.

∴$PD^2=DF^2+PF^2=\frac{225}{4}$,$DE^2=DF^2+EF^2=100$.

∴$PD^2+DE^2=\frac{225}{4}+100=\frac{625}{4}=\left(\frac{25}{2}\right)^2=PE^2$,

∴$\angle PDE=90°$,故直线 MD 与⊙P 相切.

题 58 已知:如图 1-69,AB 是半圆⊙O 的直径,C 为 AB 弧上一点(C 不与 A、B 重合),AD 和⊙O 的切线 CD 互相垂直,垂足为 D.

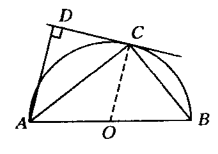


图 1-69



(1)求证:AC 平分$\angle DAB$;

(2)若⊙O 的半径是方程 $\sqrt{2t^2+2t+1}=t+2$ 的解,并设 $BC^2=x$,$CD^2=y$,试求出 y 与 x 之间的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围;

(3)当 $x=6$ 时,在直线 DC 上是否存在点 P,使得$\triangle PCB$ 和$\triangle DAC$ 相似,若不存在,说明理由. 若存在,求出 PB 的长.

证明 (1)连结 OC.

∵DC 切圆 O 于点 C,∴$OC\perp DC$.

∵$AD\perp DC$,∴$AD/\!/OC$,$\angle DAC=\angle OCA$.

又$\angle OAC=\angle OCA$，$\therefore\angle DAC=\angle OAC$，即 AC 平分$\angle DAB$.

(2)解方程 $\sqrt{2t^2+2t+1}=t+2$，得 $t_1=3$，$t_2=-1$(舍去)，经检验 $t_1=3$ 是原方程的根.

$\therefore AB=2t_1=6$.

由(1)易知，$\triangle ADC\backsim\triangle ACB$，

$\therefore\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{AC}{AB}$，即$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{36-x}}{6}$.

$\therefore y=-\dfrac{1}{36}x^2+x$.

$\because 0<BC<AB$，即 $0<\sqrt{x}<6$，$\therefore 0<x<36$.

(3)存在满足条件的 P 点.

①当 $BP\perp DC$ 时，

由$\angle PCB=\angle CAB=\angle DAC$ 知 $\mathrm{Rt}\triangle ADC\backsim\mathrm{Rt}\triangle CPB$，

当 $x=6$ 时，$BC=\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{y}=\sqrt{-\dfrac{1}{36}\cdot 6^2+6}=\sqrt{5}$，

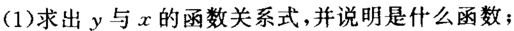
$AC=\sqrt{36-x}=\sqrt{30}$.

而$\dfrac{PB}{CD}=\dfrac{BC}{AC}$，即$\dfrac{PB}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{30}}$，$\therefore PB=1$.

②当 $PB\perp BC$ 时，由$\angle PCB=\angle CAD$ 知 $\mathrm{Rt}\triangle CBP\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADC$.

$\therefore\dfrac{PB}{CD}=\dfrac{BC}{AD}$，即$\dfrac{PB}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{30-5}}$，$\therefore PB=\dfrac{\sqrt{30}}{5}$.

题 59 已知：如图 1 - 70，$\odot O$ 的直径 $AB=12\text{cm}$，AM、BN 是$\odot O$ 的切线，在 AM 上取一点 D(D 与 A 不重合)，DE 切$\odot O$ 于 E，且 DE 交 BN 于 C. 设 $AD=x$，$BC=y$.



(1)求出 y 与 x 的函数关系式，并说明是什么函数；

(2)若 x、y 是方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两个根，求出 x、y 的值.

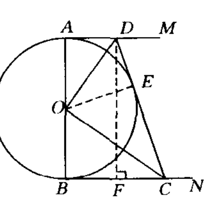


图 1 - 70



解 (1)连结 OE，则 $OE\perp DC$.

由切线长定理知，$DE=AD=x$，$CE=BC=y$.

$\because AD=DE$，$\angle ADO=\angle EDO$，$\angle OAD=\angle OED=90°$，

$\therefore\triangle AOD\cong\triangle EOD$，$\therefore\angle AOD=\angle EOD$.

同理，$\angle BOC=\angle EOC$.

$\therefore\angle EOD+\angle COE=\angle AOD+\angle BOC=90°$.

则$\triangle ODE\backsim\triangle COE$，$\therefore OE^2=DE\cdot CE$.

$\therefore 6^2=xy$，$\therefore y=\dfrac{36}{x}$($x>0$)，这是一个反比例函数.

(2)$\because x$、y 是方程 $2t^2-30t+m=0$ 的两个根，

$\therefore xy=\frac{m}{2}$.

又由 $y=\frac{36}{x}$,知 $xy=36$,$\therefore \frac{m}{2}=36$,$m=72$.

$\therefore$原方程为 $2t^2-30t+72=0$,

解得 $t_1=12$,或 $t_2=3$.

$\therefore x$、y 的值是 $\begin{cases}x_1=12,\\y_1=3;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=3,\\y_2=12.\end{cases}$

题 60 已知:在直角坐标系 xOy 中,二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx+2-m$ 的图像与 x 轴交于 A、B 两点,与 y 轴交于点 C,其中点 A 在点 B 的左边. 若 $\angle ACB=90°$,$\frac{CO}{AO}+\frac{BO}{CO}=1$.

(1)求点 C 的坐标及这个二次函数的解析式;

(2)试设计两种方案:作一条与 y 轴不重合、与 $\triangle ABC$ 的两边相交的直线,使截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似,并且面积是 $\triangle AOC$ 面积的四分之一,求所截得的三角形三个顶点的坐标(不要求证明).

解 (1)设 $A(\alpha,0)$,$B(\beta,0)$,其中 $\alpha<0$,$\beta>0$.

则 $\alpha\cdot\beta$ 是方程 $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx+2-m=0$ 的两个根.

$\therefore \alpha\cdot\beta=2(2-m)$.

$\therefore AO\cdot BO=|\alpha|\cdot|\beta|=-\alpha\cdot\beta=2(m-2)$.

$\because a=\frac{1}{2}>0$,抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx+2-m$ 与 x 轴有两个交点.

$\therefore C(0,2-m)$,其中 $2-m<0$,

$\therefore CO=|2-m|=m-2$.

$\because \angle ACB=90°$,$CO\perp AB$ 于点 O,$\therefore \triangle AOC\backsim\triangle COB$,

$\therefore \frac{CO}{AO}=\frac{BO}{CO}$,即 $CO^2=AO\cdot BO$,

$\therefore (m-2)^2=2(m-2)$,解得 $m_1=2$,$m_2=4$.

当 $m=2$ 时,$2-m=0$,不符合题意;

当 $m=4$ 时,$2-m<0$,符合题意.

$\therefore$点 C 的坐标是$(0,-2)$.

当 $m=4$ 时,二次函数为 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}nx-2$. ①

$\because \frac{CO}{AO}+\frac{BO}{CO}=1$,$\frac{CO}{AO}=\frac{BO}{CO}$,

$\therefore 2\cdot\frac{CO}{AO}=1$,即 $AO=2\cdot CO=4$.

$\because$点 A 在 x 轴负半轴上,

∴点 A 的坐标是$(-4,0)$.

把 $A(-4,0)$代入①,得

$0=\frac{1}{2}\times(-4)^2+\frac{3}{4}\cdot n\cdot(-4)-2$,解得 $n=2$.

∴所求的二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-2$.

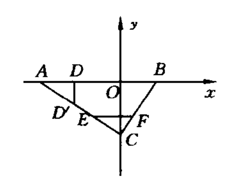


图 1-71

(2)方案 1:分别取 AO、AC 的中点 D、D',连结 DD',则 $\triangle ADD'$与$\triangle ABC$ 相似,且面积是$\triangle AOC$ 面积的四分之一,此时,$A(-4,0)$,$D(-2,0)$,$D'(-2,-1)$.

方案 2:在 CA 上截取 CE,使 $CE=CO=2$,在 CB 上截取 CF,使 $CF=BO=1$,连结 EF,则$\triangle CEF$ 与$\triangle ABC$ 相似,且面积是$\triangle AOC$ 面积的四分之一,此时,$C(0,-2)$,$E\left(-\frac{4}{5}\sqrt{5},-2+\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$,$F\left(\frac{\sqrt{5}}{5},-2+\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$.

题 61 已知:如图 1-72,在$\triangle ABC$ 中,$\angle B=90°$,O 为 AB 上一点,以 O 为圆心,OB 为半径的圆与 AB 相交于点 E,与 AC 相切于点 D,AD、AE 的长分别为方程 $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$ 的两根,F 为线段 OB 上一动点,过点 F 作 $FG\perp AC$,垂足为 G.

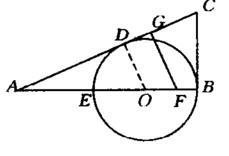


图 1-72

(1)求 CD 的长;

(2)设 OF 的长为 x,四边形 $BCGF$ 的面积为 y,求出 y 与 x 的函数关系式;

(3)FG 能否使 $S_{\triangle AFG}:S_{四边形BCGF}=1:2$,如果能,请求出 BF 的长;如果不能,请说明理由.

解 (1)由 $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$,可得 $x_1=\sqrt{3}$,$x_2=1$.

则 $AD=\sqrt{3}$,$AE=1$.

∵$AD^2=AE\cdot AB$,∴$AB=3$.

∴$OB=OD=OE=1$.

∵AC 是⊙O 的切线,∴$OD\perp AC$,$\triangle ADO\backsim\triangle ABC$,

∴$AD:AB=OD:BC$,∴$BC=\sqrt{3}$,∴$CD=BC=\sqrt{3}$.

(2)∵$OF=x$,则 $BF=1-x$.

又∵$OD\perp AC$,$FG\perp AC$,∴$OD/\!/FG$,

∴$FG:OD=AF:AO$,∴$FG=\frac{x+2}{2}$.

∵$DG:AD=OF:AO$,∴$DG=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

∴$CG=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}(2-x)}{2}$,

$\therefore y=\frac{\sqrt{3}(1-x)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}(2-x)}{2}\cdot\frac{(x+3)}{2}$,

即 $y=-\frac{\sqrt{3}}{8}x^2-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}$，$(0\leqslant x<1)$.

(3)FG 能使 $S_{\triangle AFG}:S_{四边形BCGF}=1:2$.

$\because \sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{8}x^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}$,

即 $x^2+4x=0$，$\therefore x_1=0$，$x_2=-4$(舍去).

故当 F 运动到 O 点时，$BF=1$，FG 能使 $S_{\triangle AFG}:S_{四边形BCGF}=1:2$.

题62 已知：如图 1-73，在平面直角坐标系中，半径为 1 的 $\odot C$ 经过原点 O，且分别交两坐标轴于 A、B 两点，且 $A(-1,0)$，$D\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

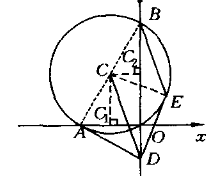


图 1-73

(1)求圆心 C 的坐标；

(2)若 $\odot C$ 的弦 $BE\parallel CD$，试判断直线 DE 与 $\odot C$ 的位置关系，并证明你的结论；

(3)若一个二次函数的图像开口向下，经过 A、O 两点，且顶点在 $\odot C$ 上，在这个二次函数的图像上是否存在点 M，使 $\triangle AOM$ 的面积是 $\triangle AOD$ 面积的 $\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$ 倍？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，说明理由.

解 (1)过 C 点分别作 x 轴、y 轴的垂线，垂足为 C_1、C_2，则 C_1、C_2 分别为 OA、OB 的中点.

$\therefore OC_1=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$.

连结 AC，则 $CC_1=\sqrt{AC^2-AC_1^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore C$ 点的坐标为$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2)连结 AB、CE. 由(1)知 AB 为 $\odot C$ 的直径，且 $\angle CAO=60°$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，$\mathrm{tg}OAD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \angle OAD=30°$.

$\therefore \angle CAD=\angle CAO+\angle OAD=90°$.

又 $BE\parallel CD$，$\therefore \angle BEC=\angle ECD$；$\angle ACD=\angle ABE$,

又 $CB=CE$，$\therefore \angle CEB=\angle CBE$，$\therefore \angle ACD=\angle ECD$.

在$\triangle DAC$ 和$\triangle DEC$ 中，$CD=CD$，$\angle ACD=\angle ECD$，$CA=CE$.

$\therefore \triangle DAC\cong\triangle DEC$，$\therefore \angle CED=\angle CAD=90°$，即 DE 与 $\odot C$ 相切.

(3)由题意知抛物线顶点坐标 $P\left(-\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，设二次函数解析式为 $y=ax^2+bx+c$，由二次函数的图像过点 $O(0,0)$、$A(-1,0)$、$P\left(-\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，得

$$\begin{cases}c=0,\\a-b+c=0,\\\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+c=1+\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=-(4+2\sqrt{3}),\\b=-(4+2\sqrt{3}),\\c=0.\end{cases}$

$\therefore y=-(4+2\sqrt{3})(x^2+x)$.

若点 M 存在，设 $M(x_0,y_0)$，则 $S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|y_0|$.

又 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore\frac{1}{2}|y_0|=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(2+\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$，$\therefore|y_0|=\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$.

①若 $y_0=\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$，将点 $M(x_0,y_0)$的坐标代入抛物线方程，得

$-(4+2\sqrt{3})(x_0^2+x_0)=\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$,

即 $x_0^2+x_0+\frac{1}{3}=0$，此方程无解.

②若 $y_0=-\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$，将点 $M(x_0,y_0)$的坐标代入抛物线方程，整理得

$x_0^2+x_0-\frac{1}{3}=0$,

解这个方程，得 $x_0=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{6}$ 或 $x_0=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{6}$.

故符合题意的点 M 有两个，其坐标分别为

$M_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{21}}{6},-\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\right)$，$M_2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{21}}{6},-\frac{4+2\sqrt{3}}{3}\right)$.

题63 已知：如图 1-74，$\triangle ABC$ 是一块锐角三角形余料，底边 $BC=120$mm，高 $AD=80$mm，要把它加工成一个矩形零件，使矩形的一边在 BC 上，其余两个顶点分别在 AB、AC 上．设该矩形的长 $QM=y$mm，宽 $MN=x$mm.

(1)求证：$y=120-\frac{3}{2}x$;

(2)当 x 与 y 分别取什么值时，矩形 $PQMN$ 的面积最大？最大面积是多少？

(3)当矩形 $PQMN$ 的面积是最大时，它的长和宽是关于 t 的一元二次方程 $t^2-10pt+200q=0$ 的两个根，而 p、q 的值又恰好分别是 $a,10,12,13,b$ 这 5 个数据的众数与平均数，试求 a 与 b 的值.

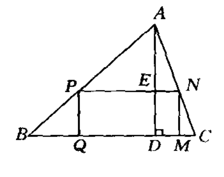


图 1－74

证明 (1)根据已知条件易知 $PN /\!/ BC$，$AE \perp PN$，

$PN=QM=y$，$DE=MN=x$，

$\therefore \triangle APN \backsim \triangle ABC$，从而有 $\dfrac{PN}{BC}=\dfrac{AE}{AD}$，

即 $\dfrac{y}{120}=\dfrac{80-x}{80}$，$\therefore y=120-\dfrac{3}{2}x$.

(2)设矩形 $PQMN$ 的面积为 S，则 $S=xy$.

即 $S=x\left(120-\dfrac{3}{2}x\right)=-\dfrac{3}{2}x^2+120x$.

当 $x=-\dfrac{120}{2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)}=40$ 时，S 有最大值，最大值为 $\dfrac{-120^2}{4\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)}=2400$，

此时 $y=\dfrac{2400}{40}=60$，

$\therefore$ 当 $x=40\text{mm}$，$y=60\text{mm}$ 时，矩形 $PQMN$ 的面积最大，最大面积为 2400mm^2.

(3)由根与系数的关系，得 $\begin{cases}40+60=10p,\\40\times 60=200q.\end{cases}$

解得 $p=10$，$q=12$.

$\because a,10,12,13,b$ 的众数为 10，

$\therefore$ 有 $a=10$ 或 $b=10$.

当 $a=10$ 时，$\dfrac{10+10+12+13+b}{5}=12$，解得 $b=15$；

若 $b=10$，则 $a=15$.

题 64 已知：如图 1－75，等边$\triangle ABC$ 的面积为 S，$\odot O$ 是它的外接圆，点 P 是$\overset{\frown}{BC}$的中点.

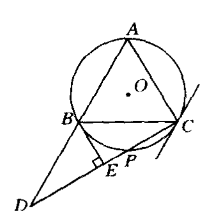
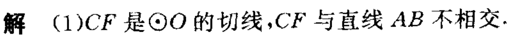


图 1－75

(1)试判断过点 C 所作$\odot O$ 的切线与直线 AB 是否相交，并证明你的结论.

(2)设直线 CP 与 AB 相交于点 D，过点 B 作 $BE \perp CD$，垂足为 E，证明 BE 是$\odot O$ 的切线，并求$\triangle BDE$ 的面积.


解 (1)CF 是$\odot O$ 的切线，CF 与直线 AB 不相交.

证明如下：$\because CF$ 是$\odot O$ 的切线，$\therefore \angle BCF=\angle A$.

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle ABC=\angle A$，

$\therefore \angle BCF=\angle ABC$，$\therefore CF /\!/ AB$，$\therefore CF$ 与直线 AB 不相交.

(2)连结 BO 并延长交 AC 于 H.

$\because \odot O$ 是等边$\triangle ABC$ 的外接圆，$\therefore \angle BHC=90°$.

$\because$点 P 是$\overset{\frown}{BC}$的中点，$\therefore \angle BCE=30°$.

又$\because \angle ACB=60°$，$\therefore \angle HCE=90°$.

$\because \angle BEC=90°$，$\therefore \angle HBE=90°$，$\therefore BE$ 是$\odot O$ 的切线.

在$\triangle ACD$ 中，$\because \angle ACD=90°$，$\angle A=60°$，

$\therefore \angle D=30°$，$\therefore BD=BC$，$\therefore DE=CE$，$\therefore S_{\triangle BDE}=S_{\triangle BCE}$.

在矩形 $BHCE$ 中，$S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BCH}=\frac{1}{2}S$，

$\therefore S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S$，$\therefore S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}S$.

题 已知：如图 1 - 76，在直角坐标系中，直线 AB 交 y 轴于点 A，交 x 轴于点 B，其解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+2$. 又 O_1 是 x 轴上一点，且$\odot O_1$ 与直线 AB 切于点 C，与 y 轴切于原点 O.

(1)求点 C 的纵坐标；

(2)如图 1 - 77，以 AO 为直径作$\odot O_2$，交直线 AB 于 D，交$\odot O_1$ 于 N. 连结 ON 并延长交 CD 于 G. 求$\triangle ODG$ 的面积；

(3)另有一圆过点 O_1 与 y 轴切于点 O_2(如图 1 - 78)，与直线 AB 交于 M、P 两点. 求证：$O_1M \cdot O_1P=2$.

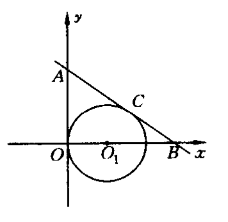


图 1 - 76

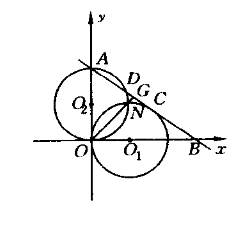


图 1 - 77

解 (1)由 $y=-\frac{3}{4}x+2$，得 $OA=2$，$OB=\frac{8}{3}$，

$\therefore AB=\frac{10}{3}$，

由 $AC=2$，得 $CB=\frac{4}{3}$.

过 C 点作 $CH \perp x$ 轴，垂足为 H，得 $CH /\!/ y$ 轴，

则$\frac{CH}{AO}=\frac{CB}{AB}$，$\therefore CH=\frac{4}{5}$，即 C 点纵坐标为$\frac{4}{5}$.

(2)$\because OA$ 为$\odot O_2$ 的直径，$\therefore OD \perp AB$.

由 $OD \cdot AB=OA \cdot OB$，得 $OD=\frac{8}{5}$.

则 $AD=\sqrt{AO^2-OD^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{6}{5}$，

$\therefore CD=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$.

设 $DG=x$，由切割线定理，得 $GD \cdot GA=GN \cdot GO=GC^2$，

$\therefore x\left(x+\frac{6}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}-x\right)^2$，解得 $x=\frac{8}{35}$，$\therefore DG=\frac{8}{35}$.

$\therefore S_{\triangle ODG}=\frac{1}{2}OD\cdot DG=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}\times\frac{8}{35}=\frac{32}{175}$.

(3)连结 O_1C，设⊙O_1 的半径为 r，将点 C 的纵坐标 $\frac{4}{5}$ 代入 $y=-\frac{3}{4}x+2$，得 $x=\frac{8}{5}$，

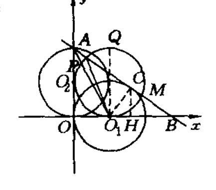


图 1 - 78

$\therefore OH=\frac{8}{5}$，$O_1H=\frac{8}{5}-r$.

在 Rt△CHO 中，由勾股定理得

$\left(\frac{4}{5}\right)^2=r^2-\left(\frac{8}{5}-r\right)^2$，

$\therefore r=1$.

故⊙O_1 和⊙O_2 都是半径为 1 的等圆，过点 O_1 且与 y 轴切于点 O_2 的圆是以 N 为圆心，1 为半径的圆.

作⊙N 的直径 O_1Q，连结 PQ. 则 $O_1Q=2$，$O_1C=1$.

$\because \angle PQO_1=\angle CMO_1$，$\therefore$ Rt△PQO_1∽Rt△CMO_1，

$\therefore \frac{O_1Q}{O_1M}=\frac{O_1P}{O_1C}$，$\therefore O_1M\cdot O_1P=O_1Q\cdot O_1C=2\times1=2$.

题66 如果抛物线 $y=-x^2+2(m-1)x+m+1$ 与 x 轴交于 A、B 两点，且 A 点在 x 轴的正半轴上，B 点在 x 轴的负半轴上，OA 的长是 a，OB 的长是 b.

(1)求 m 的取值范围；

(2)若 $a:b=3:1$，求 m 的值，并写出此时抛物线的解析式；

(3)设(2)中的抛物线与 y 轴交于点 C，抛物线的顶点是 M，抛物线上是否存在点 P，使△PAB 的面积等于△BCM 面积的 8 倍？若存在，求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由.

解 (1)设 A、B 两点的坐标分别是 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$.

$\because A$、B 两点在原点的两侧，$\therefore x_1x_2<0$.

则 $-(m+1)<0$，解得 $m>-1$.

$$\begin{aligned}\because \Delta&=[2(m-1)]^2-4\times(-1)\times(m+1)\\&=4m^2-4m+8=4\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+7.\end{aligned}$$

当 $m>-1$ 时，$\Delta>0$.

$\therefore m$ 的取值范围是 $m>-1$.

(2)$\because a:b=3:1$，设 $a=3k$，$b=k(k>0)$. 则 $x_1=3k$，$x_2=-k$.

$$\therefore\begin{cases}3k-k=2(m-1),\\3k\cdot(-k)=-(m+1).\end{cases}$$

解得 $m_1=2, m_2=\frac{1}{3}$.

$\because m=\frac{1}{3}$时，$x_1+x_2=-\frac{4}{3}$不合题意，舍去，$\therefore m=2$.

∴抛物线的解析式是 $y=-x^2+2x+3$.

(3)易求抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴的两个交点坐标是 $A(3,0)$，$B(-1,0)$；与 y 轴交点坐标是 $C(0,3)$；顶点坐标是 $M(1,4)$.

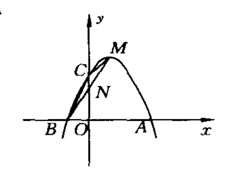


图 1 - 79

设直线 BM 的解析式为 $y=px+q$.

则$\begin{cases}4=p\cdot 1+q,\\0=p\cdot(-1)+q.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}p=2,\\q=2.\end{cases}$

∴直线 BM 的解析式是 $y=2x+2$，设直线 BM 与 y 轴交于 N，则 N 点坐标是$(0,2)$.

$\therefore S_{\triangle BCM}=S_{\triangle BCN}+S_{\triangle MNC}=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1=1$.

设 P 点坐标是(x,y)，

$\because S_{\triangle ABP}=8S_{\triangle BCM}$，$\therefore \frac{1}{2}\times AB\times|y|=8\times1$，

$\therefore |y|=4, y=\pm4$.

当 $y=4$ 时，P 点与 M 点重合，即 $P(1,4)$；

当 $y=-4$ 时，$-4=-x^2+2x+3$，解得 $x=1\pm2\sqrt{2}$.

∴满足条件的 P 点存在，共有三个，坐标为$(1,4)$、$(1+2\sqrt{2},-4)$、$(1-2\sqrt{2},-4)$.

题67 已知：如图 1 - 80，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 O，以直线 O_1O_2 为 x 轴，O 为坐标原点，建立平面直角坐标系. 在 x 轴上方的两圆的外公切线 AB 与 $\odot O_1$ 相切于点 A，与 $\odot O_2$ 相切于点 B，直线 AB 交 y 轴于点 C. 若 $OA=3\sqrt{3}$，$OB=3$.

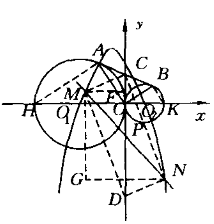


图 1 - 80

(1)求经过 O_1、C、O_2 三点的抛物线的解析式；

(2)设直线 $y=kx+m$ 与(1)中的抛物线交于 M、N 两点，若线段 MN 被 y 轴平分，求 k 的值；

(3)在(2)的条件下，点 D 在 y 轴负半轴上，当点 D 的坐标为何值时，四边形 $MDNC$ 是矩形.

解 (1)连结 HA、BK.

$\because AB$、OC 是两圆的公切线，$\therefore OC=AC=BC$.

$\therefore \angle AOB=90^\circ$，$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=6$，$\therefore OC=3$，$\therefore C(0,3)$.

$\because HO$ 是 $\odot O_1$ 的直径，$\therefore \angle HAO=\angle AOB=90^\circ$.

$\because AB$ 是$\odot O_1$的切线，$\therefore \angle BAO=\angle OHA$，

$\therefore \triangle AOH \backsim \triangle OBA$，$\therefore \dfrac{HO}{AB}=\dfrac{OA}{BO}$，

$\therefore HO=6\sqrt{3}$，$\therefore O_1O=3\sqrt{3}$，$\therefore O_1(-3\sqrt{3},0)$.

同理可求 $OK=2\sqrt{3}$，$OO_2=\sqrt{3}$，$\therefore O_2(\sqrt{3},0)$.

设经过 O_1、C、O_2 三点的抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$.

$\therefore \begin{cases} c=3, \\ 0=27a-3\sqrt{3}b+c, \\ 0=3a+\sqrt{3}b+c. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3}, \\ b=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}, \\ c=3. \end{cases}$

$\therefore y=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}x+3$.

(2)设直线 $y=kx+m$ 与 y 轴交于点 $P(0,m)$，交抛物线于点 $M(x_1,y_1)$、$N(x_2,y_2)$. 分别由 M、N 向 y 轴引垂线，垂足为 E、F.

$\because MP=NP$，$\angle MPE=\angle NPF$，

$\therefore \angle MEP=\angle NFP=90^\circ$，$\therefore \triangle MPE \cong \triangle NPF$，

$\therefore ME=NF$，即 $|x_1|=|x_2|$.

又$\because M$、N 分别在 y 轴两侧，$\therefore x_1$、x_2 异号，$\therefore x_1+x_2=0$.

设 $\begin{cases} y=kx+m, \\ y=-\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}x+3. \end{cases}$

消去 y，整理得 $x^2+(3k+2\sqrt{3})x+3(m-3)=0$.

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=-(3k+2\sqrt{3}), \\ x_1\cdot x_2=3(m-3). \end{cases}$

$\therefore 3k+2\sqrt{3}=0$，$\therefore k=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

(3)过 M 作 NF 的垂线，交 NF 的延长线于 G.

则 $NG=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{12(3-m)}$.

$MG=|y_1-y_2|=|k(x_1-x_2)|=4\sqrt{3-m}$.

$\therefore MN^2=NG^2+MG^2=28(3-m)$，

$\therefore MN=2\sqrt{7(3-m)}$.

$\because$ 四边形 $MDNC$ 是矩形，$\therefore PC=\dfrac{1}{2}MN$.

又$\because PC=|3-m|$，

$\therefore |3-m|=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7(3-m)}$，

$\therefore m^2+m-12=0$,

$\therefore m=-4$ 或 $m=3$(舍去,因为点 D 在 y 轴的负半轴上).

$\therefore PC=7$, $\therefore PD=7$.

$\therefore OD=OP+PD=11$, $\therefore D(0,-11)$.

即当点 D 的坐标为$(0,-11)$时,四边形 $MDNC$ 为矩形.

题68 已知:抛物线 $y=x^2-(m^2+5)x+2m^2+6$.

(1)求证:不论 m 取何值,抛物线与 x 轴必有两个交点,并且有一个交点是 $A(2,0)$;

(2)设抛物线与 x 轴的另一个交点为 B,AB 的长为 d,求 d 与 m 之间的函数关系式;

(3)设 $d=10$,$P(a,b)$为抛物线上一点. ①当$\triangle ABP$ 是直角三角形时,求 b 的值;②当$\triangle ABP$ 是锐角三角形、钝角三角形时,分别写出 b 的取值范围(此问不要求写出解答过程).

解 (1)$\because \Delta=[-(m^2+5)]^2-4(2m^2+6)=m^4+2m^2+1=(m^2+1)^2>0$,

$\therefore$不论 m 取何值,抛物线与 x 轴必有两个交点.

令 $y=0$,得 $x^2-(m^2+5)x+2m^2+6=0$,

解得 $x_1=2$, $x_2=m^2+3$.

$\therefore$两交点中必有一个交点是 $A(2,0)$.

(2)由(1)得,另一个交点 B 的坐标是 $B(m^2+3,0)$,

$d=|m^2+3-2|=|m^2+1|$.

$\because m^2+1>0$, $\therefore d=m^2+1$.

(3)①当 $d=10$ 时,得 $m^2=9$, $\therefore A(2,0)$, $B(12,0)$.

$y=x^2-14x+24=(x-7)^2-25$.

该抛物线的对称轴是直线 $x=7$,顶点为$(7,-25)$,

$\therefore AB$ 的中点 $E(7,0)$.

过点 P 作 $PM\perp AB$ 于点 M,连结 PE,

则 $PE=\frac{1}{2}AB=5$, $PM^2=b^2$, $ME^2=(7-a)^2$,

$\therefore (7-a)^2+b^2=5$. ①

$\because$点 P 在抛物线上,

$\therefore b=(a-7)^2-25$. ②

解①、②联列的方程组,得 $b=-1$,或 $b=0$.

当 $b=0$ 时,点 P 在 x 轴上,$\triangle ABP$ 不存在,$b=0$ 舍去,$\therefore b=-1$.

②$\triangle ABP$ 是锐角三角形时,则 $-25\leqslant b<-1$;

$\triangle ABP$ 是钝角三角形时,则 $b>-1$,且 $b\neq 0$.

题69 已知:如图 1-81,在直角坐标系中,以 AB 为直径的$\odot C$ 交 x 轴于 A,交 y 轴于 B,满足 $OA:OB=4:3$,以 OC 为直径作$\odot D$,设$\odot D$ 的半径为 2,$\odot D$ 与 x 轴交于 H.

(1)求⊙C的圆心坐标；

(2)过C作⊙D的切线EF交x轴于E，交y轴于F，求直线EF的解析式；

(3)抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的对称轴过C点，顶点在⊙C上，与y轴交点为B，求抛物线的解析式.

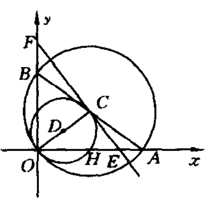
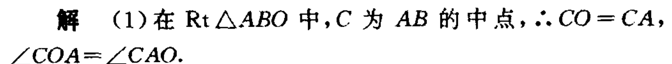


图 1 - 81



解 (1)在Rt△ABO中，C为AB的中点，∴$CO=CA$，∠COA=∠CAO.

由$OA:OB=4:3$，可知$OH:CH=4:3$，

设$OH=4k$，$CH=3k$. 又$OD=2$，∴$OC=4$.

在Rt△CHO中，$OC^2=OH^2+CH^2$，

∴$4^2=(4k)^2+(3k)^2$，∴$k=\frac{4}{5}(k>0)$.

∴$OH=\frac{16}{5}$，$CH=\frac{12}{5}$，C点坐标为$\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}\right)$.

(2)由Rt△ABO∽Rt△OCE∽Rt△FCO，

∴$\frac{OE}{AB}=\frac{OC}{OA}$，$\frac{OF}{AB}=\frac{OC}{OB}$，∴$OE=5$，$OF=\frac{20}{3}$.

∴E点坐标为$(5,0)$，F点坐标为$\left(0,\frac{20}{3}\right)$，

∴切线EF的解析式为$y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$.

(3)①当抛物线开口向上时，顶点在⊙C上，对称轴过C点，则顶点坐标为$\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}-4\right)$，且抛物线过$B$点，$B$点纵坐标为$C$点纵坐标的2倍，∴$B\left(0,\frac{24}{5}\right)$.

设抛物线解析式为$y=a(x+h)^2+k$，

则$y=a\left(x-\frac{16}{5}\right)^2-\frac{8}{5}$，把$B\left(0,\frac{24}{5}\right)$代入，得$a=\frac{5}{8}$，

∴抛物线解析式为$y=\frac{5}{8}\left(x-\frac{16}{5}\right)^2-\frac{8}{5}$，即$y=\frac{5}{8}x-4x+\frac{24}{5}$.

②当抛物线开口向下时，顶点坐标为$\left(\frac{16}{5},\frac{12}{5}+4\right)$，且过$B\left(0,\frac{24}{5}\right)$点，

同理可得抛物线解析式为$y=-\frac{5}{32}x^2+x+\frac{24}{5}$，

∴满足条件的抛物线解析式为$y=\frac{5}{8}x^2-4x+\frac{24}{5}$或$y=-\frac{5}{32}x^2+x+\frac{24}{5}$.

题70 已知：如图1-82，在△ABC中，P是AC上一点，过P、B、C作⊙O，与AB交于D点，连结DP.

(1)求证：△APD∽△ABC；

(2)若$AB=8$，$AC=6$，$BC=4$，P是AC上一动点(与A、C均不重合).

设$AP=x$，$DP^2+PC^2=y$，求y与x之间的函数关系式，并确定自变量x的取值范

围.

(3)由(2),当 $DP^2+PC^2=17$ 时,求△APD 与△ABC 的面积的比.

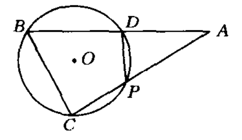


图 1 - 82

解 (1)∵$\angle ADP=\angle C$,$\angle A=\angle A$,

∴$\triangle APD\backsim\triangle ABC$.

(2)由(1)可知$\triangle APD\backsim\triangle ACD$,

$$\therefore \frac{DP}{BC}=\frac{AP}{AB}. \qquad ①$$

∵$AP=x$,$BC=4$,$AB=8$,代入①式得 $DP=\frac{x}{2}$.

又∵$PC=AC-AP=6-x$,

而 $y=DP^2+PC^2$,∴$y=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+(6-x)^2$,

∴$y=\frac{5}{4}x^2-12x+36$,x 的取值范围为 $0<x<6$.

(3)当 $DP^2+PC^2=17$ 时,

即$\frac{5}{4}x^2-12x+36=17$,解得 $x_1=2$,$x_2=7.6$(不舍题意,舍去).

∴$AP=2$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\frac{AP}{AB}\right)^2=\left(\frac{2}{8}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

题 71 已知:如图 1 - 83,$\angle ABC=30°$,O 是 BA 上的一点,以 O 为圆心作圆与 BC 相切于点 D,交 BO 于点 E,连结 ED. F 是 OA 上的一点,过 F 作 $FG\perp AB$,交 BC 于点 G,$BD=\sqrt{3}$. 设 $OF=x$,四边形 $EDGF$ 的面积为 y.

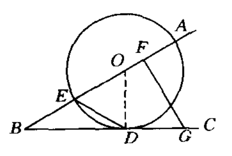


图 1 - 83

(1)求 y 与 x 的函数关系式;

(2)若四边形 $EDGF$ 面积是△BED 面积的 5 倍,试确定 FG 所在的直线与⊙O 的位置关系,并且说明理由.

解 (1)连结 OD,则 $OD\perp BC$,△BOD 是直角三角形.

∵$BD=\sqrt{3}$,$\angle B=30°$,

∴$OD=1$,$BO=2$,∴$BE=BO-OE=1$,

∴$BF=2+x$,∴$S_{\triangle BOD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵E 是 BO 的中点,∴$S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}S_{\triangle BOD}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

由 Rt$\triangle BOD\backsim$Rt$\triangle BGF$,得$\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BGF}}=\frac{BD^2}{BF^2}$,

$\therefore \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{S_{\triangle BGF}}=\dfrac{(\sqrt{3})^2}{(2+x)^2}$,

$\therefore S_{\triangle BGF}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(6+x)^2$

$\therefore S_{四边形EDGF}=S_{\triangle BGF}-S_{\triangle BED}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(2+x)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

即 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

(2)根据题意,$S_{EDGF}=5S_{\triangle BED}$

得$\dfrac{\sqrt{3}}{6}(x+2)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=5\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,

解得 $x_1=1,x_2=-5$(不合题意,舍去).

$\therefore OF=1$,FG 过半径 OF 的外端且垂直于 OF,$\therefore$直线 FG 与$\odot O$ 相切.

题 72 已知:二次函数 $y=x^2-\left(m^2-4m+\dfrac{5}{2}\right)x-2\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)$的图像与 x 轴的交点为 A、B(点 B 在点 A 的右边),与 y 轴的交点为 C.

(1)若$\triangle ABC$ 为直角三角形,求 m 的值;

(2)在$\triangle ABC$ 中,若 $AC=BC$,求$\angle ACB$ 的正弦值;

(3)设$\triangle ABC$ 的面积为 S,求当 m 为何值时,S 有最小值,并求这最小值.

解 $\because y=x^2-\left(m^2-4m+\dfrac{5}{2}\right)x-2\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)$

$=(x+2)\left[x-\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)\right]$,

$\therefore x_1=-2,x_2=m^2-4m+\dfrac{9}{2}=(m-1)^2+\dfrac{5}{2}>0$,

$\therefore A(-2,0),B\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2},0\right)$,且 $C\left[0,-2\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)\right]$.

(1)若$\triangle ABC$ 为直角三角形,则 $OC^2=AO\cdot OB$,

$\therefore 4\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)^2=2\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)$,

由 $m^2-4m+\dfrac{9}{2}>0$,$\therefore 2\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)=1$,

$\therefore m=2$.

(2)若 $AC=BC$,$CO\perp AB$,$\therefore AO=BO$,

$\therefore m^2-4m+\dfrac{9}{2}=2$,

$\therefore OC=2\left(m^2-4m+\dfrac{9}{2}\right)=4$,

$AC=BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=2\sqrt{5}$.

如图 1 - 84,过 A 作 $AD\perp BC$,垂足为 D,

$\therefore AB\cdot OC=BC\cdot AD$,$\therefore AD=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$,

$$\therefore \sin ACB=\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{8}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{5}.$$

图 1 - 84

$$(3)S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC$$

$$=\frac{1}{2}\left(m^2-4m+\frac{9}{2}+2\right)\cdot 2\left(m^2-4m+\frac{9}{2}\right)$$

$$=\left(m^2-4m+\frac{9}{2}\right)^2+2\left(m^2-4m+\frac{9}{2}\right)$$

$$=\left(m^2-4m+\frac{9}{2}+1\right)^2-1.$$

$\because m^2-4m+\dfrac{11}{2}=(m^2-4m+4)+\dfrac{3}{2}=(m-2)^2+\dfrac{3}{2}>0$,

$\therefore$ 当 $m=2$ 时,S 有最小值,

最小值为 $S=\left(2^2-4\times 2+\dfrac{9}{2}+1\right)^2-1=\dfrac{5}{4}$.

题 73 已知:如图 1 - 85,在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,过 C 点作 $CD\perp AB$,垂足为 D,且 $AD=m$,$BD=n$,$AC^2:BC^2=2:1$,又关于 x 的方程 $\dfrac{1}{4}x^2-2(n-1)x+m^2-12=0$ 两个实数根的差的平方小于 192.

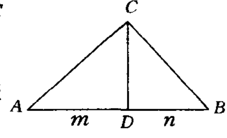


图 1 - 85

解 $\because$ 在$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90°$,$CD\perp AB$ 于 D,$\therefore \triangle ACB\backsim\triangle ADC$.

$\therefore \dfrac{AC}{AD}=\dfrac{AB}{AC}$,$\therefore AC^2=AD\cdot AB$,同理 $BC^2=BD\cdot AB$.

$\therefore \dfrac{AC^2}{BC^2}=\dfrac{AD\cdot AB}{BD\cdot AB}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{1}$,

$\therefore m=2n$. ①

$\because$ 关于 x 的方程 $\dfrac{1}{4}x^2-2(n-1)x+m^2-12=0$ 有两个实数根,

$\therefore \Delta=[-2(n-1)]^2-4\times\dfrac{1}{4}\times(m^2-12)\geqslant 0$,

$\therefore 4n^2-m^2-8n+16\geqslant 0$.

把①代入上式,得 $n\leqslant 2$. ②

若关于 x 的方程 $\dfrac{1}{4}x^2-2(n-1)x+m^2-12=0$ 的两实数根分别为 x_1、x_2,则

$x_1+x_2=8(n-1)$,$x_1x_2=4(m^2-12)$,

根据题意,有 $(x_1-x_2)^2<192$,

$\therefore (x_1+x_2)^2-4x_1x_2<192$,

即$[8(n-1)]^2-4\times4(m^2-12)<192$,

$\therefore 4n^2-m^2-8n+4<0$.

把①代入上式,得$n>\frac{1}{2}$. ③

由②、③得$\frac{1}{2}<n\leqslant2$,$\because m$、n为整数,$\therefore n$的值为1,2.

当$n=1$时,$m=2$;当$n=2$时,$m=4$,

$\therefore$所求一次函数的解析式为$y=2x+1$或$y=4x+2$.

题74 已知:如图1-86,四边形$OBCD$为平行四边形,$OD=2$,$\angle DOB=60°$,以OD为直径的$\odot P$经过点B,点N为BC边上任意一点(与点B、点C不重合),过点N作$MN\perp x$轴,垂足为A,交DC于M,设$OA=t$,$\triangle OMN$的面积为S.

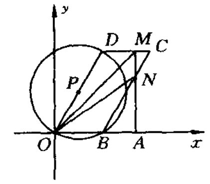


图1-86

(1)求点D的坐标和直线BC的解析式;

(2)求S和t之间的函数关系式,并写出自变量t的取值范围;

(3)当$S=\frac{3}{8}\sqrt{3}$时,判断直线MN和$\odot P$的位置关系.

解 (1)$\because OD=2$,$\angle DOB=60°$,$\therefore D(1,\sqrt{3})$. 则$B(1,0)$,$C(2,\sqrt{3})$.

$\therefore$直线BC的解析式为$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

(2)$\because A(t,0)$,$\therefore N(t,\sqrt{3}t-\sqrt{3})$,$M(t,\sqrt{3})$,

$\therefore MN=2\sqrt{3}-\sqrt{3}t$.

$\therefore S=\frac{1}{2}t(2\sqrt{3}-\sqrt{3}t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}t^2+\sqrt{3}t$,$(1<t<2)$.

(3)当$S=\frac{3}{8}\sqrt{3}$时,$\frac{3}{8}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}t^2+\sqrt{3}t$,则$t_1=\frac{1}{2}$,$t_2=\frac{3}{2}$.

而$t=\frac{1}{2}$不在$1<t<2$内,舍去,$\therefore t=\frac{3}{2}$.

当$t=\frac{3}{2}$时,$OA=\frac{3}{2}$,这时AM到P的距离为1,这时MN与$\odot P$相切.

题75 已知:如图1-87,直线$y=kx+b$与抛物线$y=ax^2$相交于点A、B两点,交x轴的负半轴于点C,设A、B、C三点的横坐标为x_1、x_2、x_3.

(1)求证:$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$;

(2)若$a=b=1$,$S_{\triangle AOB}=\frac{\sqrt{39}}{6}$,求$\angle ACO$的度数.

解 (1)由 $y=kx+b$，令 $y=0$，$\therefore x=-\dfrac{b}{k}$.

$\therefore x_3=-\dfrac{b}{k}$，$\dfrac{1}{x_3}=-\dfrac{k}{b}$.

又 x_1、x_2 是方程 $ax^2=kx+b$ 的两个根，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{k}{a}$，$x_1x_2=-\dfrac{b}{a}$.

图 1 - 87

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{k}{a}}{-\frac{b}{a}}=-\frac{k}{b},$$

$$\therefore \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}.$$

(2)若 $a=b=1$，设 $y=kx+b$ 与 y 轴交于点 D，则点 D 的坐标为(0,1)，且 $x_1+x_2=k$，$x_1\cdot x_2=-1$.

由 $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}\cdot OD\cdot|x_1|+\dfrac{1}{2}\cdot OD\cdot|x_2|$

$$=\frac{1}{2}(x_1-x_2)=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{1}{2}\sqrt{k^2+4},$$

$\therefore \dfrac{1}{2}\sqrt{k^2+4}=\dfrac{\sqrt{39}}{6}$，$\therefore k^2=\dfrac{1}{3}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $k>0$，$\therefore k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore C$ 点坐标为$(-\sqrt{3},0)$.

$\therefore \operatorname{tg}ACO=\dfrac{OD}{OC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \angle ACO=30°$.

题 76 已知：如图 1 - 88，在计算机屏幕上有一梯形 $ABCD$，$AB/\!/CD$，A 在坐标原点，$B(15,0)$，$C(12,3)$，$D(6,3)$. MN 是垂直于 x 轴的一条直线，MN 与梯形的边交于 P、Q 两点. 当 MN 从 y 轴向右移动时，梯形中被 MN 扫过的部分将改变颜色. 设 $AQ=x$，颜色改变部分面积为 S，求以 x 为自变量，S 的函数关系式.

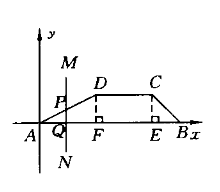


图 1 - 88

解 作 $CE\perp AB$ 于 E，$DF\perp AB$ 于 F.

在$\triangle ADF$ 中，$PQ/\!/DF$，$\dfrac{PQ}{AQ}=\dfrac{DF}{AF}$，$\therefore PQ=\dfrac{1}{2}x$.

当 $0<x\leqslant 6$ 时，$S=\dfrac{1}{4}x^2$.

当 $6<x\leqslant 12$ 时，$AQPD$ 是直角梯形，

$S=S_{\triangle ADF}+S_{矩形DFQP}=9+3(x-6)=3x-9$.

当 $12<x\leqslant 15$ 时，$PQ-15-x$，

$S=S_{\triangle ADF}+S_{矩形DFEC}+S_{梯形CEQP}$

$=9+18+\frac{1}{2}(x-12)(3+15-x)$

$=-\frac{1}{2}x^2+15x-81.$

题77 已知:如图1-89,矩形$ABCD$的边长$AB=3,AD=2$,将此矩形置于直角坐标系xOy中,使AB在x轴上,点C在直线$y=x-2$上.

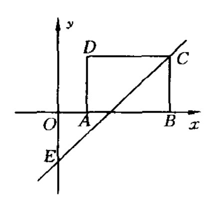
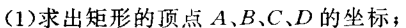
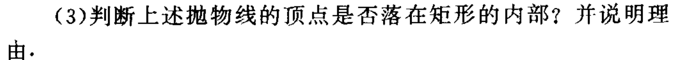


图1-89



(1)求出矩形的顶点A、B、C、D的坐标;

(2)若直线$y=x-2$与y轴交于点E,抛物线$y=ax^2+bx+c$过E、A、B三点,求抛物线的解析式;



(3)判断上述抛物线的顶点是否落在矩形的内部?并说明理由.

解 (1)$\because AB$在x轴上,$AB=CD=3,AD=BC=2$.

设$A(x_1,0)$,则$B(x_1+3,0),C(x_1+3,2),D(x_1,2)$.

$\because$点C在直线$y=x-2$上,$\therefore(x_1+3)-2=2,x_1=1$.

故矩形的顶点坐标为$A(1,0),B(4,0),C(4,2),D(1,2)$.

(2)$\because E$是直线$y=x-2$与y轴的交点,$\because E$点坐标为$(0,-2)$.

又抛物线$y=ax^2+bx+c$过E、A、B三点.

$\because A$、B在x轴上,$\therefore 1$与4是方程$ax^2+bx+c=0$的两个根,

$\therefore y=a(x-1)(x-4)=a(x^2-5x+4)$.

把$E(0,-2)$代入上式,得$a=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$所求抛物线的解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2$.

(3)$\because y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x-2=-\frac{1}{2}\left[\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+4\right]$

$=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$,

$\therefore$抛物线的顶点坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{9}{8}\right)$.

而由$1<\frac{5}{2}<4,0<\frac{9}{8}<2$,可知抛物线的顶点在矩形$ABCD$的内部.

题78 关于x的方程$x^2+px+\frac{1}{4}(p^2-25)=0$的两个不相等的实数根$\alpha$、$\beta$分别为二次函数$y=4x^2+bx+c$与$x$轴交点的横坐标,且$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=-\frac{13}{6}$,求二次函数图像最低点的坐标.

解 由根与系数的关系可得$\alpha+\beta=-p,\alpha\beta=\frac{1}{4}(p^2-25)$,

$\because\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-2=-\frac{13}{6}$,

$\therefore \dfrac{(-p)^2}{\frac{1}{4}(p^2-25)}-2=-\dfrac{13}{6}$.

解得 $p^2=1$,即 $p=\pm 1$.

无论 $p=1$ 或 $p=-1$,都有

$\Delta=p^2-4\times\frac{1}{4}(p^2-25)=25>0$,

$\therefore p$ 的值为 ± 1.

$\because \alpha$、β 为抛物线 $y=4x^2+bx+c$ 与 x 轴交点的横坐标,

$\therefore$ 令 $4x^2+bx+c=0$,α、β 则为此方程的两个根,可知

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{4}=-p$,$\alpha\beta=\dfrac{c}{4}=\dfrac{1}{4}(p^2-25)$,

$\therefore b=4p$,$c=p^2-25$.

(1)当 $p=1$ 时,得 $\begin{cases} b=4, \\ c=-24. \end{cases}$

$\therefore$ 二次函数为 $y=4x^2+4x-24=4\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-25$,

图像最低点坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},-25\right)$.

(2)当 $p=-1$ 时,得 $\begin{cases} b=-4, \\ c=-24. \end{cases}$

$\therefore$ 二次函数为 $y=4x^2-4x-24=4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-25$,

图像最低点坐标为 $\left(\dfrac{1}{2},-25\right)$.

题 79 已知:如图 1 - 90,在⊙O 中,AB 是弦,CD 是直径,$AB\perp CD$ 于 H,点 P 在 DC 的延长线上,且 $\angle PAH=\angle POA$,$OH:HC=1:2$,$PC=6$.

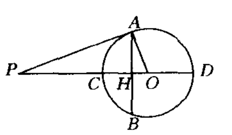


图 1 - 90

(1)求证:PA 是⊙O 的切线;

(2)求⊙O 的半径的长;

(3)试在 $\overset{\frown}{ACB}$ 上任取一点 E(与 A、B 不重合),连结 PE 并延长与 $\overset{\frown}{ADB}$ 相交于点 F,设 $EH=x$,$PF=y$,求 y 与 x 之间的函数关系式,并指出自变量 x 的取值范围.

解 (1)$\because AH\perp OH$,$\therefore \angle AHO=90°$,得 $\angle HOA+\angle OAH=90°$,

$\because \angle PAH=\angle HOA$,$\therefore \angle PAH+\angle OAH=90°$,即 $\angle PAO=90°$.

又 $\because OA$ 是⊙O 的半径,$\therefore PA$ 是圆 O 的切线.

(2)在 Rt$\triangle POA$ 中,$OA^2=OH\cdot OP$.

设 $OH=a$,那么 $CH=2a$,$OA=OC=3a$,$PO=6+3a$,

$\therefore (3a)^2=a(6+3a)$,即有 $a=1$,$\therefore OA=3$.

(3)取点 E,作割线 PEF 和 EH,连结 OF,在 Rt$\triangle PAO$ 中,$PA^2=PH\cdot PO$.

又由切割线定理,得 $PA^2=PE\cdot PF$,

$\therefore PH\cdot PO=PE\cdot PF$,即$\dfrac{PH}{PF}=\dfrac{PE}{PO}$.

又$\angle EPH=\angle OPF$,$\therefore\triangle EPH\backsim\triangle OPF$,得$\dfrac{PF}{PH}=\dfrac{OF}{EH}$.

$\because PH=8,OF=3,PF=y,EH=x$,

$\therefore y=\dfrac{24}{x}$. 自变量 x 的取值范围是 $2\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$.

题80 已知:如图 1-91,在$\triangle ABC$ 中,$AB=8,AC=6$,$\odot O$ 是$\triangle ABC$ 的外接圆,且 BC 是直径. $\odot O'$与$\odot O$ 内切于点 A,与边 AB、AC 分别交于点 D、E. 设 $BD=x,DE=y$. 求:

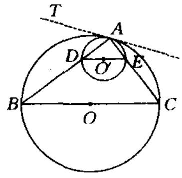
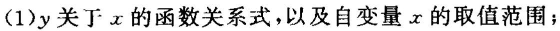
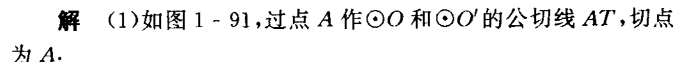


图 1-91


(1)y 关于 x 的函数关系式,以及自变量 x 的取值范围;

(2)当$\odot O'$与 BC 相切时,y 的值.


解 (1)如图 1-91,过点 A 作$\odot O$ 和$\odot O'$的公切线 AT,切点为 A.

$\because BC$ 是$\odot O$ 的直径,$\therefore\angle BAC=90°$.

$\because AB=8,AC=6,\therefore BC=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

$\because$直线 AT 切$\odot O'$和$\odot O$ 于点 A,

$\therefore\angle BAT=\angle DEA=\angle BCA,\therefore DE/\!/BC,\therefore\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$.

由题设 $DE=y,BD=x$,得$\dfrac{y}{10}=\dfrac{8-x}{8}$,

$\therefore y$ 关于 x 的函数关系式是 $y=-\dfrac{5}{4}x+10$,自变量 x 的取值范围是 $0<x<8$.

(2)当$\odot O'$与 BC 相切于 F 时,连结 $O'F$,作 $AH\perp BC$ 于 H,交 DE 于 M.

则 $AH=4.8,AM=4.8-O'F=4.8-\dfrac{y}{2}$.

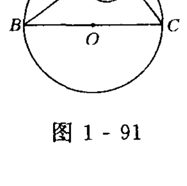


图 1-92

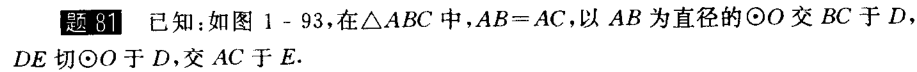
$\because DE/\!/BC,\therefore\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AM}{AH}$,

即$\dfrac{8-x}{8}=\dfrac{4.8-\dfrac{y}{2}}{4.8}$,

$\therefore 4.8x-4y=0$,

又 $y=-\dfrac{5}{4}x+10$,解得 $x=\dfrac{200}{49},y=\dfrac{240}{49}$,

$\therefore$当$\odot O'$与 BC 相切时,y 的值是$\dfrac{240}{49}$.


题81 已知:如图 1-93,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,以 AB 为直径的$\odot O$ 交 BC 于 D,DE 切$\odot O$ 于 D,交 AC 于 E.

(1)设$\angle ABC=\alpha$,关于 x 的方程 $2x^2-10x\cos\alpha+25\cos\alpha-12=0$ 有两个相等的实数

根，$BC=8$，求 AB 的长；

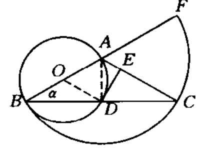


图 1 - 93

(2)若点 C 是以 A 为圆心，以 AB 为半径的半圆 $\overset{\frown}{BCF}$（点 B、F 除外）上的一个动点，设 $BC=t$，$CE=y$，利用(1)所求得的 AB 的长，求 y 与 t 之间的函数关系式，并写出自变量 t 的取值范围；

(3)在(2)的基础上，当 t 为何值时，$S_{\triangle ABC}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$.

解　(1)如图 1 - 98，连结 AD，由已知得判别式 $\Delta=0$，

即 $(-10\cos\alpha)^2-8(25\cos\alpha-12)=0$.

整理，得 $100\cos^2\alpha-200\cos\alpha+96=0$，

解得 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ 或 $\cos\alpha=\frac{6}{5}$（无意义，舍去）.

$\therefore \cos\alpha=\frac{4}{5}$.

$\because AB$ 为⊙O 的直径，

$\therefore \angle ADB=90°$，$AB=AC$，$BC=8$，$BD=DC=4$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，

$\because \cos\alpha=\frac{BD}{AB}$，$\therefore AB=\frac{BD}{\cos\alpha}=\frac{4}{\frac{4}{5}}=5$.

(2)连结 OD，由 $\triangle DEC\backsim\triangle ADC$ 得 $\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CD}$.

又 $BC=t$，$BD=DC$，$CD=\frac{1}{2}t$，$CE=y$，$CA=AB=5$，

$\therefore \frac{\frac{1}{2}t}{5}=\frac{y}{\frac{1}{2}t}$，$\therefore y=\frac{1}{20}t^2$，自变量 t 的取值范围是 $0<t<10$.

(3)$\because S_{\triangle ABC}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{25}{4}\sqrt{3}$.

在 $Rt\triangle ABD$ 中，$BD=\frac{1}{2}t$，$AB=5$.

由勾股定理，得 $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\frac{1}{2}\sqrt{100-t^2}$，

$\therefore \frac{1}{2}t\times\frac{1}{2}\sqrt{100-t^2}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$.

即 $t\cdot\sqrt{100-t^2}=25\sqrt{3}$.

两边平方，并整理，得 $t^4-100t^2+1875=0$，

$\therefore (t^2-25)(t^2-75)=0$，即有 $t^2=25$，$t^2=75$.

$\therefore t=\pm5$ 或 $t=\pm5\sqrt{3}$，经检验 $t=5$，$t=5\sqrt{3}$ 符合题意.

即当$t=5$和$t=5\sqrt{3}$时，$S_{\triangle ABC}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$.

题82 已知：如图1-94，直角梯形$ABCD$中，$AB=7$，$\angle B=90°$，$BC-AD=1$，以CD为直径的圆与AB有两个交点E、F，且$AE=1$. 问：在线段AB上是否存在P点，使以P、A、D为顶点的三角形与以P、B、C为顶点的三角形相似？若不存在，说明理由. 若存在，这样的P点有几个？并计算AP的长度.

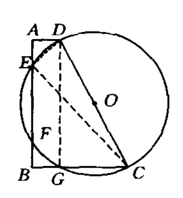


图1-94

解 连结DG. 由CD是$\odot O$的直径可知$DG\perp BC$，则$DG=AB=7$，$CG=BC-BG=BC-AD=1$.

$\therefore CD^2=DG^2+GC^2=7^2+1^2=50$.

连结DE、CE.

$\because CD$是$\odot O$的直径，

$\therefore \angle CED=90°$，$\therefore DE^2+CE^2=CD^2=50$.

$\because AE=1$，则$BE=7-1=6$.

在$Rt\triangle ADE$中，$DE^2=AE^2+AD^2=1+AD^2$.

在$Rt\triangle BCE$中，$CE^2=BE^2+BC^2=6+(1+AD)^2$，

$\therefore DE^2+CE^2=(1+AD^2)+[6^2+(1+AD)^2]$，

即$50=(1+AD^2)+[6^2+(1+AD)^2]$，

$\therefore AD^2+AD-6=0$，解得$AD=2$或$AD=-3$(舍去).

于是$BC=1+AD=3$.

若满足条件的点P存在，则只能：

①$Rt\triangle PAD\backsim Rt\triangle PBC$，或②$Rt\triangle PAD\backsim Rt\triangle CBP$.

对于①，则$\frac{PA}{PB}=\frac{AD}{BC}=\frac{2}{3}$，即$\frac{PA}{7-PA}=\frac{2}{3}$，可解得$PA=\frac{14}{5}$.

对于②，则$\frac{DA}{BC}=\frac{AD}{PB}$，即$\frac{PA}{3}=\frac{2}{7-PA}$，可解得$PA=1$，或$PA=6$.

综上所述，适合条件的点P有三点，即$PA=1$或$PA=\frac{4}{5}$或$PA=6$.

题83 已知：如图1-95，以坐标原点为圆心，$\frac{1}{2}$为半径的$\odot O$交x轴于A、B两点，点C在x轴的正半轴上，$AB=BC$，过点C作$\odot O$的切线，切点为D，连结BD.

(1)求切线CD的解析式；

(2)求$\mathrm{tg}CDB$的值；

(3)问过A、B、D三点的抛物线的顶点是否在直线CD上，并说明理由？

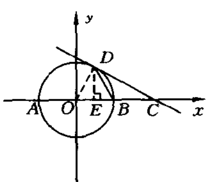


图1-95

解 (1)连结OD，过D作$DE\perp AB$，垂足为E，则$CD\perp OD$，

$\triangle ODE \backsim \triangle OCD$，$OD^2=OE\cdot OC$，

即$\left(\frac{1}{2}\right)^2=OE\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)$，$\therefore OE=\frac{1}{6}$.

在$\mathrm{Rt}\triangle ODE$中，$OE=\sqrt{OD^2-OE^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore D$点坐标为$\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$，$C$点坐标为$\left(\frac{3}{2},0\right)$.

设直线CD的解析式为$y=kx+b$，则

$$\begin{cases}\frac{k}{6}+b=\frac{\sqrt{2}}{3},\\ \frac{3}{2}k+b=0.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=-\frac{\sqrt{2}}{4},\\ b=\frac{3\sqrt{2}}{8}.\end{cases}$$

$\therefore$直线CD的解析式为$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

(2)连结AD，则$\angle COB=\angle A$，

在$\mathrm{Rt}\triangle DAE$中，$\mathrm{tg}CDB=\mathrm{tg}A=\frac{DE}{AE}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)设过A、B、D三点的抛物线解析式为$y=ax^2+bx+c$，则

$$\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}\right)^2a-\frac{1}{2}b+c=0,\\ \left(\frac{1}{2}\right)^2a+\frac{1}{2}b+c=0,\\ \left(\frac{1}{6}\right)^2a+\frac{1}{6}b+c=\frac{\sqrt{2}}{3}.\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-\frac{3\sqrt{2}}{2},\\ b=0,\\ c=\frac{3\sqrt{2}}{8}.\end{cases}$$

$\therefore$顶点坐标为$\left(0,\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)$，代入直线$CD$的解析式，满足直线$CD$的解析式$y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{3\sqrt{2}}{8}$.

$\therefore$过A、B、D三点的抛物线的顶点在直线CD上.

题84 已知：如图1-96，$\odot M$以$(5,0)$为圆心，与x轴有A、B两个交点，直线$x=5$与$\odot M$在第四象限的交点为C，过点A、B、C的抛物线与y轴交于点D，点D的纵坐标为$\frac{16}{3}$，点A在点B的右面.

(1)求抛物线的解析式；

(2)求过点B、D的直线l的解析式；

(3)当点D从原来的位置沿y轴向上移动，且抛物线保持经过点A、B、D时，其顶点

是否会进入⊙M内？请说明理由.

图 1 - 96

解　(1)设圆的半径为r，则抛物线为$y=a(x-5)^2-r$，$(a>0)$

把$\left(0,\frac{16}{3}\right)$代入，得$25a-r=\frac{16}{3}$.　①

把$(5+r,0)$代入，得$ar^2-r=0$，

$\because r\neq0$，$\therefore ar=1$.　②

由①、②及$a>0$可得$a=\frac{1}{3}$，$r=3$.

$\therefore$抛物线的解析式为$y=\frac{1}{3}(x-5)^2-3$.

即$y=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+\frac{16}{3}$.

(2)设直线l的解析式为$y=kx+b$，把$D\left(0,\frac{16}{3}\right)$、$B(2,0)$代入，即可求得$k=-\frac{8}{3}$，$b=\frac{16}{3}$，所以$l$的解析式为$y=-\frac{8}{3}x+\frac{16}{3}$.

(3)由题设可知：$-\frac{b}{2a}=5$，$b=-10a$.　③

$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}=2\times3$.　④

由③、④可得$a=\frac{c}{16}$.

抛物线的顶点坐标为$\frac{4ac-b^2}{4a}=c-25a=-\frac{9}{16}c$，

当c(点D的纵坐标)大于$\frac{16}{3}$时，$-\frac{9}{16}c<-3$，故抛物线的顶点不会进入⊙M内.

题85　已知：如图 1 - 97，矩形$ABCD$的顶点B、C在x轴正半轴上，A、D在抛物线$y=-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x$上，抛物线与$x$轴交于$O$、$E$两点，点$A$从$O$沿抛物线运动到$E$(不包括$O$、$E$两点)，矩形在抛物线与$x$轴所围成的区域内.

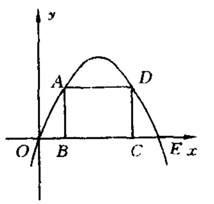


图 1 - 97

(1)设点A的坐标为(x,y)，试求矩形周长p关于变量x的解析式，并写出函数自变量x的取值范围；

(2)是否存在这样的矩形$ABCD$，它的周长为 9. 试证明你的结论.

解　(1)易知抛物线与x轴的交点为$O(0,0)$，$E(4,0)$.

$AB=CD=|y|=\left|-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right|$，

$EC=BO=|x|=x$，$CB=DA=|4-2x|$.

$\because$当$0<x<4$时，$|y|=y$，

又 $p=2AB+2BC$，

$\therefore p=-\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x+|8-4x|$，$(0<x<4$，且 $x\neq 2)$.

(2)当 $0<x<2$ 时，$p_1=-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+8$；

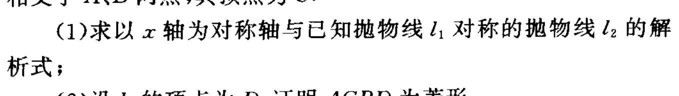
当 $2<x<4$ 时，$p_2=-\frac{4}{3}x^2+\frac{28}{3}x-8$.

令 $p_1=-\frac{4}{3}x^2+\frac{4}{3}x+8=9$，得 $\Delta_1<0$，

$p_2=-\frac{4}{3}x^2+\frac{28}{3}x-8=9$，得 $\Delta_2<0$.

所以不存在周长为 9 的矩形 $ABCD$.

题 86 已知：如图 1 - 98，抛物线 l_1：$y=x^2-3x+m$ 与 x 轴相交于 A、B 两点，其顶点为 C.



(1)求以 x 轴为对称轴与已知抛物线 l_1 对称的抛物线 l_2 的解析式；

(2)设 l_2 的顶点为 D，证明 $ACBD$ 为菱形；

(3)若菱形 $ACBD$ 的面积为 $\frac{1}{4}$，求 m 的值，当 m 为何值时，$ACBD$ 为正方形？

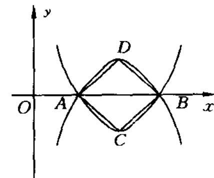


图 1 - 98

解 (1)根据题意，抛物线 l_1 的顶点 C 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{4m-9}{4}\right)$，

以 x 轴为对称轴与已知抛物线 l_1 对称的抛物线 l_2 的顶点 D 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{4m-9}{4}\right)$.

$\because l_1$ 与 l_2 的形状相同，方向相反，

$\therefore l_2$ 的解析式为 $y=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{4m-9}{4}$，即 $y=-x^2+3x-m$.

(2)$\because C$、D 关于 x 轴对称，

$\therefore x$ 轴垂直平分 CD，$AD=AC$，$BD=BC$.

$\because A$、B 关于抛物线 l_1 的对称轴 CD 对称，

$\therefore CD$ 垂直平分 AB，$AD=BD$，

$\therefore AD=BD=BC=AC$，$\therefore$ 四边形 $ACBD$ 为菱形.

(3)当 $y=0$ 时，方程 $x^2-3x+m=0$ 的两个根为 x_1、x_2，则

$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=m$.

$\therefore AB=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{9-4m}$，

由(1)知 $CD=\left|\frac{4m-9}{4}-\left(-\frac{4m-9}{4}\right)\right|=\frac{|4m-9|}{2}$，

$\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点，

$\therefore \Delta=9-4m>0$，$\therefore CD=\dfrac{9-4m}{2}$.

$\because \dfrac{1}{2}AB\cdot CD=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}\sqrt{9-4m}\cdot\dfrac{9-4m}{2}=\dfrac{1}{4}$，解得 $m=2$.

当 $ACBD$ 为正方形时，有 $AB=CD$，即 $\sqrt{9-4m}=\dfrac{9-4m}{2}$，

解得 $m=\dfrac{5}{4}$.

$\therefore$ 当 $m=2$ 时，菱形 $ACBD$ 的面积为$\dfrac{1}{4}$，当 $m=\dfrac{5}{4}$时，$ACBD$ 为正方形.

题 87 已知：如图 1－99，以 $Rt\triangle ACB$ 的直角边 AB 为直径的半圆交斜边 AC 于 D，过 D 作半圆的切线交 BC 于点 E，$EG/\!/BA$，交半圆于点 F 和 G.

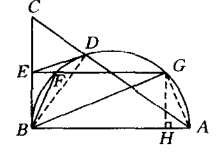


图 1－99

(1)求证：$EF+EG=AB$；

(2)若$\angle EBF=\alpha$，$\angle EBG=\beta$，$AD:CD=m:n$，求一个一元二次方程，使它的两根分别为 $\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{tg}\beta$(用含 m、n 的式子表示).

证明 (1)过点 G 作 $GH\perp AB$ 于 H. 连结 AG，易证得四边形 $EBHG$ 为矩形.

$\therefore EG=BH$，$EB=HG$.

$\because EG/\!/BA$，$\therefore \overset{\frown}{AG}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore AG=EF$.

$\therefore Rt\triangle AHG\cong Rt\triangle FEB$.

$\therefore AH=EF$，得 $AB=EF+EG$.

(2) $\because \mathrm{tg}\alpha=\dfrac{EF}{EB}$，$\mathrm{tg}\beta=\dfrac{EG}{BE}$，

$\therefore \mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\dfrac{AB}{BE}$，$\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=\dfrac{EF\cdot EG}{BE^2}$.

$\because BC$ 是$\odot O$ 的切线，$\therefore BE^2=EF\cdot EG$，$\therefore \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$.

连结 BD，$\angle BDA=90°$，$\therefore \triangle ADB\backsim\triangle BDC$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{BD}{CD}$.

$\because AD:CD=m:n$，设 $AD=mx$，$CD=nx$，$\therefore BD^2=mnx^2$.

$\therefore BD=\sqrt{mn}x$，$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{mx}{\sqrt{mn}x}=\dfrac{\sqrt{mn}}{n}$.

$\because DE$ 切$\odot O$ 于 D，$EB=ED$，$\therefore BE=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore \dfrac{AB}{BE}=\dfrac{2AB}{BC}=\dfrac{2\sqrt{mn}}{n}$，$\therefore \mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\dfrac{2\sqrt{mn}}{n}$，

$\therefore$ 以 $\mathrm{tg}\alpha$、$\mathrm{tg}\beta$ 为根的一元二次方程是 $x^2-\dfrac{2\sqrt{mn}}{n}x+1=0$，

即 $nx^2-2\sqrt{mn}x+n=0$.

题 88 已知：直线 $y=-2x+6$ 交 x 轴于点 A，交 y 轴于点 B. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、B 两点及 x 轴上另一点 C，且 $AC=2$.

(1)当 $\text{tg}BCO>\text{tg}BAO$ 时，求抛物线的解析式；

(2)点 D 的坐标为 $(-2,0)$，在直线 $y=-2x+6$ 上确定点 P，使△APD 与△ABO 相似；

(3)在(1)、(2)的条件下，在 x 轴下方的抛物线上，是否存在点 E，使△ADE 的面积等于四边形 $APCE$ 的面积？如果存在，请求出点 E 的坐标；如果不存在，请说明理由.

解 (1)由题意，得 $A(3,0)$，$B(0,6)$.

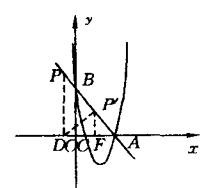


图 1 - 100

$\because \text{tg}BCO=\dfrac{OB}{OC}>\text{tg}BAO=\dfrac{OB}{OA}$,

$\therefore CO<OA$，∴点 C 在 AO 内.

$\because AC=2$，$\therefore C(1,0)$.

∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A、B、C 三点，

$\therefore \begin{cases} a+b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ c=6. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-8, \\ c=6. \end{cases}$

$\therefore y=2x^2-8x+6$.

(2)∵△APD 与△ABO 有公共角 BAO，且 $\angle BOA=90°$，

∴当 $\angle ADP=90°$ 或 $\angle APD=90°$ 时，△APD 与△ABO 相似.

①过点 D 作 $DP\perp AD$ 于 D 交 AB 于 P，$\therefore PD/\!/BO$.

∴P、D 两点的横坐标相等且为 -2.

∵P 在直线 $y=-2x+6$ 上，

∴点 P 的纵坐标 $y=-2\times(-2)+6=10$，$\therefore P(-2,10)$.

②过点 D 作 $DP'\perp AB$ 于 P'，

$\therefore \dfrac{AP'}{AO}=\dfrac{AD}{AB}$，$\therefore AP'=\sqrt{5}$.

作 $P'F\perp AO$ 于 F，则 $P'F=2$.

∵P' 在直线 $y=-2x+6$ 上，∴点 P' 的坐标为 $(2,2)$.

(3)当点 P 坐标为 $(-2,10)$ 时，点 E 不存在；当点 P 坐标为 $(2,2)$ 时，点 E 存在.

①设在 x 轴下方的抛物线上有一点 $E(m,n)$，则 $n<0$.

$\because S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot|n|=\dfrac{5|n|}{2}$,

$S_{四边形APCE}=\dfrac{1}{2}\times AC\times 10+\dfrac{1}{2}\times AC\times|n|=10+|n|$.

$\because S_{\triangle ADE}=S_{四边形APCE}$,

$\therefore \dfrac{5|n|}{2}=10+|n|$，$|n|=\dfrac{20}{3}$，$n=-\dfrac{20}{3}$.

$\because y=2x^2-8x+6=2(x-2)^2-2$,

$\therefore y_{最小}=-2>-\frac{20}{3}$，∴此时 E 点不在 x 轴下方的抛物线上.

②同上可知：$S_{四边形AP'CE}=\frac{1}{2}AC\times 2+\frac{1}{2}AC\times|n|$，

$\therefore \frac{5|n|}{2}=2+|n|$，$|n|=\frac{4}{3}$，$n=-\frac{4}{3}$，

$\because y_{最小}=-2<-\frac{4}{3}$，

∴点 $E\left(m,-\frac{4}{3}\right)$ 在 x 轴下方的抛物线上，

$\therefore -\frac{4}{3}=2m^2-8m+6$，整理得 $3m^2-12m+11=0$，解得 $m=\frac{6\pm\sqrt{3}}{3}$.

∴点 E 的坐标为 $\left(\frac{6+\sqrt{3}}{3},-\frac{4}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

题 89 已知：如图 1 - 101，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C 点，大圆的圆心 D 是该抛物线的顶点，小圆的圆心 B 是该抛物线与 x 轴正半轴的交点. 大圆与 x 轴相切于 E，小圆与 y 轴相切于 O，两圆外切，且大圆半径是小圆半径的 4 倍.

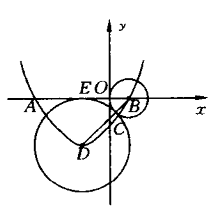


图 1 - 101

(1)求 $ac+b$ 的值；

(2)当△ABC 的面积为 $\frac{20}{3}$ 时，求抛物线的函数解析式.

解 (1)设小圆半径为 r，则大圆半径为 $4r$.

由题意，得 $OB=r$，$DE=4r$.

∵两圆外切，$\therefore BD=5r$，由勾股定理得 $EB=3r$.

于是抛物线与 x 轴的交点 $A(-5r,0)$，$B(r,0)$，顶点 $D(-2r,-4r)$.

分别代入抛物线方程有

$$\therefore\begin{cases}-\frac{b}{2a}=-2r,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=-4r,\\ ar^2+br+c=0.\end{cases}\text{化简，得}\begin{cases}b=4ar,\\ c=4ar^2-4r,\\ a=\frac{4}{9r}.\end{cases}$$

解得 $a=\frac{4}{9r}$，$b=\frac{16}{9}$，$c=-\frac{20}{9}r$.

$\therefore ac+b=\frac{4}{9r}\left(-\frac{20}{9}r\right)+\frac{16}{9}=\frac{64}{81}$.

(2)$\because S_{\triangle}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=\frac{1}{2}\cdot 6r\cdot\frac{20}{9}r=\frac{20}{3}r^2$.

由已知得$\frac{20}{3}r^2=\frac{20}{3}$，$\therefore r=\pm 1$(负值舍去)，$\therefore r=1$.

$\therefore y=\frac{4}{9}x^2+\frac{16}{9}x-\frac{20}{9}$.

题90 已知：如图 1 - 102，在直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 内接于以原点 O 为圆心，以 1 为半径的圆，AD 边与 x 轴相交于点 P，$\angle APx=105°$. 求正方形 $ABCD$ 的四个顶点 A、B、C、D 的坐标.

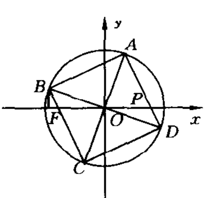


图 1 - 102

解 $\because ABCD$ 是$\odot O$的内接正方形，

$\therefore OA=OB=1$，$\angle OAP=45°$，$\angle AOB=90°$.

又$\because \angle APx=105°$，$\therefore \angle AOx=60°$，则$\angle BOx=150°$.

$\therefore \sin AOx=\frac{y}{OA}$，$\cos AOx=\frac{x}{OA}$，

$\therefore x=OA\cdot\cos AOx=\frac{1}{2}$，

$y=OA\cdot\sin AOx=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore A$ 点坐标是$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

作 $BF\perp x$ 轴与 F，则在 Rt$\triangle BOF$ 中，$OB=1$，$\angle BOF=30°$，

$\therefore OF=1\times\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$BF=1\times\sin 30°=\frac{1}{2}$.

$\because B$ 点在第二象限，$\therefore B$ 点的坐标是$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

$\because C$、D 分别与 A、B 关于原点对称，

$\therefore C$ 点坐标是$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$D$ 点坐标是$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

题91 已知：如图 1 - 103，把矩形纸片 $OABC$ 放入直角坐标系 xOy 中，使 OA、OC 分别落在 x 轴、y 轴的正半轴上，连结 AC. 将$\triangle ABC$ 沿 AC 翻折，点 B 落在该坐标平面内，设这个落点为 D，CD 交 x 轴于点 E. 如果 $CE=5$，OC、OE 的长是关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x+12=0$ 的两个根，并且 $OC>OE$.

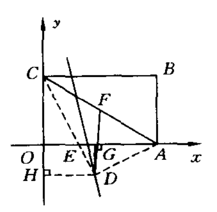


图 1 - 103

(1)求点 D 的坐标；

(2)如果点 F 是 AC 的中点，判断点$(8,-20)$是否在过 D、F 两点的直线上，并说明理由.

解 (1)$\because OC$、OE 的长是关于 x 的方程 $x^2+(m-1)x+12=0$ 的两个根，

设 $OC=x_1$，$OE=x_2$，$x_1>x_2$.

$\therefore x_1+x_2=-(m-1)$，$x_1\cdot x_2=12$.

在 Rt△COE 中，$OC^2+OE^2=CE^2$，$CE=5$.

∴$x_1^2+x_2^2=5^2$.

∴$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=25$，

即$[-(m-1)]^2-2\times12=25$，

解得 $m_1=-6$，$m_2=8$.

∵$OC+OE=x_1+x_2=-(m-1)>0$，

∴$m=8$ 不符合题意，舍去.

∴$m=-6$.

解方程 $x^2-7x+12=0$，得 $x_1=4$，$x_2=3$.

∴$OC=4$，$OE=3$.

△ABC 沿 AC 翻折后，点 B 的落点为 D，过 D 点作 $DG\perp x$ 轴于 G，$DH\perp y$ 轴于 H.

∴$\angle BCA=\angle ACD$.

∵矩形 $OABC$ 中，$CB/\!/OA$，∴$\angle BCA=\angle CAE$.

∴$\angle CAE=\angle ACD$，∴$EC=EA$.

可证得 Rt△COE≌Rt△ADE，

∴$ED=3$，$AD=4$，$EA=5$.

在 Rt△ADE 中，$\frac{1}{2}DG\cdot AE=\frac{1}{2}ED\cdot AD$，

∴$DG=\frac{ED\cdot AD}{AE}=\frac{12}{5}$.

在△CHD 中，$OE/\!/HD$，

∴$\frac{CE}{CD}=\frac{OE}{HD}$，即$\frac{5}{5+3}=\frac{3}{HD}$，∴$HD=\frac{24}{5}$.

由已知条件可知 D 是第四象限的点，

∴点 D 的坐标是$\left(\frac{24}{5},-\frac{12}{5}\right)$.

(2)∵F 是 AC 的中点，∴点 F 的坐标是(4,2).

设过点 D、F 两点的直线的解析式为 $y=kx+b$，

∴$\begin{cases}4k+b=2,\\ \frac{24}{5}k+b=-\frac{12}{5}.\end{cases}$

解这个方程组，得 $k=-\frac{11}{2}$，$b=24$.

∴过 D、F 两点的直线的解析式为 $y=-\frac{11}{2}x+24$.

∵$x=8$，$y=-20$ 满足上述解析式.

∴点$(8,-20)$在过 D、F 两点的直线上.

题 92 已知：a、b、c 分别是△ABC 的$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边($a>b$)，二次函数 $y=(x$

$-2a)x-2b(x-a)+c^2$ 的图像的顶点在 x 轴上，且 $\sin A$、$\sin B$ 是关于 x 的方程 $(m+5)x^2-(2m-5)x+m-8=0$ 的两个根.

(1)判断$\triangle ABC$ 的形状，并说明理由；

(2)求 m 的值；

(3)若这个三角形的外接圆的面积为 25π，求$\triangle ABC$ 的内接正方形(四个顶点都在三角形三边上)的边长.

解　(1)由 $y=(x-2a)x-2b(x-a)+c^2$ 整理，得

$y=x^2-2(a+b)x+c^2+2ab$.

由已知二次函数图像的顶点在 x 轴上，则

$4(a+b)^2-4(c^2+2ab)=0$,

$\therefore a^2+b^2=c^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)$\because \sin A$、$\sin B$ 是关于 x 的方程 $(m+5)x^2-(2m-5)x+m-8=0$ 的两个根，

$$\therefore \begin{cases} \sin A+\sin B=\dfrac{2m-5}{m+5}, \\ \sin A\cdot\sin B=\dfrac{m-8}{m+5}. \end{cases}$$

由(1)得$\angle A+\angle B=90°$，$\therefore \sin B=\cos A$.

$\because \sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\therefore (\sin A+\cos A)^2-2\sin A\cdot\cos A=1$,

$$\therefore \left(\frac{2m-5}{m+5}\right)^2-\frac{2(m-8)}{m+5}=1.$$

$\therefore m^2-24m+80=0$，解得 $m_1=20$，$m_2=4$.

$\because \sin A\cdot\sin B=\dfrac{m-8}{m+5}>0$.

$\therefore m=4$ 不合题意，舍去，$\therefore m=20$.

(3)$\because \pi R^2=25\pi$，$R>0$，$\therefore R=5$.

$\therefore c=2R=10$.

当 $m=20$ 时，$25x^2-35x+12=0$,

解得 $\sin A=\dfrac{4}{5}$，$\sin B=\dfrac{3}{5}$.

$\therefore a=c\sin A=8$，$b=c\sin B=6$.

设正方形的边长为 x,

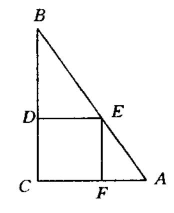


图 1 - 104

①当正方形如图 1 - 104 时，

$\because DE /\!/ CA$，得$\dfrac{8-x}{8}=\dfrac{x}{6}$,

$\therefore x=\dfrac{24}{7}$.

②当正方形如图 1 - 105 时，

作高 CH 交 DG 于点 K，则

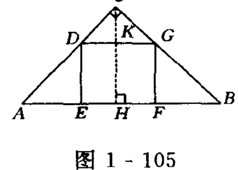


图 1 - 105

$CH=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{24}{5}$.

$\because \triangle CDG\backsim\triangle CAB$，$\therefore \dfrac{CK}{CH}=\dfrac{DH}{AB}$，

$\therefore \dfrac{\frac{24}{5}-x}{\frac{24}{5}}=\dfrac{x}{10}$，

$\therefore x=\dfrac{120}{37}$.

答：$\triangle ABC$ 的内接正方形的边长为 $\dfrac{24}{7}$ 或 $\dfrac{120}{37}$.

题 93 已知：如图 1 - 106，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，若方程 $(b+c)x^2+2ax+c-b=0$ 有两个相等的实数根.

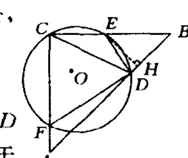
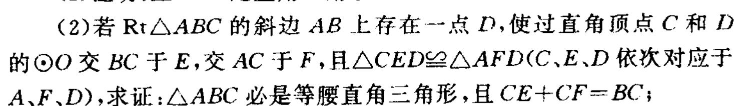


图 1 - 106


(1)证明：$\triangle ABC$ 是直角三角形；


(2)若 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上存在一点 D，使过直角顶点 C 和 D 的 $\odot O$ 交 BC 于 E，交 AC 于 F，且 $\triangle CED\cong\triangle AFD$（$C$、$E$、$D$ 依次对应于 A、F、D），求证：$\triangle ABC$ 必是等腰直角三角形，且 $CE+CF=BC$；

(3)若第(2)题中的条件成立，又知 $\dfrac{CE}{CB}$ 是方程 $(b+c)x^2+2ax+c-b=0$ 的根，求 $\mathrm{tg}CDF$ 的值.

证明 (1)由方程 $(b+c)x^2+2ax+c-b=0$ 有两个相等的实数根，

得 $\Delta=0$，即 $(2a)^2-4(b+c)(c-b)=0$，

解得 $a^2+b^2=c^2$，$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形，$\angle C$ 为直角.

(2)若 Rt$\triangle ABC$ 的斜边 AB 上存在一点 D，使过点 C 和 D 的 $\odot O$ 交 BC 于 E，交 AC 于 F，且 $\triangle CED\cong\triangle AFD$.

$\therefore CD=AD$，$\angle BCD=\angle A$.

由(1)知，$\angle ACB=90°$，$\therefore \angle A+\angle B=90°$，

$\therefore \angle BCD+\angle B=90°$，$\therefore \angle ADC=\angle CDB=90°$，

$\therefore \triangle CDB\cong\triangle CDA$，则 $CB=CA$，

$\therefore \triangle ABC$ 必是等腰直角三角形.

由 $\triangle CED\cong\triangle AFD$ 知 $CE=AF$，

故 $CE+CF=AF+CF=CA=BC$.

(3)$\because \dfrac{CE}{CB}=\dfrac{CE}{a}$ 是方程 $(b+c)x^2+2ax+c-b=0$ 的根，

$\therefore (b+c)\dfrac{CE^2}{a^2}-2a\cdot\dfrac{CE}{a}+c-b=0$，

把 $a^2=c^2-b^2$ 代入，得

$(b+c)\cdot\dfrac{CE^2}{c^2-b^2}-2CE+c-b=0$，

整理，得$[CE-(c-b)]^2=0$，$\therefore CE=c-b$.

则 $BE=BC-CE=AC-CE=b-(c-b)=2b-c$.

过点 E 作 $EH\perp AB$ 于 H，则 $EH=BH$，

由$\triangle CED\cong\triangle AFD$ 知，$\angle CDE=\angle ADF$，

而$\angle CDE+\angle BDE=90°$，$\angle ADF+\angle CDF=90°$，

$\therefore\angle CDF=\angle BDE$. 又$\because EH\parallel CD$，

$\therefore \mathrm{tg}CDF=\mathrm{tg}BDE=\frac{EH}{DH}=\frac{BH}{DH}=\frac{BE}{CE}=\frac{2b-c}{c-b}$.

题 94　已知：如图 1 - 107，双曲线 $y=\frac{5}{x}$ 在第一象限的一支上有一点 $C(1,5)$，过点 C 的直线 $y=kx+b(k>0)$ 与 x 轴交于 $A(a,0)$.

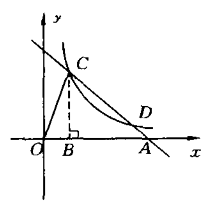
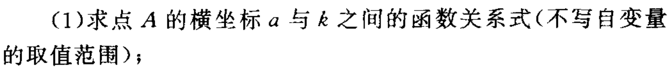
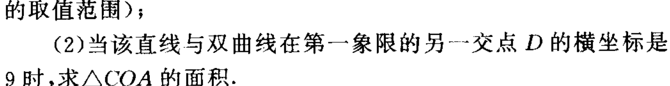


图 1 - 107



(1)求点 A 的横坐标 a 与 k 之间的函数关系式(不写自变量的取值范围)；



(2)当该直线与双曲线在第一象限的另一交点 D 的横坐标是 9 时，求$\triangle COA$ 的面积.

解　(1)$\because$点 $C(1,5)$在直线 $y=-kx+b$ 上，

$\therefore -k+b=5$，$b=5+k$，$\therefore y=-kx+5+k$.

又$\because$点 $A(a,0)$在该直线上，$\therefore -ka+5+k=0$，

因此，所求函数的关系式为 $a=\frac{5}{k}+1$.

(2)把另一交点 D 的横坐标 9 代入双曲线 $y=\frac{5}{x}$ 中，得 $y=\frac{5}{9}$，即点 D 的坐标为 $\left(9,\frac{5}{9}\right)$.

又$\because$点 D 在直线上，$\therefore -9k+k+5=\frac{5}{9}$，$\therefore k=\frac{5}{9}$.

则 $a=\frac{5}{\frac{5}{9}}+1=10$，$A(10,0)$，作 $CB\perp Ox$ 轴于 B.

$\therefore S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}\times OA\times CB=\frac{1}{2}\times10\times5=25$.

题 95　已知：如图 1 - 108，过$\odot O$ 外一点 P 分别作$\odot O$ 的切线 PB、PC，切点为 B、C，BO 的延长线交$\odot O$ 于点 A，交 PC 的延长线于点 D，PA 交$\odot O$ 于点 K，过 A 作 $AE\parallel BC$，交 DC 于点 E，PO 交 BC 于点 G.

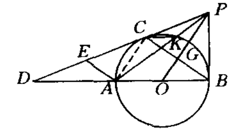


图 1 - 108

(1)求证：$DA^2=DE\cdot DC$；

(2)如果 $DE=EC$，且 $\sin CKA$ 与$\odot O$ 的半径 r 的值是方程

$x^2-\frac{15+\sqrt{3}}{3}\cdot x-m=0$ 的两实根(m 是实数). 求 PK 的值.

证明 (1)连结 AC.

$\because AE/\!/BC$, $\therefore \angle EAD=\angle CBA$.

又$\because PC$ 切$\odot O$ 于点 C, $\therefore \angle ACD=\angle CBA$, $\therefore \angle EAD=\angle ACD$.

又$\because \angle D=\angle D$, $\therefore \triangle DEA\backsim\triangle DAC$.

$\therefore \frac{DE}{DA}=\frac{DA}{DC}$,即 $DA^2=DE\cdot DC$.

(2)$\because DE=EC$, $\therefore DA^2=2DE^2$.

又$\because DA=AB=2r$, $\therefore DE=\sqrt{\frac{DA^2}{2}}=\sqrt{2}r$.

又$\because PB$ 切$\odot O$ 于点 B, $\therefore PB=PC$,设 PC 长为 xr,则 $PB=xr$.

又$\because OB\perp PB$, $\therefore \angle OBP=90°$,

$\therefore$在 $\mathrm{Rt}\triangle PBD$ 中,$DP^2=PB^2+DB^2$,即$(DC+PC)^2=PB^2+DB^2$,

$\therefore (2\sqrt{2}r+xr)^2=(xr)^2+(4r)^2$,即$(2\sqrt{2}+x)^2=x^2+16$,

解得 $x=\sqrt{2}$, $\therefore PC=PB=\sqrt{2}r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中,$PA=\sqrt{PB^2+AB^2}=\sqrt{(\sqrt{2}r)^2+(2r)^2}=\sqrt{6}r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BPO$ 中,$OP=\sqrt{PB^2+OB^2}=\sqrt{(\sqrt{2}r)^2+r^2}=\sqrt{3}r$.

又$\because \angle BPG=\angle CPG$, $\therefore OP\perp BC$, $\therefore \angle OGB=90°$.

又$\because \angle GOB+\angle OBG=\angle BOP+\angle BPO=90°$, $\therefore \angle ABC=\angle BPO$.

又$\because \angle CKA=\angle ABC$, $\angle CKA=\angle BPO$.

$\therefore \sin CKA=\sin BPO=\frac{OB}{OP}=\frac{r}{\sqrt{3}r}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

由题意及根与系数的关系,有$\frac{\sqrt{3}}{3}+r=\frac{15+\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore r=5$, $PC=\sqrt{2}r=5\sqrt{2}$, $PA=\sqrt{6}r=5\sqrt{6}$.

又$\because PC^2=PK\cdot PA$, $\therefore PK=\frac{PC^2}{PA}=\frac{(5\sqrt{2})^2}{5\sqrt{6}}=\frac{5}{3}\sqrt{6}$.

题 96 已知:如图 1-109,点 $A(0,6)$,$B(3,0)$,$C(2,0)$,$M(0,m)$,其中 $m<6$. 以 M 为圆心,MC 为半径作圆.

(1)当 m 为何值时,$\odot M$ 与直线 AB 相切?

(2)当 $m=0$ 时,$\odot M$ 与直线 AB 有怎样的位置关系? 当 $m=3$ 时,$\odot M$ 与直线 AB 有怎样的位置关系?

(3)由第(2)题验证的结果,你是否得到启发,从而说出 m 在什么范围内取值时,$\odot M$

与直线 AB 相离、相交？（第(2)、(3)题只需写出结果，不必写过程）.

解 (1)连结 MC，过点 M 作 $MH\perp AB$，垂足为 H.

在 $Rt\triangle MOC$ 中，$MC=\sqrt{m^2+4}$.

若⊙M 与直线 AB 相切，则 $MH=MC=\sqrt{m^2+4}$.

$\therefore Rt\triangle AHM\backsim Rt\triangle AOB$，$\therefore \dfrac{MH}{OB}=\dfrac{AM}{AB}$.

$\therefore$ 有 $\dfrac{\sqrt{m^2+4}}{3}=\dfrac{6-m}{3\sqrt{5}}$.



$\therefore m^2+3m-4=0$，解得 $m=1$ 或 $m=-4$.

(2)当 $m=0$ 时，⊙M 与直线相离；当 $m=3$ 时，⊙M 与直线相交.

(3)当 $-4<m<1$ 时，⊙M 与直线相离；

当 $m<-4$ 或 $1<m<6$ 时，⊙M 与直线 AB 相交.

图 1 - 109

题 97 已知：在直角坐标系中，直线 $y=kx+b$ 的图像不经过第三象限，与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，抛物线 $y=mx^2-(m+2n)x-2m+4n$ 经过 A、B 两点，并且与 x 轴有另一个交点 C，$OC>2$.

(1)若 $AB=\sqrt{5}$，$S_{\triangle ABC}=3$，求直线和抛物线的解析式；

(2)在抛物线上是否存在一点 $P(x_0,y_0)$，其中 $y_0>0$，使得 $S_{\triangle PAC}=2S_{\triangle ABC}$，若存在，求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由.

解 (1)由 $mx^2-(m+2n)x-2m+4n=0$，

即 $(x-2)(mx+m-2n)=0$，$\therefore x_1=2$，$x_2=\dfrac{2n}{m}-1$.

$\because OC>2$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,0)$.

$\because AB=\sqrt{5}$，$OA=2$，$\therefore OB=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$.

$\because$ 直线 $y=kx+b$ 不经过第三象限，

$\therefore k<0$，$b>0$，点 B 的坐标为 $(0,1)$.

$\therefore$ 过点 A、B 的直线解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$.

$\because S_{\triangle ABC}=3$，$\therefore 3=\dfrac{1}{2}\cdot AC\cdot 1$，$\therefore AC=6$.

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $C_1(-4,0)$ 或 $C_2(8,0)$.

由待定系数法，可求得过点 $A(2,0)$，$B(0,1)$、$C_1(-4,0)$ 的抛物线的解析式为 $y_1=-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{4}x+1$.

过点 $A(2,0)$，$B(0,1)$，$C_2(8,0)$ 的抛物线的解析式为 $y_2=\dfrac{1}{16}x^2-\dfrac{5}{8}x+1$.

(2)对于抛物线 $y_1=-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{4}x+1=-\frac{1}{8}(x+1)^2+\frac{9}{8}$，其顶点坐标为 $\left(-1,\frac{9}{8}\right)$，开口向下，$\because \frac{9}{8}>0$，但 $\frac{1}{2}\times 6\times\frac{9}{8}=3\frac{3}{8}<6$，

所以不能使 $S_{\triangle PAC}=2S_{\triangle ABC}=6$，即在抛物线 y_1 上不存在点 $P(x_0,y_0)$，使 $S_{\triangle PAC}=2S_{\triangle ABC}$.

对于抛物线 $y_2=\frac{1}{16}x^2-\frac{5}{8}x+1$，其开口向上，$AC_2=6$，若点 $P(x_0,y_0)$ 存在，此时，有 $S_{\triangle PAC}=2S_{\triangle ABC}=6$，即 $\frac{1}{2}\times 6\cdot y_0=6$，$(y_0>0)$，$\therefore y_0=2$.

即 $\frac{1}{16}x^2-\frac{5}{8}x+1=2$，解此方程得 $x_1=5+\sqrt{41}$，$x_2=5-\sqrt{41}$.

$\therefore$ 在抛物线 y_2 上，存在着两个点 P_1、P_2，使 $S_{\triangle P_1AC}=2S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle P_2AC}=2S_{\triangle ABC}$，这两个点的坐标分别为 $P_1(5+\sqrt{41},2)$、$P_2(5-\sqrt{41},2)$.

题 98 已知：如图 1-110，$\odot M$ 交 x 轴正半轴于 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$ 两点 $(x_1<x_2)$，交 y 轴正半轴于 $C(0,y_1)$、$D(0,y_2)$ 两点 $(y_1<y_2)$.



(1)求证：$\angle CAO=\angle DAM$；

(2)若 x_1、x_2 是方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根，y_1、y_2 是方程 $y^2-(q-1)y+(p-1)=0$ 的两个根，且 $x_1+y_1+x_2+y_2=12$，求 p 和 q 的值；

(3)过点 A 分别作 DM、CM 的垂线 AE、AF，垂足分别为点 E 和 F，根据(2)，求证：$\triangle AEM\cong\triangle MFA$.

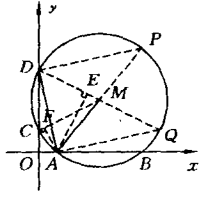


图 1-110

证明 (1)延长 AM 交 $\odot M$ 于点 P，连结 PD，由圆内接四边形的性质定理，得 $\angle APD=\angle ACO$.

而 $\angle CAO=90°-\angle ACO$，$\angle DAM=90°-\angle APD$，$\therefore \angle CAO=\angle DAM$.

(2)由条件知：$x_1+x_2=p$，$x_1\cdot x_2=q$，$y_1+y_2=q-1$，$y_1\cdot y_2=p-1$.

$\because x_1+y_1+x_2+y_2=12$，

$\therefore p+q-1=12$. ①

在 $\odot M$ 中，由切割线定理的推论，得

$x_1x_2=y_1y_2$，$\therefore q=p-1$. ②

由①、②解得 $p=7$，$q=6$.

(3)由(2)可知，A、B、C、D 的坐标分别为 $A(1,0)$，$B(6,0)$，$C(0,2)$，$D(0,3)$，可求得 $\odot M$ 的半径长为 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$.

过点 A 分别作 DM、CM 的垂线 AE、AF，垂足分别为点 E 和 F，

延长 DM 交 $\odot M$ 于点 Q，连结 AQ，可证得 $\triangle ADE\backsim\triangle QDA$，$\therefore DE=\frac{AD^2}{DQ}$.

而 $AD^2=OD^2+OA^2=3^2+1^2=10, DQ=2\cdot\frac{5}{2}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$,

$\therefore DE=\frac{10}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}, EM=DM-DE=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

同理可得 $CF=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, FA=\sqrt{AC^2-CF^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$,

$\therefore EM=FA$, $\therefore \mathrm{Rt}\triangle AEM\cong \mathrm{Rt}\triangle MFA$.

题 99 已知:如图 1 - 111,在$\triangle ABC$中,$AB=BC=2$,高 $BE=\sqrt{3}$,在 BC 边的延长线上取一点 D,使 $CD=3$.

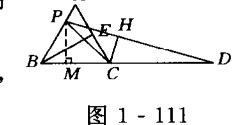


图 1 - 111

(1)现有一动点 P,由 A 沿 AB 移动,设 $AP=t, S_{\triangle PCD}=S$,求 S 与 t 之间的关系式及 t 的取值范围;

(2)在(1)的条件下,当 $t=\frac{1}{3}$时,过点 C 作 $CH\perp PD$ 于 H. 设 $k=7CH:9PD$. 求证:关于 x 的二次函数 $y=-x^2-(10k-\sqrt{3})x+2k$ 的图像与 x 轴的两个交点关于原点对称;

(3)在(1)的条件下,是否存在正实数 t,使 PD 边上的高 $CH=\frac{1}{2}CD$,如果存在,请求出 t 的值;如果不存在,请说明理由.

解 (1)过点 P 作 $PM\perp BC$ 于 M.

由 $AB=BC=2, BE\perp AC$ 于 E,且 $BE=\sqrt{3}$,得 $CE=1$.

$\therefore AB=BC=AC, \angle ABC=60°$,

$\therefore PM=BP\cdot\sin 60°=(2-t)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}CD\cdot PM$, $\therefore S=\frac{3}{4}\sqrt{3}(2-t), (0\leqslant t<2)$.

(2)当 $t=\frac{1}{3}$时,由 $PM\perp BC, \angle ABC=60°$可得

$MD=\frac{25}{6}, PM=\frac{5}{6}\sqrt{3}, PD=\frac{5}{3}\sqrt{7}$,

由$\frac{1}{2}\cdot PM\cdot 3=\frac{1}{2}PD\cdot CH$,求得 $CH=\frac{3}{14}\sqrt{21}$. $\therefore k=7CH:9PD=\frac{\sqrt{3}}{10}$.

设关于 x 的二次函数 $y=-x^2-(10k-\sqrt{3})x+2k$ 的图像与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 x_1、x_2,则 $x_1+x_2=-10k+\sqrt{3}=0$, $\therefore$结论成立.

(3)题中要求的 t 不存在. 假设存在正实数 $t(0\leqslant t<2)$,

$\because CH=\frac{1}{2}CD, CH\perp PD$ 于 H, $\therefore \sin CDH=\frac{CH}{CD}=\frac{1}{2}$,

$\therefore \angle CDH=30°, \angle BPD=90°$, $\therefore BP=\frac{1}{2}BD=2.5>AB$,与 P 点在 AB 边上矛盾.

4月21日



TD

解题题典

JIETITIDIAN

ISBN 7-5602-1833-4

9 787560 218335 >



ISBN 7-5602-1833-4
G·904 定价:22.00 元